


Hosted by Google

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XIII. HEFT.

URKUNDEN
ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATIK
IM MITTELALTER UND DER RENAISSANCE.

HERAUSGEGEBEN VON

MAXIMILIAN CURTZE.

IN ZWEI THEILEN. ZWEITER THEIL.

MIT 117 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.



Vorwort.

Die Ausgabe dieser Urkunden in zwei Theilen gestattet mir, hier einige nachträgliche Bemerkungen zum ersten Theile hinzuzufügen.

Zu S. 195: Von den im Briefwechsel REGIOMONTAN's erwähnten Persönlichkeiten lehrte PIETRO BUONO AVOGARIO von 1467 bis 1506 als Docent der Astronomie an der Universität Ferrara, in der ersten Zeit mit GIOVANNI BIANCHINI zusammen. Er war aber, wie aus *Bullettino BONCOMPAGNI* VII, 339—342 sich ergiebt, schon seit 1456 in Ferrara, seiner Vaterstadt, schriftstellerisch thätig. Zur Zeit des Aufenthaltes REGIOMONTAN's in Italien war er also etwa mit diesem gleichaltrig.

Zu S. 264: PAOLO DAL POZZO TOSCANELLI aus Florenz gebürtig starb daselbst im Jahre 1482 im Alter von 85 Jahren. In der ersten Ausgabe der Trigonometrie REGIOMONTAN's, Nürnberg 1533, findet sich auf S. 10—15 der besonders paginierten zweiten Abtheilung ein *Dialogus inter Cardinalem Sancti Petri: episcopum Brixinensem* (d. i. NICOLAUS VON CUSA) *et Paulum physicum Florentinum de circuli quadratura*, und auf S. 29 ein Dedikationsschreiben REGIOMONTAN's an ihn: *IOANNES GERMANUS PAULO FLORENTINO Artium et medicinae doctori celebratissimo ac mathematicorum praestantissimo S. P. D.*

Zu S. 295: REGIOMONTAN schrieb auch eine eigene Schrift: *de directionibus contra ARCHIDIACONUM PARMENSEM,* die in der Aufzählung seiner Schriften bei DOPPELMAIR S. 19 erwähnt wird. Wer dieser ARCHIDIACONUS gewesen, war mir nicht möglich zu bestimmen.

Zu S. 306: Dass bei RICCARDI die Angabe, ANTONIO DA MONTE OLMI habe am Anfange des XVI. Jahrhunderts gelebt, wohl auf einem Druckfehler (XVI statt XV) beruht, folgt schon daraus, dass REGIOMONTAN zu dessen Abhandlung *de iudiciis nativitatum* einen Kommentar geliefert hat, der sowohl in der Ausgabe dieser Schrift von 1540 abgedruckt ist, als er sich auch handschriftlich, vielleicht sogar in der Originalhandschrift REGIOMONTAN's, in der Wiener Hofbibliothek erhalten hat. Vergl. *Codex Vindobonensis Palatinus 5335,* Blatt 61^r—96^r: ANTONIUS DE MONTULMO, *de iudiciis nativitatum cum commentario IOHANNIS DE REGIOMONTE.*

Das sind die Bemerkungen, welche ich hier einzufügen mir erlaube.

Thorn, im März 1902.

M. Curtze.

Inhaltsverzeichnis.

III.

DIE „PRACTICA GEOMETRIAE“
DES LEONARDO MAINARDI AUS CREMONA.

Die Artis Metrice Practice Compilatio des Leonardo Mainardi da Cremona.

Einleitung.

Von dieser Abhandlung fand ich den Text im *Codex Philos. 46* der Universitätsbibliothek zu Göttingen, wo sie in italienischer Sprache und zwar in Venetianischem Dialekte abgefasst ist. Fürst Boncompagni besass zwei Handschriften desselben Werkes mit lateinischem Texte, welche in der zweiten Ausgabe des Verzeichnisses durch Enrico Narducci die Nummern 302 und 303 tragen. Die Handschrift *Cod. philos. 46 Götting.* konnte ich in der hiesigen Gymnasialbibliothek benutzen, die beiden Handschriften Boncompagni's durfte ich durch die Güte ihres derzeitigen Besitzers, des Herrn Antiquariatsbuchhändlers Halle in München in meiner Wohnung einsehen und mit dem Wortlaute der italienischen Ausgabe vergleichen. Diesem Herren sowohl als der Verwaltung der Königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen sage ich für ihre grosse Liberalität hierdurch meinen ganz ergebensten Dank.

Der *Codex Philos. 46 Götting.* ist eine Foliohandschrift von 50 Blättern, von denen Blatt 42—47 und 49—50 unbeschrieben, und deshalb wohl bei der Zählung der Blätter nicht mit eingerechnet sind, so dass das Blatt 48 die Nummer 42 erhalten hat. Auf dem untern Rande des ersten Blattes steht die Notiz: *„Ex Bibliotheca G. W. Zapff Aug. Vindel. 1784“*, auf dem letzten die weitere: *„Nassete Zuan vigenzo del 1502 adj 18 zugno de sabato a hore 9.“* Gebunden ist er in Holzdeckel mit gepresstem Lederrücken. Die Handschrift stammt aus dem Jahre 1488 und enthält:

Blatt 1^r—29^r unsere Abhandlung.
„ 29^v—30^v eine *Tabula Sinus* für den Durchmesser 120.
„ 31^r—32^r eine *Tabula Sinus* für das Verhältnis 22 : 7.
„ 32^v—34^r eine *Tabula Sollis(!)*, d. h. Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres.
„ 34^v ist leer.
„ 35^r—41^v eine Reihe von weiteren geometrischen Aufgaben und Notizen, welche auf
„ 48^r und ^{v}, das mit 42 bezeichnet ist, fortgesetzt werden.

Von den *Codices Boncompagni* ist No. 302 die ältere, jedoch ist die Angabe des Katalogs, sie stamme aus dem 14. Jahrhundert, nicht richtig, da der Verfasser erst in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts gelebt hat. Es ist eine Pergamenthandschrift von 31 Blättern, welche mit einem

Vor- und einem Nachblatt zusammengebunden sind. Sie beginnt erst auf Blatt 3r mit den Worten

„*Leonardi Cremonensis artis metrice practice compilatio. Primus tractatus.*"

Diese Abhandlung schliesst Blatt 27r: „*Quae vero sit proportio, alibi dixi demonstrativa conclusione fere. Deo Gratias. Amen.*"

Auf Blatt 28a—29b folgen dann dieselben beiden Sinustafeln wie in *Cod. Philos. 46 Götting.*

Der *Codex Boncompagni 303* ist dagegen eine Papierhandschrift von 24 Blatt aus dem 15. Jahrhundert. Sie beginnt sofort auf Blate 1r wie *Cod. Bonc. 302.* Darüber aber steht die Bemerkung:

„*Leonardi Maynardi Astronomi et Physici, ac Mathematici Opus. Florebat sub anno 1488. Franciscus Arisius in Cremona Litterata fol. 347 Tomo p°.*"

Am Fussende derselben Seite hat dieselbe Hand den Besitztitel verzeichnet:

„*I. C. Iohis de Sitonis à Scotia Mlsis*",

was auf der Innenseite des hintern Einbandes nochmals wiederholt ist. Aus einer Bemerkung auf Blatt 15r

„Virgo Maria | Mater Dei | Ora pro nobis | peccatoribus | Adi 20 Noue[e] 1655 | Bonifacio Aliprandi Ioseffo Aliprandi."

geht hervor, dass die Handschrift um die Mitte des 17. Jahrhunderts in dem Besitze der beiden Genannten gewesen ist. Nach dem Kataloge gehörte sie vor Boncompagni dem Advokaten Cav. Carlo Morbio in Mailand.

Die Handschrift enthält einzig und allein den Text der *Artis metrice practice compilatio* ohne die Sinustafeln.

Das oben angezogene Werk des Arisius hat den Titel:

„Cremona Literata seu in Cremonensis doctrinis et literariis dignitatibus eminentiores chronologicae adnotationes auctore Francisco Arisio nobilissimae patriae suae ordinum conservatore. Tomus Primus. Parmae MDCCII, typis Alberti Pazzoni et Pauli Montii."

Es ist die einzige Quelle für das Leben unseres Verfassers, weshalb ich die ihn betreffende Stelle auf S. 347 vollständig mittheile.

„LXXXVIII [1])

Leonardus Maynardus Insignis Astronomus, Physicus et Mathematicus, cuius opusculum M. S. Mediolani servatur, mihi indicatum ab eruditissimo Viro Lazaro Augstino Cotta I. C. amico meo nequaquam satis laudato, cui est initium:

Leonardi Cremonensis Artis Metricae Practice compilatio. Artem Metricam seu Mensurativam occasione quadam prospiciens, cum a multis viderim

1) D. h. 1488. Ich verdanke die Abschrift dieser Notiz der Freundlichkeit des Herrn Antonio Favaro in Padua, der sie mir auf meine Bitte in der dortigen Bibliothek kopierte.

expositam diversis regulis, et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula praestingere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita, quam quippe tripartior juxta triplam mensurae rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.

Haec est Auctoris Idea, distincta tribus Tract. scilicet

De Mensura Longitudinis,
Latitudinis,
Corporum.

In margine opusculi permultae exstant delineatae figurae Mathematicae et Geometricae.

M. HIERONYMUS VIDA *in Act. 2 Orationum adversus Papienses,* ubi loquitur de Mathematicis, sic habet. Fuit ante BLASIUM LEONARDUS MAYNARDUS, qui suo tempore non tantum inter nostros, sed etiam inter omnes in iis studiis tenuit principatum.

CAVITELL. *Annal. sub anno 1496.*"

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die BONCOMPAGNI'sche Handschrift 303 diejenige ist, welche hier von ARISIUS erwähnt wird.

Im Folgenden werde ich den italienischen Text der *Artis metricae practicae compilatio* zum Abdrucke bringen, unter Hinweis an den betreffenden Stellen, wenn der lateinische Text Abweichungen von dem italienischen bietet. Wie man es bei deutschen Texten gewohnt ist, habe ich auch bei diesem italienischen mich genau an den Wortlaut und die Orthographie der einzigen bekannten Handschrift gehalten. Von der *Tabula sinus* gebe ich jedesmal nur die zehn ersten und letzten Zeilen, da aus ihnen die Art der Anordnung und der Berechnung vollständig zu ersehen ist.

Die auf den folgenden Blättern des Manuskripts enthaltenen weiteren geometrischen Bemerkungen habe ich, da sie auch von Interesse sein dürften, ebenfalls zum Abdrucke gebracht. Jedenfalls sind sie von derselben Hand, welche den Text des LEONARDO geschrieben hat, jedoch ebenso sicher nicht von dem Verfasser des italienischen Textes. Die Verschiedenheit der Sprache lässt das nicht zu. Dass der italienische Text die Übersetzung des lateinischen ist, nicht umgekehrt, ist mir nicht zweifelhaft, aber der italienische bildet eine verbesserte Ausgabe desselben, wie ich an den betreffenden Stellen in den Anmerkungen nachweisen werde, und deshalb verdient er den Vorzug vor dem lateinischen.

Auch hier habe ich eine deutsche Übersetzung beizugeben um so mehr für nöthig gehalten, als der italienische Text durch den benutzten Dialekt sowohl als die zum Theil sehr veraltete Ausdrucksweise dem Verständnis Hindernisse in den Weg legt.

Leonardi Cremonensis Artis Metrice Practice Compilatio.

Primus Tractatus.

Ben che molti habieno esposita larte metricha ouero mesurativa in diuerse regule, Io me ho deliberato de redurla in picholo volumen, acio che compendiosamente la se possa auere. De la qual arte ne fazo tre parte secondo le tre razone de la mesura, cioe longeza, largeza et corporeitade.[1])

In la longeza sie alteza, profonditade et extensione in longo, doue sia el piano.

La prima se chiama *altimetria,* cioe mesura de alteze.

La seconda *profundimetria,* cioe mesura de profundita.

La terza *planimetria* ouero *longimetria.*

In largeza sie la *superficie.*

E in la corporeitade ouero profonditade sie el *corpo.*

In prima aduncha de la mesura de la longeza, la quale a le tre parte preditte. E perche queste tre parte de la mesura de la longeza possono fir fatte con lo astrolabio, con lo quadrante, ouero con le verge, ouero con le spechi, nomma farsi la profondita de la valle, la quale non insegno a 1ᵛ fir fatte con li spechi, impercio de lo | gnomone de lo astrolabio e del quadrante, el quale sie scala de altimetria, primamente e da fir ditto. Unda e da sapere, che lo lado de lo gnomone ouero de lo quadrante in lo astrolabio, el quale comenza da la linea de mezo el celo, ouero de la meza notte, sie lo lado de la *ombra dritta,* e lo lado, el quale incommenza de la linea de lorizon, sie lo lado de *ombra versa.* Ma in de lo quadrante

1) In der lateinischen Fassung lautet die Einleitung folgendermaassen: Artem metricam seu mensurativam occasione quadam prospitiens cum a multis viderim expositam diversis regulis et figuris, ut compendiose habeatur, deliberavi hac summula perstringere, corrigendo aliqua ab aliis non bene posita. Quam quippe tripartior iuxta triplam mensure rationem, videlicet longitudinem, latitudinem et corporeitatem.



Des Leonardo von Cremona
Abhandlung über praktische Feldmesskunst.

Erster Traktat.

Obschon viele die Feldmessung oder die Kunst des Messens in verschiedenen Regeln auseinandergesetzt haben, habe ich mich doch entschlossen sie in einem kleinen Bande zusammenzuziehen, damit sie in kompendiöser Form zu haben sei. Ich werde diese Kunst in drei Theilen abhandeln nach den drei Arten des Messens, das ist nach der Länge, Breite und Körperlichkeit.

Zur Länge gehört die Höhe, die Tiefe und die Ausdehnung in der Länge in der Ebene.

Die erste Art heisst *Altimetrie,* das heisst die Messung der Höhe.

Die zweite *Profundimetrie,* das heisst Tiefenmessung.

Die dritte *Planimetrie* oder Längenmessung.

Zur Breite gehört die *Fläche.*

Und zur Körperlichkeit oder der Tiefe gehört der *Körper.*

Zunächst also von der Längenmessung, welche die genannten drei Theile besitzt. Da man nun diese drei Arten der Längenmessung sowohl mit dem Astrolabium und dem Quadrate ausführen kann, als mit Messstangen, oder mit Spiegeln — ausser letzteres bei der Tiefe von Thälern, denn von dieser lehre ich nicht, dass sie mit Spiegeln gefunden werden kann —, so wird zunächst von dem Gnomon des Astrolabs und des Quadranten, das ist von der Scala altimetriae, die Rede sein müssen. Es ist also zunächst zu merken, dass diejenige Seite des Gnomon oder des Quadrates auf dem Astrolab, welche von der Mittellinie des Himmels oder der Mitternacht beginnt, die Seite des *rechten Schattens*[2]) und diejenige Seite, die von dem Horizonte ihren Aufang nimmt, die Seite des *verkehrten Schattens*[3]) ist. Beim Quadranten aber ist diejenige Seite, welche an dem

---

2) D. i. die Cotangente. 3) Die Tangente

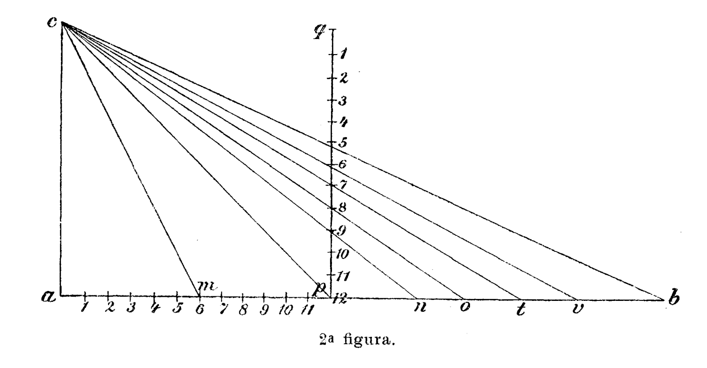
lo lado, el quale acomenza dal lado, doue sono le tauolete, si lo lado de lombra drita, e lo altro lado de ombra versa.

Anchora sapi, che doy lade de gnomone si se diuideno per 12 parte ciascaduna per si, si che el numero duodenario de tutti doy li ladi si fenisse in lo angulo, in del quale i se conzongono, e ciascaduna parte de quelle 12 parte se chiama *ponto de ombra*.

Ma e la *ombra dritta* propriamente la ombra, la quale fa la cosa drizada perpendicularmente sopra lorizon ouero sopra la faza de la terra. Como se ab sia orizon ouero pianura de la terra, et ac sia la torre, el sole sia d, exempli gratia sera af ombra drita. La *ombra versa* e quella, la qual fa la cosa ficada perpendicularmente ouero dritamente in la cosa drizada sopra lorizon. Como se in la prima figura la linea gc ficada in 2r la linea ac, fa | la ombra ch, la quale fi dito ombra versa.

E qui sie una regula, che, quanto la ombra drita e maiore, tanto la ombra versa e minore, e le conuerso. Ma perche la ombra drita ouero versa tolta in questo modo non serue al proposito del mesurare, inpercio dechiaro altramente queste ombre.

Adunque in del proposito non propriamente sie la ombra drita la longeza minore ouero equale a la quantitade de la cosa da fir mesuranda, si como he in la seconda figura la linea ap equale a la linea ac da fir



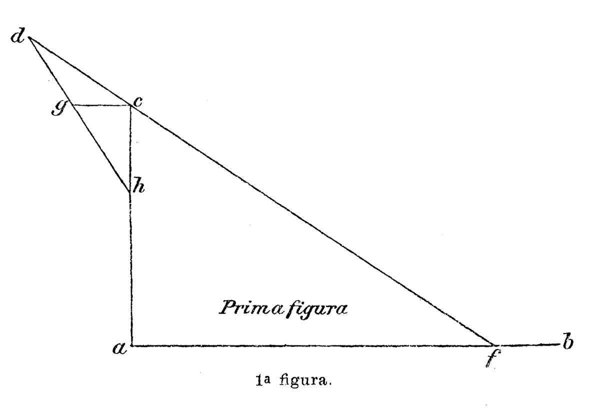
2a figura.

mesuranda, che fi dita ombra drita de la cosa ac. Ma la ombra versa sia la longeza maiore cha la quantitade de la cossa da fir mesuranda, si como la linea ab, la quale sia ombra versa. Per la ombra drita se sta distante da quela cosa mancho cha la sua alteza ouero tanto; per la ombra versa se sta distante piu. Ele etiandio da notare, che la ombra versa, auegnadio che la sia, como ho ditta, la linea ab, niente de meno fi significada per

Rande beginnt, in welchem die Absehen sich befinden, die Seite des *rechten Schattens,* und die andere die Seite des *verkehrten Schattens.*

Ferner ist zu wissen, dass die beiden Seiten des Gnomon jede für sich in 12 Theile getheilt sind, so dass die Zahl 12 auf beiden Seiten in der Ecke sich befindet, in der diese zusammenkommen. Jeder dieser zwölf Theile heisst ein *Punkt des Schattens.*

In eigentlicher Bedeutung ist der *rechte Schatten* derjenige Schatten, den ein auf dem Horizonte oder der Oberfläche der Erde senkrecht errichteter Gegenstand wirft. Wenn etwa ab der Horizont oder die Oberfläche der Erde bezeichnet, ac den Thurm und d die Sonne, so ist z. B. af der rechte Schatten. Der *verkehrte Schatten* ist dagegen derjenige, welchen ein Gegenstand wirft, der senkrecht oder unter rechten Winkeln in einem andern Gegenstand befestigt ist, welcher selbst auf der Horizontalebene errichtet ist. Wie wenn in der ersten Figur die Gerade gc, die in der Geraden ac befestigt ist, den Schatten ch bewirkt, der dann der verkehrte Schatten genannt wird.



1a figura.

Hierbei gilt es nun als Regel, dass, je grösser der rechte Schatten erscheint, um so viel kleiner der verkehrte Schatten ist, und umgekehrt. Da aber der rechte oder der verkehrte Schatten, wenn sie in der angegebenen Weise genommen werden, für Zwecke des Messens nicht gebraucht werden können, werde ich die dazu benutzten Schatten anderweitig erklären.

Zu diesem Zwecke ist also der rechte Schatten uneigentlich die Länge, welche kleiner oder gleich der Grösse des Gegenstandes ist, welcher gemessen werden soll, wie z. B. in der zweiten Figur die Gerade ap gleich der zu messenden Geraden ac diejenige ist, welche der rechte Schatten des Gegenstandes genannt wird. Der verkehrte Schatten aber ist die Länge grösser als die Ausdehnung des zu messenden Gegenstandes, wie etwa die Gerade ab, welche den verkehrten Schatten darstellt. Bei dem rechten Schatten steht man also dem Gegenstande näher, als seine Höhe ist, oder gleich weit ab; bei dem verkehrten Schatten steht man weiter ab. Weiter ist zu bemerken, dass, obgleich der verkehrte Schatten, wie ich sagte, die Gerade ab ist, er nichts desto weniger durch die Gerade qp, die gleich ap

la linea *pq* equale ad *ap* et ha *ac*, equidistante *ac*. Ma la linea *pq*, percio che ela fi messa 144[1]), quando e la si diuide per li soy ponti equiualente, cioe chi valeno tanto, come le parte de la linea *ab*, li quali sono *ap*, si como se hae la linea *pq* a le sue parte, cosi la ombra terminata 2v in la linea *ab* se a a la linea *ac*. Ma la linea visuale | ouero razo del sole termina queste ombre, si come le linee *cm*, *cp*, *cn*, *co*, *ct*, *cv*. Adunque le ombre de questo modo non se chiameno propriamente ombre, ma se chiameno distancie de la cossa, auegnadio che altramente se faceno le ombre, si como he, quando lo solle luce, e che la ombra se buta in sul piano.

Presuposito e premeso questo io seruaro questo ordine. Cioe in praticha de ciascheduna concluxione io usaro primamente lo astrolabio ouero lo quadrante, secondariamente le verge, terciamente li speghi.

Ma primamente de la altimetria, secundariamente de la profundimetria, terciamente de la planimetria.

Primamente de la cossa accensibile, secondariamente de la cosa inacensibile.

In tutte doe, quando tu usaray lo quadrante, tiene lo angulo suo, in del quale e lo chiodo, verso sumitade de la alteza e laltra tauoletta verso 3r lo ochio, et in le altre mesure per lo contrario. |

Prima conclusio. A volere mesurare una alteza de una torre, ouero di alcuna altra cosa acensibile, cioe ala quale se posse andare, apreso la quale cossa sia uno medesimo piano, onda he coluy, che vole mesurare, prima el te conuene vedere la cima de quella alteza, che tu voy mesurare, per quelle doy buse de la alidada de lo astrolabio ouero per quelly de lo quadrante, si che lalidada ouero lo filo, chie perpendiculo del quadrante, sia apunto sopra lo otauo, che e sopra li 45 gradi in lo astrolabio ouero in del quadrante. Andagando soto a quella cosa, che voy mesurare, ouero alingando te da la ditta cossa, si che aponto tu vedi, como e ditto di sopra, stagando firma la alidada overo lo filo del quadrante sopra li 45 gradi. Fatto questo, notta el logo, onde chada el perpendiculo che lo centro del astrolabio a terra ouero dal chiodo del quadrante, e poy mesura, quanto e dal luogo, onda el chade a tera, fina a la cosa, che tu voy mesurare: tanto e alta quella tore ouero altra cosa, quanto e dal logo, onde chade el filo, fino a quela cosa, azon-

1) Dass diese Anschauung auf einem Irrthum beruht, ist augenscheinlich. Die 144 ist das Quadrat des ganzen Schattens, und drückt sich in der hier verlangten Division das bekannte Gesetz aus $\mathrm{tg} = \frac{1}{\mathrm{ctg}}$, $\mathrm{ctg} = \frac{1}{\mathrm{tg}}$.

und *ac* und zugleich parallel zu *ac* ist, dargestellt wird. Wenn aber die Gerade *pq*, welche zu diesem Zwecke gleich 144 gesetzt wird[1]), durch ihre entsprechenden Punkte dividiert wird, das heisst, die ebensoviel gelten als die Theile der Geraden *ab*, welche auf *ap* liegen, so verhält sich der auf der Geraden *ab* begrenzte Schatten zu der Geraden *ac*, wie sich die gerade Linie *pq* zu ihren Teilen verhält. Diese Schatten aber begrenzt die Sehlinie oder der Sonnenstrahl in der Art, wie die Geraden *cm*, *cp*, *cn*, *co*, *ct*, *cv*. Die auf solche Art genommenen Schatten heissen eigentlich nicht Schatten, sondern werden Abstände von dem zu messenden Gegenstande genannt, wenn sie auch in anderer Weise Schatten sind, wie dann, wenn die Sonne scheint und der Schatten auf die Erde geworfen wird.

Dies vorausgesetzt und vorangeschickt, werde ich folgende Ordnung festhalten. Bei der Auflösung jeder Aufgabe nämlich werde ich zunächst das Astrolab oder den Quadranten benutzen, an zweiter Stelle Messstangen, an dritter Spiegel.

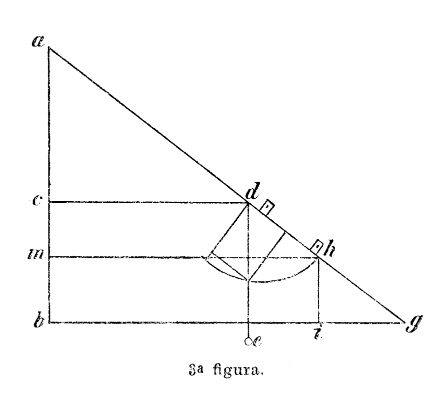
Ich werde aber zuerst vom Höhenmessen, zu zweit vom Tiefenmessen, zu dritt vom Ebenenmessen handeln.

Zuerst von der Höhenmessung zugänglicher, zu zweit von der unzugänglicher Gegenstände.

Bei diesen allen beiden halte man bei Benutzung des Quadranten diejenige Ecke desselben, in welcher sich der Stift (an dem das Bleiloth hängt) befindet, gegen die Spitze der Höhe und die andere Absehe gegen das Auge, bei den anderen Messungen aber umgekehrt.

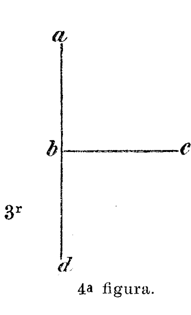
Erste Aufgabe. Will man die Höhe eines Thurmes oder irgend eines andern zugänglichen Gegenstandes messen, das heisst eines solchen, an welchen man herangehen kann, und es steht dieser Gegenstand in derselben Ebene, in welcher derjenige sich befindet, der messen will, so muss man zunächst die Spitze der Höhe, welche zu messen ist, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder die des Quadranten so einvisieren, dass die Alhidade oder der Faden, der das Bleiloth des Quadranten trägt, genau auf den Oktanten, das ist auf 45 Grad, des Astrolabs oder des Quadranten fällt, indem man sich dem Gegenstande, den man messen will, nähert, oder sich von demselben entfernt, bis man, wie oben schon gesagt ist, die Spitze sieht, indem die Alhidade oder der Faden des Quadranten auf 45° feststeht. Ist das geschehen, so bestimme man den Punkt auf der Erde, auf welchen das Loth vom Mittelpunkte des Astrolabs oder dem Stifte des Quadranten fällt, und dann messe man, wie weit es vom Punkte, wo es auf die Erde fällt, bis zu dem Gegenstande ist, den man messen will: so hoch ist dann der Thurm oder der andere Gegenstand, als die Entfernung von dem Orte, auf den der

zando tanto, quanto he dal centro de lo astrolabio a tera ouero dal angulo del quadrante, doue lo chiodo del perpendiculo, como apare qui per exemplo 3ᵛ in la terza figura, in la quale he signato el piano per *fb*, la tore | sia *ab*, la linea del centro de lo astrolabio ouero de lo angulo del quadrante, chi e *d*, a la tera sie *de*, la quale e inquale a la linea *bc*. E per quello modo se po fare, se la quantitade de la distancia da lo ochio tuo a la torre ouero dal tuo pede alla cossa, la quale sie *hm* ouero *ib*, tu gagiungessi la quantitade da lo ochio tuo a la terra, la quale sie *hi*, ouero se tu tolessi la quantita de la tua alteza de dietro da ti segnata per *gi* a la terra: in tute queste se viede, che *gb* et *ba* sono inqualle. Anchora *ib* et *ma* et *mh*, anchora *cb*, *ed*, *ca* sono equali. Ma piu certo se po fare per la linea *de*, perche piu certo po fir mesurada cum la linea *eb*, perche lo ochio non sta fermo.



3ª figura.

Questa medesima si po prouare con due verge, quando tu staghi tanto da lonzo de la cosa, quanto e la alteza de la cosa da fir mesurada da lo ochio tuo. E per questo modo, cioe toglie una verga mazore de ti, in la quale ficha una altra verga perpendichular in del logo, in del qualle la verga mazore de ti avanzi lalteza, in si fatto modo, che la verga ficata sia inquale a la quantitade de la verga, chi e mazore de ti, dal logo, doue le infìcha, in fina a la sumitade de la verga mazore de ti, si como apare per exemplo in la quarta figura 3ʳ la linea *ad* | auanza lalteza dal ochio tuo in su a la terra, chi e *db*, in del quale logo *b* infica una verga *bc* inquale de *ab*. E con quello instrumento fatte in anti e in dietro ficandolo a pionbino, che per *ca* tu vedi la cima de la cosa da fir mesuranda, tegnendo lochio al *c*. E poy mesura la distantia, che tra lastrumento, doue lo ponto *c*, a la tore, e agiungessi la quantitade *db*, la quale e inquale a la linea *ch*, et aueremo *kf*, la quale e lalteza, che noy circhiamo, como apare in la quinte figura.

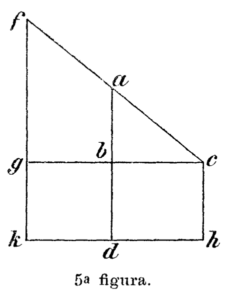


4ª figura.

Anchora se puo fare questa medesima con una tauola stagando tanto lonze de la tore, che voy mesurare, quanto e lalteza de la cosa da lo ochio tuo in su, cioe a comenciando da lo ochio a mesurare

Faden fällt, bis zu jenem Gegenstande, wenn man soviel hinzufügt, als die Entfernung des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, wo der Stift des Bleilothes sich befindet, von der Erde beträgt, wie es beispielsweise in der dritten Figur zu sehen ist. In ihr sei die Ebene durch ef bezeichnet, der Thurm sei ab, die Gerade vom Mittelpunkte des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten, der d heisse, nach der Erde sei de, die gleich der Geraden bc ist. Man könnte bei dieser Methode auch so vorgehen, dass man die Grösse der Entfernung vom Auge bis zu dem Thurme, oder von den Füssen bis zu dem Gegenstande, die hm oder ib ist, zu dem Abstande des Auges vom Erdboden hinzufügt, oder dass man den Betrag seiner eigenen Grösse hinter sich auf der Erde abtrüge, sie sei durch gi bezeichnet: bei allen diesen sieht man, dass gb und ba einander gleich sind. Ebenso sind ib, mh und ma, desgleichen cb, ed und ca einander gleich. Viel genauer aber verfährt man vermittelst der Geraden de, weil sie und die Gerade eb viel genauer gemessen werden kann, da das Auge nicht fest stehen bleibt.

Dieselbe Aufgabe kann man mit zwei Stangen ausführen, wenn man so weit von dem Gegenstande entfernt sich aufstellt, als die Höhe des zu messenden Gegenstandes über dem Auge des Messenden beträgt, und zwar auf folgende Weise. Man nehme nämlich eine Stange, die grösser als man selbst ist, und befestige in ihr senkrecht eine andere Stange in dem Punkte, von welchem aus die Stange, die grösser ist als man selbst, diese Höhe übertrifft in der Art, dass die befestigte Latte gleich der Länge der Latte ist, die grösser als man selbst, von dem Punkte, in dem sie befestigt ist, bis zur Spitze der grösseren Stange, wie z. B. in der vierten Figur ersichtlich ist, dass die Gerade ad die Höhe vom Auge bis zur Erdoberfläche, das ist db, übertrifft. In diesem Punkte b befestige man die Stange bc gleich ab. Mit einem solchen Instrumente gehe man nun vor- oder rückwärts es immer senkrecht vermittelst Bleiloth aufstellend, bis man über c und a die Spitze des zu messenden Gegenstandes erblickt, indem man das Auge in c hält. Dann messe man den Abstand, der zwischen dem Instrumente, und zwar vom Punkte c, und dem Thurme ist, und füge demselben die Länge db hinzu, die gleich der Geraden ch ist, so erhält man kf, das ist die Höhe, die wir suchen, wie in der fünften Figur zu sehen ist.

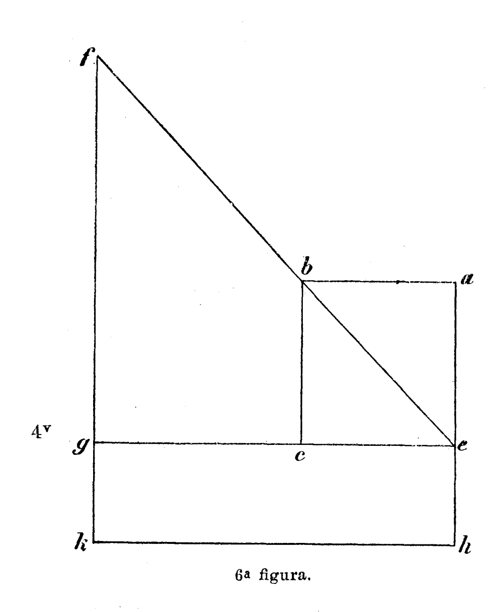


5a figura.

Man kann das Nämliche auch vermittelst einer Tafel ausführen, indem man so weit von dem Thurme, den man messen will, sich aufstellt, als die Höhe dieses Gegenstandes von der Höhe

fino la tore. La quale tauola sia quadrangula ouero rectangula, cioe quadra, e sia drita da lo ochio tuo a lo orizonte, cioe a uno segno, che tu habi preso in la cosa, che tu voy mesurare. De la quale tauola lo lado equidistante a lo orizonte, cioe lo lato de sopra, sia segnato de tanta quantitade, quanta he la perpendiculare ouero la largeza de la tauola, come apare in la sesta figura, in la quale e signata una tauola per $abce$, la linea ab sie equale a la linea ae, chi e la perpendiculare cioe la largeza de la tauola. Agiungi adunque la longeza ge, la quale sie da lo ochio tuo | a la torre, la quale longeza sie equale ha gf, chi e pur lalteza de la cossa. Agiungendeli eh, chi e la alteza, da lo ochio a la terra, et aueray kf, la qual sie tutta la alteza de la cossa, cioe torre etc.

4v



6a figura.

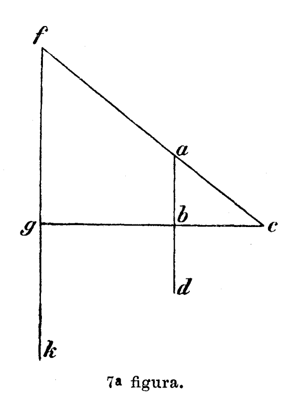
Secunda conclusio. Quando la cossa da fir mesuranda non e in uno medesimo piano con li toy piedi, ouero chele in uno piano piu basso cha li toy piedi, ouero chele piu alta cha lo ochio tuo. Se le in uno piano piu basso, guarda in la cosa, che voy mesurare, uno termine ouero uno segno per la linea equidistante a lo orizonte. Questa aueray per lo astrolabio, quando la soua regula ouero la lidada sera sopra la linea de lo orizonte, chi e la linea de la mita del tondo. Questa linea haueray per lo quadrante, quando lo perpendiculo sera sopra la linea de la alteza, cioe sopra quello lato del quadrante, in lo quale non sono li tauole. Questo aueray per lo instrumento de le verge, guardando per c et b; etiando per lo instrumento de la tauola guardando per c et e. E alora a la linea gf agiungeli la linea kg, et haueray la alteza kf, como apare in la septima figura.

Se la cosa, che tu voy mesurare, he in uno logo piu alto cha lo ochio tuo, benche alafiada el ocore, che questo se possa fare per lo otauo ouero per li 45 gradi, ouero con lo instrumento de le verge, guardando per c et a, ouero per la | tauola quadrata guardando per e et b, niente de mancho, perche quello sempre non se puo fare, questa partichula ouero chapitulo sara tratado inmediate, como vederay qui per lordine.

5r

des Auges aus gemessen ist, das heisst, indem man von dem Auge aus nach dem Thurme hin zu messen anfängt. Diese Tafel sei ein rechtwinkliges Viereck, das heisst ein Quadrat, und sie sei vom Auge aus horizontal gerichtet, nämlich nach einem Zeichen, das man an dem Gegenstande, der gemessen werden soll, angebracht hat. Die dem Horizont parallele Seite der Tafel, nämlich die obere Seite, sei von derselben Grösse, welche die senkrechte Seite oder die Breite der Tafel besitzt, wie in der 6. Figur zu sehen ist, in der die Tafel mit *abce* bezeichnet, und wo die Gerade *ab* der Geraden *ae* gleich ist, die die senkrechte Seite, nämlich die Breite der Tafel, darstellt. Man suche nun die Länge *ge*, die von dem Auge bis zum Thurme sich erstreckt; diese Länge ist dann gleich *gf*, die zugleich die Höhe des Gegenstandes ist. Hierzu füge man *eh*, das ist die Entfernung von dem Auge bis zur Erdoberfläche, und man erhält dann *ke*, die Gesamthöhe des Gegenstandes, nämlich des Thurmes.

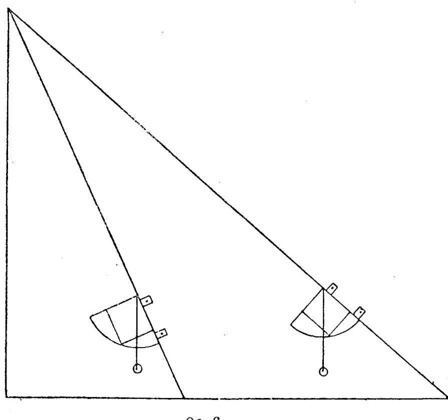
Zweite Aufgabe. Wenn der zu messende Gegenstand sich nicht in derselben Ebene mit den Füssen des Beobachters befindet, so ist er entweder in einer tiefern Ebene, als die Füsse sind, oder in einer, welche höher gelegen ist, als das Auge. Befindet er sich in einer tiefer gelegenen Ebene, so betrachte man in dem Gegenstande, den man messen will, eine Marke oder ein Zeichen, das in der Horizontalebene sich befindet. Diese findet man vermittelst des Astrolabs, wenn man das Messlineal oder die Alhidade auf die Horizontallinie einstellt, das ist auf die Halbierunglinie der Rundung. Man erhält diese Linie mittelst des Quadranten, wenn das Bleiloth sich auf der Höhenlinie befindet, das ist auf der Seite des Quadranten, die die Diopter nicht enthält; man erhält sie vermittelst des aus Stangen bestehenden Instrumentes, wenn man von *c* über *b* visiert, ebenso mittelst des Tafelinstrumentes, wenn man von *c* über *e* beobachtet. Zu der Länge *ef* füge man dann noch die Gerade *kg* hinzu, und man erhält dann die Höhe *kf*, wie in Figur 7 zu sehen ist.



7a figura.

Wenn es sich aber auch trifft, falls der Gegenstand, den man messen will, an einem höhern Orte als das Auge des Beobachters sich befindet, dass man dann die Messung mit dem achten Theile des Kreises oder 45^0 ausführen kann, oder mit dem Stangeninstrument, indem man über *c* und *a*, oder mit der quadratischen Tafel, indem man über *e* und *b* visiert, so soll doch, weil sich das nicht immer ausführen lässt, dieser Gegenstand oder dieses Kapitel sogleich im Folgenden abgehandelt werden, wie man hier der Reihe nach sehen kann.

Terza conclusio. Altramente ouero per uno altro modo se puo mesurare una alteza acesibila. Prima guarda la cima de la cosa, che tu voy mesurare, per tuti doy le busi de la lidade de lo astrolabio ouero del quadrante, e notta le ponti, che da la lidade in lo astrolabio, ouero quelli, che da lo perpendiculo del quadrante. Le quali ponti, se li serano ponti de ombra drita, alora multiplica la distantia, chi e tra lo perpendiculo e la torre, che tu voy mesurare, per 12, et quello che ne vene, partilo per quelli ponti, che tu ha habuto, e quello, che ne vene per quella diuisione de li ditti ponti, zonzeli la distantia, la quale e tra lo filo da lo centro de lo astrolabio ouero da lo angulo del quadrante a la tera, como he ditto de sopra, et haueray la altezza, che tu cerchi. Se li serano ponti de ombra versa, questo se puo fare per doy modi. Prima: Multiplica la distantia, che tra ti e la torre, per quelli ponti, che ne venuto, et quello, che ne vene, partilo per 12, e quello, che ne venuto per quella diuisione, cioe per 12, zonzeli la distantia dita di sopra, et haueray quella alteza. | Ouero: Parti 144 per quelli ponti de la ombra versa, che tu hay habuto, et serua quello, che ne vene. Poy multiplica la distantia, che tra lo perpendiculo e la torre, per 12, et quello, che ne vene, partilo per quello, che tu hay seruato, et a quello, che ne vegnera per questa diuisione, zonzeli quella distantia ditta de sopra, et hauera la alteza, che tu circhi, como apare in la ottaua figura.

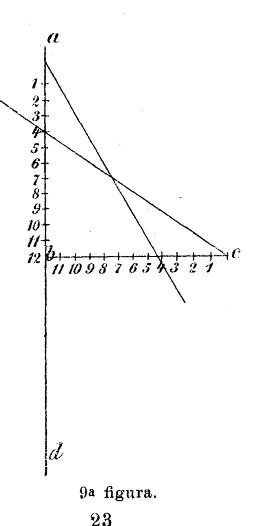

8a figura.

5v

Se tu volessi questa medesima alteza per lo instrumento de le verge, sapi prima, chel te conuene partire tute doe queste linee ouero verge, cioe *cb* et *ba*, per 12, achomenziando al ponto *c* et a lo ponto *a*, et se fenisa in lo angulo *b*. Et lo lato *cb* si da li ponti de la ombra recta, e lo lato *ab* si da li ponti de la ombra versa. Et quando tu he lonze da la torre meno, che non he la soua alteza, te conuene guardare per lo ponto *a* la cima de la torre per li ponti de la linea *cb*; e quando ti li he piu lonze, che non he la soua alteza, el te conuene guardare per lo ponto *c* et per li ponti de la linea *ab* la cima de la torre. Et acio che tu si piu certo in li ponti, tu poy metere doe regule ouero doe linee simile a la regula de lo astrolabio in tuti doy li ponti,

Dritte Aufgabe. Eine Höhe, an welche man herankommen kann, lässt sich auch anders oder auf andere Art messen. Zuerst visiere man die Spitze des Gegenstandes, den man messen will, durch beide Absehen der Alhidade des Astrolabs oder des Quadranten und merke sich die Punkte, welche die Alhidade beim Astrolab, oder die, welche das Bleiloth des Quadranten angiebt. Sind diese Punkte solche des rechten Schattens, so multipliciere man den Abstand, der zwischen dem Lothe und dem Thurme ist, den man messen will, mit 12, und theile das Ergebnis durch die gemerkten Punkte, und das, was bei dieser Division durch genannte Punkte herauskommt, füge man zu dem Abstand hinzu, der zwischen dem Lothe vom Mittelpunkte des Astrolabs oder von der Ecke des Quadranten und der Erde ist, wie wir oben gesagt haben, und hat dann die Höhe, welche man sucht. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auf zwei Arten vorgehen. Erstens: Multipliciere den Abstand zwischen dir und dem Thurme mit den Punkten, die man beobachtete, und theile das Ergebnis durch 12, und das, was aus der Division, nämlich durch 12, herauskommt, addiere man zu dem oben genannten Abstand, so erhält man so die fragliche Höhe. Oder: Theile 144 durch obige Punkte des verkehrten Schattens, die man beobachtet hat, und merke das Ergebnis. Darauf multipliere man den Abstand zwischen dem Lothe und dem Thurme mit 12 und dividiere das Produkt durch das oben Gemerkte und zu dem Ergebnis dieser Division füge man denjenigen Abstand hinzu, von dem wir oben gesprochen haben, so erhält man dadurch die gesuchte Höhe, wie in Figur 8 zu sehen ist.

Will man die fragliche Höhe mittelst des Stangeninstrumentes finden, so muss man wissen, dass man zunächst beide Linien oder Stangen, nämlich cb und ba in 12 Theile theilen muss, indem man von den Punkten c und a anfängt und in der Ecke b endigt. Die Seite cb giebt dann Punkte des rechten Schattens, die Seite ab Punkte des verkehrten Schattens. Ist man dann von dem Thurme weniger, als dessen Höhe beträgt, entfernt, so muss man von dem Punkte a aus die Spitze des Thurmes durch die Punkte der Geraden cb einvisieren, und wenn man weiter ab steht, als seine Höhe beträgt, so muss man vom Punkte c aus durch die Punkte der Geraden ab die Spitze des Thurmes beobachten. Damit man aber in der Bestimmung der Punkte sicherer sei, kann man zwei Lineale oder zwei Linien, die der Alhidade des Astrolabs ähnlich sind, in den beiden Punkten,



9a figura.

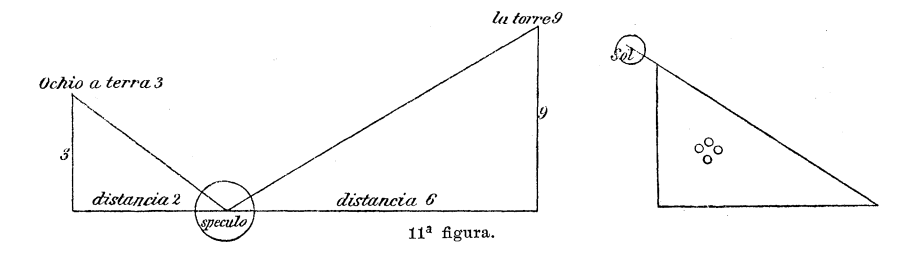
cioe in c et a, houero che una te fara, la quale tu di metere in a guardando per quello, | ouero la meteray in c guardando per quello medesimo, si come appare in la nona figura. El resto faray, come ho ditto in la parte immediate precedente, cioe multiplicando et diuidendo.

6r

Questa medesima faray cum una tauola quadrata, de la quale tauola lo lato ad et lo lato de sieno diuisi per 12, si che lo numero de quela diuisione per 12 comenzi dal ponto a e dal ponto e, e se fenisa in lo ponto d. E lo lato ac sia verso ti, e lo lato de sia lo lato oposito a ti, et lo lato ad sia lo lado de sopra, et alora lo lado ad si da li ponti de la ombra drita, e lo lado de da li ponti de la ombra versa. Poy in lo ponto c, meti una linea simile a la lidada del astrolabio. Et sia lo lado ad equidistante a lo orizonte, cioe sia equo a lo lado, onda tu ha fatto lo orizonte, si como apare in la 10ª figura. El resto faray, como ha dito da prima.

Anchora questa medesima faray cum uno spechio. Pone lo spechio in plano in logo, che fazandole in ante et in dietro tu vedi la cima de ta torre da fir mesurada in del mezo del spechio. E la distancia, chi e tra lo mezo del spechio e la torre, multiplica per la quantita, chi e da lo ochio tuo a la terra, et quello, che ne viene, partilo per la distantia chi e | tra le piedi tuy el mezo del spechio: et vegnera la alteza, che tu circhi, de la torre, come apare in la 11ª figura.

6v



11ª figura.

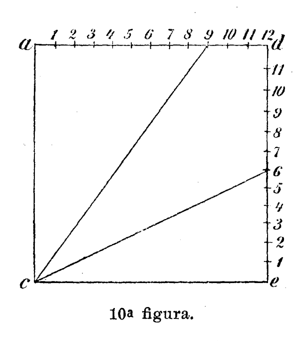
Anchora questa medesima faray cum una verga de certa quantitade de mesura cum lo sole lucente. Stara cossi. Multiplica la quantitade de la ombra de la torre per la quantitade de la verga, et quella multiplicatione partila per la quantita de la ombra, che fa quella verga. Et quello, che ne viene, sera la alteza da la torre, che tu circhi, como apare in la figura signata per 4 o°o.[1])

Questa medesima faray cum la sole lucente, quando la lidada de lo astrolabio, la quale e la sua riga, ouero quando lo perpendiculo del quadrante chade sopra li 45 gradi, ouero per lo instrumento de le verge,

1) Dieser Abschnitt fehlt in der lateinischen Übersetzung.

nämlich in *c* und *a* befestigen, oder es thut auch eine, die man in *a* befestigt, wenn man von hier aus beobachtet, oder auf *c* aufsteckt, wenn man durch ihn visiert, wie man in Figur 9 sehen kann. Im übrigen verfährt man so, wie wir in dem unmittelbar vorhergehenden Paragraphen gesagt haben, nämlich multiplicierend und dividierend.

Dasselbe kann man auch mit der quadratischen Tafel ausführen, bei der die Seiten *ad* und *de* jede in 12 Stücke getheilt sind, so dass die Nummern der Theilung durch 12 in den Punkten *a* und *e* anfangen und im Punkte *d* endigen. Die Seite *ac* sei nach dir gerichtet, die Seite *de* die dir gegenüberliegende, die Seite *ad* die obere Seite. Dann giebt die Seite *ad* die Punkte des rechten Schattens, und die Seite *de* die Punkte des verkehrten Schattens. Nun stecke man auf den Punkt *c* ein Lineal ähnlich der Alhidade des Astrolabs, und es sei die Seite *ad* parallel dem Horizonte, d. h. sie sei gleich der Seite, welche man zur Horizontalen gemacht hat, wie Figur 10 zeigt. Das Übrige macht man, wie zuerst gesagt worden ist.



10a figura.

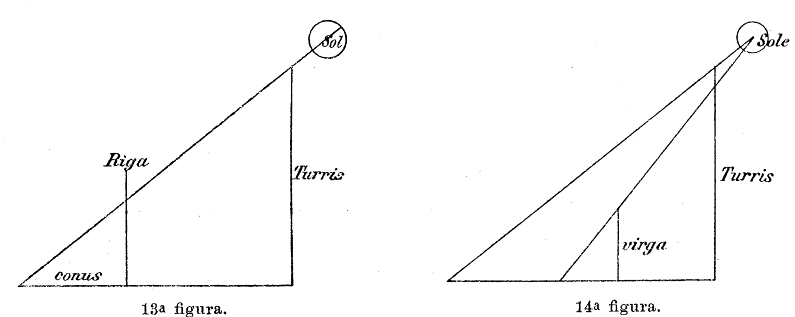
Dieselbe Aufgabe kann man auch vermittelst eines Spiegels auflösen. Man lege den Spiegel auf die Ebene an einen Ort so, dass man, indem man sich vor- oder rückwärts bewegt, die Spitze des zu messenden Thurmes in der Mitte des Spiegels erblickt. Den Abstand, der zwischen der Mitte des Spiegels und dem Thurme enthalten ist, multipliciere man mit der Länge der Entfernung des Auges bis zur Erde, und das Ergebnis theile man durch den Abstand zwischen dem Fusspunkte des Messenden und der Mitte des Spiegels, dann bekommt man die Höhe des Thurmes, die man sucht, wie in Figur 11 zu sehen ist.

Das Nämliche kann man auch mittelst einer Stange von bestimmter Länge ausführen, wenn die Sonne scheint. Es geschieht das so. Man multipliciere die Grösse des Schattens des Thurmes mit der Länge der Stange und theile dieses Produkt durch die Länge des Schattens, den die Stange wirft: das Ergebnis wird die Höhe des Thurmes sein, wie in der Figur zu sehen ist, welche mit vier $o^{o}_{o}o$ bezeichnet ist.[1])

Dasselbe kann man auch durchführen, wenn die Sonne scheint, sobald die Alhidade des Astrolabs, die sein Visierlineal ist, oder sobald das Bleiloth des Quadranten auf 45^0 fällt, oder mit dem Stangeninstrument, sobald der Schatten des Punktes *a* auf den Punkt *c* fällt,

quando la ombra del ponto *a* chade sopra el ponto *c*, ouero per la tauola, quando lombra del ponto *b* chade sopra el ponto *e*: allora e tanto la alteza de la torre, quanto e quella sua ombra. Ma se la ombra chade in altro locho cha su li 45 gradi, nota el numero de li ponti, e se li sera ponti de ombra drita, alora multiplica la quantitade de lombra de la torre per 12, e quello, che ne vene, partilo per el numero de li 7r ponti, e aueray la alteza de la torre. | Ma se li ponti serano ponti de ombra versa, multiplica la quantitade de la ombra de la torre per quelli ponti, el quello, che ne viene, partilo per 12, et aueray la alteza de la torre. Anchora altramente poy fare, quando tu ay li ponti de la ombra versa. Parti 144 per quelli ponti, e quello, che ne viene, serualo. E poy multiplica la quantita ⟨de lombra⟩ de la torre per 12, e quelo, che ne viene, partito per quelo che tu seruasti, et aueray la alteza de la torre come apare in la 12ª figura.

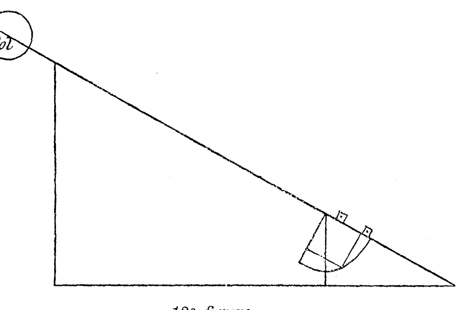
Questa medesima faray cum una verga lucendo el sole per duy modi. El primo sie: driza una verga a piombino sopra la terra apreso al termine de lombra per si fato modo, che una parte de la verga cada in lombra e laltra fora de la umbra, e notto el logo, doue la umbra tocha la verga. Alora multiplica la quantita de la ombra de la torre per la quantita de la verga, la qual chade in la umbra, e quello, che ne viene, partilo per la quantita del umbra, la quale e tra el cuono de la umbra de la torre e la verga, et haueray la alteza de la torre, como apare in la 13ª figura.



13a figura. 14a figura.

El secundo modo sie: a multiplicare la quantitade de la umbra de la torre per la quantita de la verga, e quello, che ne vene partilo per la umbra de la verga et aueray la alteza de la torre, como apare in la 7v 14ª figura. Ma sapi, che le triangoli de le umbre, | de la torre e de la verga sono proportionali, auegnadio che la descripcione de la 14ª figura mostra a contrario, perche la distancia de la torre e de la verga e nulla per rispeto del corpo del sole.

oder vermittelst der Tafel, sobald der Schatten des Punktes *b* auf den Punkt *e* fällt: dann ist die Höhe des Thurmes gleich der Länge seines Schattens. Wenn aber der Schatten auf eine andere Stelle als auf 45⁰ fällt, so merke man die Zahl seiner Punkte. Sind das dann Punkte des rechten Schattens, so multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die Zahl der Punkte, dann erhält man die Höhe des Thurmes. Sind es aber Punkte des verkehrten Schattens, so vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit diesen Punkten und dividiere das Produkt durch 12, dann hat man die Höhe des Thurmes. Hat man Punkte des verkehrten Schattens, so kann man auch anders verfahren. Man theile 144 durch diese Punkte und merke sich den Quotienten. Dann multipliciere man die Schattenlänge des Thurmes mit 12 und dividiere das Ergebnis durch den oben gemerkten Quotienten, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 12 zu sehen ist.



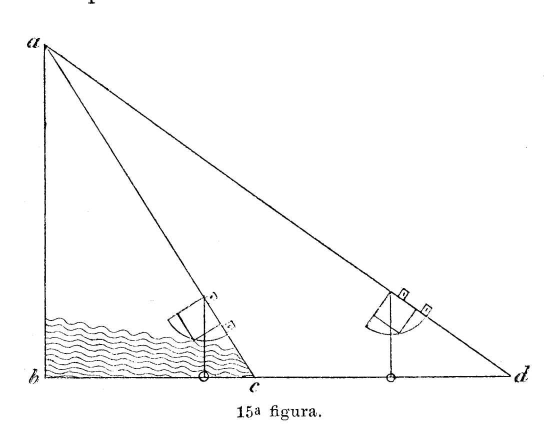
12a figura.

Dasselbe kann man auch auf doppelte Weise vermittelst einer Latte finden, wenn die Sonne scheint. Die erste Art ist: Man errichte eine Stange nach dem Bleiloth auf der Erde am Ende des Schattens in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten fällt, der andere aus ihm herausragt, und bezeichne den Punkt, in welchem der Schatten die Stange berührt. Dann vervielfache man die Schattenlänge des Thurmes mit dem Stücke der Stange, das in den Schatten fällt, und das, was herauskommt, theile man durch die Schattenlänge, welche zwischen der Spitze des Schattens des Thurmes und der Stange liegt, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie es Figur 13 zeigt.

Die zweite Art ist, dass man die Schattenlänge des Thurmes mit der Länge der Latte multipliciert und das Ergebnis durch den Schatten des Stange dividiert, dann erhält man die Höhe des Thurmes, wie in Figur 14 zu sehen ist. Man beachte aber, dass die beiden Schattendreiecke des Thurmes und der Stange ähnlich sind, wenn auch die Zeichnung der 14. Figur das Gegentheil zeigt, weil die Entfernung des Thurmes und der Stange gegen die des Sonnenkörpers nichts ist.

Quarta conclusio. De re inaccessibili.

Quando tu voray mesurare una alteza, doue non si possa andare, apreso ambi prediti astrumenti vedi prima la sumitade de la torre per tuti doy li busi de lo astrolabio ouero del quadrante, et etiamdio lo numero de li ponti, e similmente nota el logo, doue chade el perpendiculo, che e pichato nel centro de lo astrolabio ouero del quadrante. E poy in uno altro logo fa lo simigliante, e nota la distantia de li doy termini e la diferentia de li ponti. Ma habi questa auertentia ne li ponti, che quando tu haueray li ponti de la umbra versa, tu debi partire 144 per lo numero de li ponti, che te aduene. Alora la distancia de li doy termini multiplichela per 12, e quello, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, et aueray la alteza de la torre. Esempli gratia la torre sie ab. Quando tu e in lo termine c, tu ay 10 ponti de ombra drita, e quando tu sey in lo termine d, tu ay 9 ponti de umbra versa, per li quali ponti 9 partisse 144, et aueray 16 ponti, de li quali trane 10, che tu aueui | in termine c, e rimane 6 ponti. Da poy li piedi, che tra el c et el d, chi e 20, multiplicali per 12, e sera 240, li quali debi partire per 6 ponti, che tu seruasti, et aueray 40 piedi, ali quali agiugne la alteza dal centro de lo astrolabio ouero del quadrante a la tera, et haueray la alteza de la torre, come apare in la 15ª figura.



15ª figura.

8r

Questo medesimo faray cun linstrumento de le verge, ouero cun la tauola, stagando in doy luogi, come e ditto denanzi, cioe in c et in d, perche aueray ponti diuersi, e fa in tuto, como e ditto denanzi.[1]

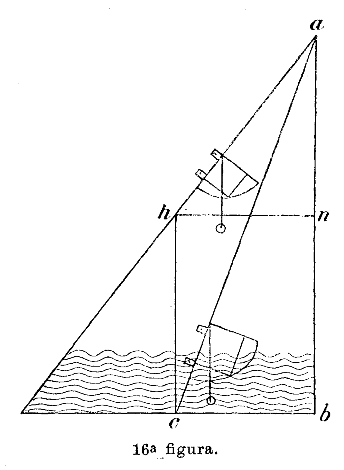
Ma se nuy non potramo alongarse ne approprinquarle a la torre, driza una verga perpendichulare sopra lo ponto c, sera ch, inquale a lo bn, equidistante da ab, e anchora vedi il ponto a per h, como primo vedesti per c, e poy multiplicha ch per li minori ponti, e quelo, che ne viene, partilo per la diferentia de li ponti abuti la prima et la seconda volta, et hauerai na. Adunque aueray ba. E questo e vero

1) Dieser Abschnitt ist in der lateinischen Handschrift erst nach dem hier folgenden geschrieben.

Vierte Aufgabe. Wenn man an den Gegenstand nicht gelangen kann. Will man eine Höhe messen, an welche man nicht herangehen kann, so visiere man zunächst mit beiden vorgenannten Instrumenten die Spitze des Thurmes durch beide Absehen des Astrolabs oder des Quadranten, und merke zugleich die Zahl der Punkte sowie ebenfalls den Punkt, auf welchen das Bleiloth fällt, das im Mittelpunkte des Astrolabs oder des Quadranten befestigt ist. Darauf thue man dasselbe in einem andern Punkte und bestimme den Abstand der beiden Stationen und die Differenz der Punkte. In betreff der Punkte beachte man aber, dass, wenn man Punkte des verkehrten Schattens beobachtet, man 144 durch die beobachtete Zahl der Punkte dividieren muss. Nun vervielfache man den Abstand der beiden Stationen mit 12, und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der Punkte, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. der Thurm *ab*. Wenn man im Punkte *c* steht, findet man 10 Punkte des rechten Schattens, und steht man im Punkte *d*, so hat man 9 Punkte des verkehrten Schattens. Durch diese 9 Punkte theile man 144, so erhält man 16 Punkte. Zieht man davon die 10, die man im Punkte *c* gefunden hat, ab, so bleiben 6 Punkte übrig. Nun multipliciere man die Zahl der Fusse, die zwischen *c* und *d* enthalten sind, das ist 20, mit 12, so ist das 240. Das muss man durch die 6 Punkte dividieren, die man sich gemerkt hat, und erhält 40 Fuss. Hierzu füge man die Höhe des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten über der Erde hinzu, so erhält man damit die Höhe des Thurmes, wie in der 15. Figur zu sehen ist.

Dasselbe vollführt man vermittelst des Stangeninstrumentes oder mit der Tafel, wenn man, wie oben gesagt ist, an zwei Orten sich aufstellt, nämlich in *c* und in *d*, da man hierdurch verschiedene Punkte erhält, und man verfährt in allem so, wie es oben gesagt ist.

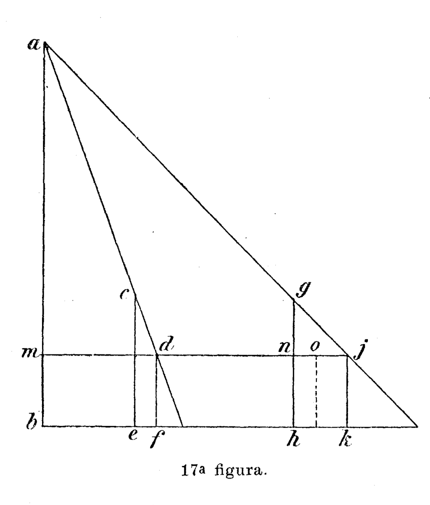
Wenn wir uns aber weder von dem Thurme entfernen können, noch ihm uns nähern, so errichte man im Punkte *c* senkrecht eine Stange, sie sei *ch*, gleich *bn*, parallel zu *ab*, und visiere wieder den Punkt *a* von *h* aus, wie man ihn früher von *c* aus gesehen hat. Dann vervielfache man *ch* mit der kleinern Punktzahl und dividiere das Ergebnis durch den Unterschied zwischen den bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkten, und erhält so *na*, also hat man auch *ba*. Dies ist all-



16a figura.

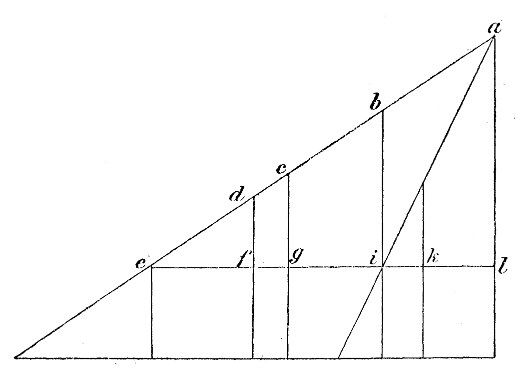
generalmente, ouero che tu volti la ombra versa in drita ouero la drita in versa, attendando che tu usaray lombra drita per versa, mesurando le pianure e le profunditade, e partire sempre 144 per lo numero de li ponti de lombra dritta, la qualli usaray per ombra versa. E questa praticha 8v la vedi in la 16ª figura. |

Questa medesima se puo fare cun una verga, la qualle verga sia *ce* in termine *e*, e lo ochio sie *d*. Anchora quela medesima verga sie in del termine *h*, la qual verga sie *gh*, e lo ochio sie *j*. E apare manifestamente, che la linea *jk*, la qual e la statura del mesuradore, e piu distante, cioe piu da lonze de la verga *gh*, cha la linea *df*, che la statura de lo mesuradore ⟨magis distat a virga *gh*, quam *df* distat⟩, de la verga *ce*, adoncha lo excesso, cioe la differentia, sie *oj*. Multiplica la distantia de li oghi, cioe la linea *dj*, per la quantitade de la verga *gh*, la qual quantita sie *gn*, e quelo, che ne viene, dobiamo partirlo per lo excesso de la distancia de li oghi, cioe per la linea *jo*, e a quelo, che ne vene, agiungeui la auanze de la quantita de la verga, cioe la linea *nh*, la quale sie la statura del mesuratore da lochio a la terra, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 17ª figura.[1])



17ª figura.

Questa medesima si puo fare cun uno spechio, in prima vedendo la sumitade de la torre per lo spechio messo in del ponto *a*, si che lochio tuo sia *f*, e la statura tua *fc*; secondariamente vedendo quela medesima sumitade per lo spechio meso in ponto *b*, si che lo ochio tuo sia *e*, e la statura tua sia *ed*. Ed e manifesto, che la secunda distancia da ti a lo spechio sie

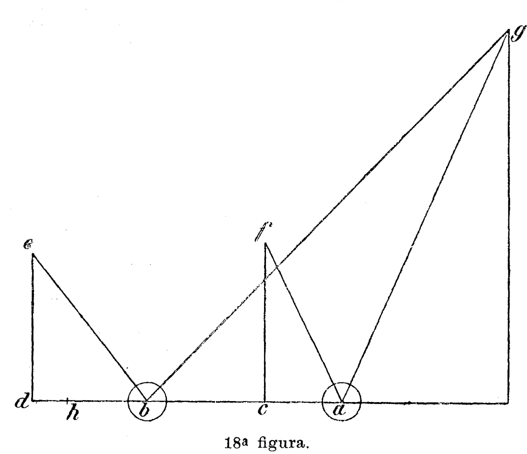


1) In der lateinischen Ausgabe ist hinzugefügt: Huius demonstrationis ratio est, quia *ge*, *je*, *ig* sciuntur, ergo *fd* scitur: scilicet sicut *ef* ad *ei* ita *fd* ad *ib*, ergo *ib* scitur. Sed sicut *fd* ad *ib* ita *eg* ad *al*, ergo *al* scitur, sicut patet in 18ª figura. — Die Figur ist die nebenstehende.

gemein richtig, ob man den verkehrten Schatten in den rechten, oder den rechten in den verkehrten verwandelt, wenn man beachtet, dass man bei Messung der Ebenen und Tiefen den rechten Schatten statt des verkehrten benutzt, und man immer 144 durch die Zahl der Punkte des rechten Schattens dividieren muss, wenn man ihn als verkehrten Schatten gebrauchen will. Diese Methode sehe man in der 16. Figur.

Das Nämliche kann man mit einer Stange ausführen. Diese Stange sei *ce* im Punkte *e*, das Auge sei *d*. Dieselbe Stange befinde sich darauf im Punkte *h*, es sei die *gh*, und das Auge sei *j*. Es ist dann klar, dass, wenn die Gerade *jk*, die die Statur des Messenden darstellt, weiter absteht, das heisst weiter von der Stange *gh* entfernt ist, als die Gerade *df*, dass dann die Gestalt des Messenden weiter von der Stange *gh* absteht, als *df* von der Stange *ce*. Es sei nun dieser Überschuss, das ist die Differenz, *oj*. Man multipliciere den Abstand der Augen, das ist die Gerade *dj*, mit der Länge der Stange, die gleich *gn* ist, und das Ergebnis müssen wir durch die Differenz zwischen den Abständen der Augen dividieren, das ist durch die Länge *oj*. Zu dem Ergebnisse füge man den Rest der Länge der Stange hinzu, nämlich die Strecke *nh*, das ist die Statur des Messenden vom Auge bis zur Erde, und erhält dadurch die Höhe des Thurmes, wie in der 17. Figur zu sehen ist.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen, indem man zuerst die Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, den man im



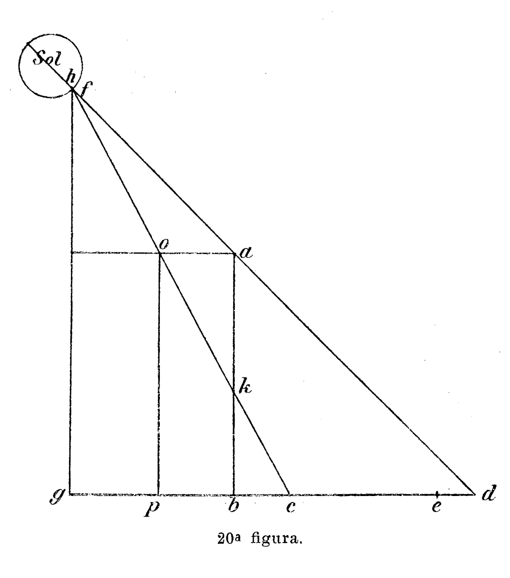
18a figura.

Punkte *a* aufgestellt hat, so dass das Auge in *f* ist, und die Statur des Messenden *fc*; zu zweit, indem man die nämliche Spitze des Thurmes in dem Spiegel einvisiert, der im Punkte *b* niedergelegt ist, so dass das Auge in *d* ist und die Statur des Menschen *ed*. Es ist klar, dass der zweite

9r magiore cha la | prima: sia quello excesso dh. Multiplica adunque la distantia da ti a lo spechio con la statura tua, cioe multiplica ab per fc, e quelo, che ne vene, partilo per lo excesso, cioe per la diferentia de la magiore alongatione da ti al spechio sopra la minore, cioe per dh, et aueray la alteza de la torre, como apare in la 18ª figura. Per quela medesima via aueray la alteza de uno monte e la alteza de una torre, che foss in sul monte.

Quando tu seray apresso a una torre, non partandote de li, aueray la sua alteza per questo modo. Tagli la tauola quadrata messa in la 10ª figura capozela a la torre, si che el lado ad sia equidistante a lo orizonte. Poy guarda la sumitade della torre per queli ponti c, a, e nota el segno in la sumitade de la torre, el qual guardi. Anchora viedi quelo segno per lo ponto c, metendo la riga in e, e viedi onda la riga tocha el lado ad, e la tocha in ponto g. Multiplica adunque ec per si medesimo, e quelo, che ne vene, partilo per dg, et aueray la alteza de la torre, si che sera tante volte in cf, la qual e lalteza de la torre, quante volte dg sera in da, sicomo apare in la 19ª figura.

Questo medesimo fa se f fosse in aiere, si che non hauesse fondamente in terra, come sarebe una cholmegna de una chasa. A la 9v | quale agugneui la alteza da c a la terra, et haueray la alteza da terra.[1])



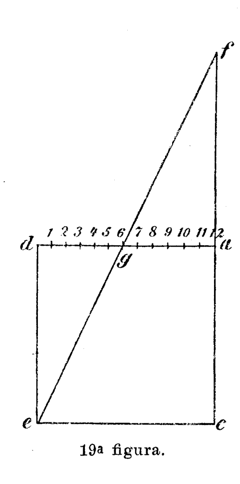
20ª figura.

Volendo sapere la alteza de una torre lucendo el sole et etiamdio la quantita de la ombra sua mediante una verga de certa mesura, ficha la ditta verga perpendiculare sopra lorizonte per si fatto modo, che una parte de la verga chada in la umbra de la torre, e alora vedi la sumitade de la torre per la sumita de la verga notando el logo, doue tu sey. Anchora quela medesima verga metela perpendichularmente verso la torre per si fatto modo, che la summitade de la verga tochi el razo del sole, e nota la quantitade, che e tra la verga e lo cono

1) Dieser Absatz fehlt in der lateinischen Fassung. Das Wort *colmenga* bedeutet, wie mir Herr Gino Loria gütigst mittheilte, im Ferraresischen Dialekte den Betthimmel. Die Übersetzung mit *Erker* dürfte wenigstens kein falsches Bild in den Text bringen.

Abstand zwischen dir und dem Spiegel grösser ist als der erste; dieser Unterschied sei dh. Multipliciert man nun den Abstand zwischen dir und dem Spiegel mit deiner Statur, das heisst vervielfacht man ab mit fc, und theilt das Resultat durch den Unterschied, nämlich durch die Differenz zwischen der grössern Entfernung vom Spiegel und der kleinern, also durch dh, so erhält man die Höhe des Thurmes, wie die 18. Figur zeigt. Auf die nämliche Art erhält man die Höhe eines Berges und die eines Thurmes, der auf dem Berge steht.

Wenn man an einem Thurme sich befindet, so erhält man seine Höhe ohne sich von ihm zu entfernen, auf folgende Weise. Man lege die quadratische Tafel, die in der 10. Figur beschrieben ist, kopfüber an den Thurm, so dass die Seite ad parallel dem Horizonte steht. Dann visiere man die Spitze des Thurmes durch die Punkte c und a und merke sich das Zeichen an der Thurmspitze, das man einvisiert. Nun beobachte man dasselbe Zeichen vom Punkte e aus, indem man das Lineal in e befestigt, und sehe zu, an welchem Punkte das Lineal die Seite ad schneidet; es mag das der Punkt g sein. Dann vervielfache man ec mit sich selbst, und theile das Produkt durch dg, so hat man die Höhe des Thurmes, so nämlich, dass ec so oft in der Höhe des Thurmes, das ist in cf, enthalten ist, so oft dg in da enthalten ist, wie in der 19. Figur zu sehen ist.



19a figura.

In derselben Art geht man vor, wenn f in der Luft sich befände, so dass es kein Fundament auf der Erde hätte, wie z. B. ein Erker eines Hauses. Hierzu addiert man die Höhe von c bis zur Erde, und erhält so die Höhe von dem Erdboden.[1])

Will man die Höhe eines Thurmes bei Sonnenschein bestimmen und zugleich die Länge seines Schattens vermittelst einer Stange von gegebener Länge, so errichte man die fragliche Stange senkrecht auf dem Horizonte in der Art, dass ein Theil der Stange in den Schatten des Thurmes fällt, und visiere dann über die Spitze der Stange nach der Spitze des Thurmes, indem man den Punkt bezeichnet, auf dem man steht. Dann bringe man dieselbe Stange senkrecht näher nach dem Thurme zu, so, dass ihre Spitze den Sonnenstrahl berührt, und bestimme die Entfernung, welche zwischen der Stange und der Spitze des Thurmschattens enthalten ist. Es ist klar, dass der vorher gemerkte Punkt von der Stange in der ersten Station weiter absteht, als die Spitze des

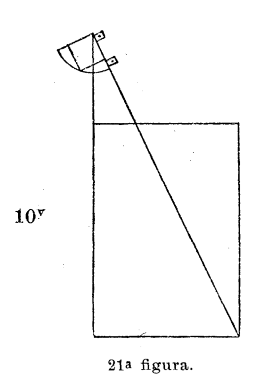
de la umbra de la torre. Et e manifesto, che el logo, che tu notasti, e piu distante da la verga in del primo termine, cha el cono de lombra de la torre de la verga in del secondo termine. Questa differentia seruela, e sia lo primo numero; e la distantia, che tra el logo notado el cono del ombra de la torre, sia el secondo numero; e la quantitade de la verga sia el terzo numero. Multiplica aduncha el secondo per lo terzo, e quelo, che ne vene, partilo per lo primo, et aueray la alteza de la torre. Exempli gratia sia el solle *h*, la torre *fg*, che faza la ombra *gc*, e la verga sia *ab*, de la qual verga la parte *bk* sie in lombra de la torre, e la distantia da 10r ti a la verga in del primo termine | sie *bd*. Item la verga *ab*, la quale e in del segondo termine, sia *op*, e chada totalmente in la ombra de la torre. Aduncha cunzosia cossa e, che la linea *bd* sia mazore che la linea *pc*, quanto e da *ed*: multiplica aduncha *ab* per *cd*, e quello, che ne viene, partilo per *ed*, et averay *fg*. E se voy sapere lumbra de la torre multiplica la distancia del cono de la ombra de la torre a la verga in del secondo termine per la alteza de la torre, e quelo, che ne vene, partilo per la verga, como apare in la 20ª figura.

Secunda pars primi tractatus.

Sequitur de profundimetria, cioe mesura de profunditade, per la quale se mette doe conclusione.

La prima de la profondita de li pozzi, la quale aueray per questo modo.

Stagando in uno de ladi del pozzo viedi cun lo astrolabio ouero cun el quadrante et termine opposito in del profundo del pozzo, e nota li ponti de la ombra drita, perche la profundita granda requere questo, e serva le ditte ponti. Poy multiplica el diametro del pozzo per 12, e quello, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti seruati, et aueray la alteza del pozzo, como apare in la 21ª figura, de la quale tray fora la distancia del centro del astrolabio ouero del quadrante a la bocha del pozzo. | 10v



21ª figura.

Questa medesima faray colo instrumento de le verge, fazando quelo medesimo instrumento in su la stremitade del diametro de la bocha del pozo, et ponendo lochio apreso al ponto *f*. Alora como tu ay fatto de sopra, multiplica et diametro del pozo per 12, e quelo, che ne vene, partilo per li ponti, che tu auesti cun lo instrumento ditto, et aueray la alteza del pozo, si como apare in la 22ª figura, de la quale tray la distantia del ponto *f* da la bocha del pozzo.

Thurmschattens von der Stange in der zweiten Station. Diese Differenz bestimme man, sie wird die erste Zahl. Der Abstand zwischen dem gemerkten Punkte und der Spitze des Thurmschattens sei die zweite Zahl, die Länge der Stange aber die dritte Zahl. Multipliciert man also die zweite mit der dritten und theilt das Produkt durch die erste, so erhält man die Höhe des Thurmes. Es sei z. B. die Sonne h, der Thurm fg, der den Schatten gc wirft; die Stange sei ab, von der der Theil bk im Thurmschatten liege, der Abstand zwischen dem Beobachter und der Stange in der ersten Station sei bd. Es sei ferner die Stange ab in ihrer zweiten Lage op und falle vollständig in den Schatten des Thurmes. Da nun die Gerade bd um so viel grösser ist als die Gerade pc, als ed beträgt, so vervielfache man ab mit cd und theile das Ergebnis durch ed, so erhält man fg. Will man die Grösse des Thurmschattens bestimmen, so multipliciere man den Abstand der Spitze des Thurmschattens von der Stange in ihrer zweiten Lage mit der Höhe des Thurmes und das Ergebnis dividiere man durch die Länge der Stange, wie in Figur 20 zu sehen ist.

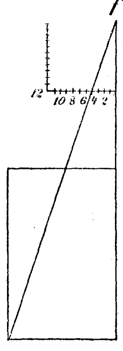
Zweiter Theil des ersten Traktates.

Es folgt die Tiefenmessung, das heisst die Ermittelung der Tiefe. Hierfür werden wir zwei Aufgaben stellen.

Die erste betrifft die Tiefe der Brunnen, die man in folgender Weise bestimmt.

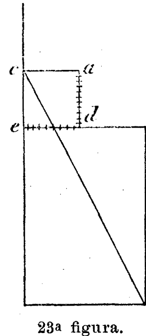
Man stehe auf einer Seite des Brunnens und visiere mit dem Astrolab oder dem Quadranten den entgegengesetzten Punkt in der Tiefe des Brunnens und bestimme die Punkte des rechten Schattens, da grosse Tiefe das erfordert. Die erhaltenen Punkte merke man sich. Darauf multipliciere man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Zahl der Punkte, so erhält man die Tiefe des Brunnens, wie in der 21. Figur zu sehen ist. Von ihr muss man den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder des Quadranten bis zur Mündung des Brunnens abziehen.

Dasselbe kann man auch mit dem Stangeninstrumente bewirken, indem man dasselbe auf dem Endpunkte des Durchmessers der Brunnenöffnung aufstellt, und das Auge in den Punkt f bringt. Genau so, wie man es oben gethan hat, multipliciert man den Durchmesser des Brunnens mit 12 und theilt das Ergebnis durch die Punkte, welche man mit dem Instrumente beobachtet hat, und erhält so die Tiefe des Brunnens, wie in der 22. Figur ersichtlich. Von ihr muss man den Abstand des Punktes f von der Brunnenöffnung abziehen.



22a figura.

Questa medesima faray cun una tabula quadrata drizando el lado *ec* sopra de la bocha del pozo, ponendo lo ochio apreso al *c*. El resto fa, como de sopra, si como apare in la 23ª figura, da la quale tray la distancia del ponto *c* da la bocha del pozzo.

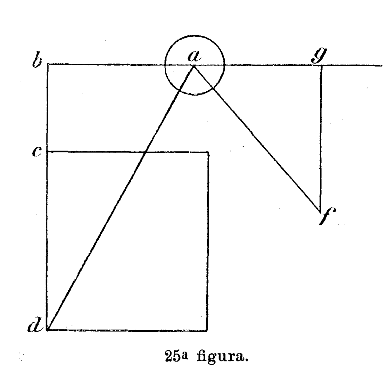


23a figura.

Questa medesima faray cun due verge. Una sie el diametro de la bocha del pozzo, cioe *cf*, e laltra sia in su la stremitade de la boca del pozo in ponto *c*. In la stremita de la qual verga, cioe in ponto *b*, posse lo ochio guardando in del pozzo, e li, dove la linea visuale tocha el diametro de la bocha del pozo, posse per segno *d*. Poy multiplica *cb* per *df*, e quelo, che ne viene, partilo per *dc*, et aueray *fg*, chi e la alteza del pozo, si como apare in la 24ª figura. |

11ʳ

Questa medesima faray per lo spechio. Ficha el spechio in una tabula, la qual tabula voltela verso la profondita del pozo, che sia leuada equalmente da la bocha del pozo, per si fatto modo, chel spechio sia apreso a la estremitade de la bocha del pozo in del ponto *a* de la tabula. Poy dal lado opposito del pozo fa la linea *cb* infina a la tabula, e sia lo ochio *f*, chi vieda in mezo del spechio el ponto *d* per reflexione. Poy dal ponto de lo ochio *f* faray una linea *fg*, che sia equalmente distante a la linea *bcd*. Alora multiplica *fg* per *ab*, e quelo, che ne vene, partilo per *ag*, et aueray *bcd*, dal quale tray *bc*, e rimane *cd* la alteza del pozo, como apare in la 25ª figura.



25a figura.

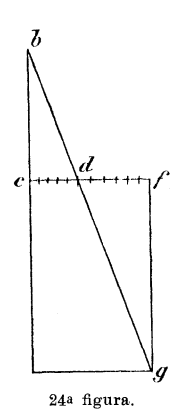
Seconda conclusio. Per questo modo se mesura la profunditade de una valle.[1]) Sia el monte *bcgme*, lorizonte *cgmf*, el ponto in la valle sie *f*, la pianura in sul monte sie *be* equalmente distante a lorizonte. Sia aduncha el mesuradore in del termine *e*, e veda el ponto *f* in la valle cun lo astrolabio, ouero cun el quadrante, ouero cun lo instrumento de le verge, ouero cun la tauola quadrata, e nota li ponti. Le quale se li serano ponti de ombra versa, parti 144 per quelli ponti. Anchora sia el mesuratore in del termine *b*, e fiza notando li ponti, como e ditto da

---

1) Es wird hier gar nicht die Tiefe des Thales gemessen, sondern die Entfernung des Punktes *f* von dem Fusspunkte des von *b* auf die Hori-

Das Nämliche kann auch mit der quadratischen Tafel geschehen, wenn man die Seite *ec* auf der Brunnenöffnung senkrecht errichtet und das Auge in den Punkt *c* bringt. Das Weitere macht man wie oben, wie in Figur 23 ersichtlich. Man muss wieder den Abstand des Punktes *c* von der Brunnenöffnung in Abzug bringen.

Dasselbe macht man mit zwei Stangen. Eine von ihnen sei der Durchmesser des Brunnens, nämlich *cf*, die andere sei im Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *c* senkrecht errichtet. Das Auge bringe man in den Endpunkt der Stange, d. h. in den Punkt *b* und visiere in den Brunnen. Da, wo die Gesichtslinie den Durchmesser der Brunnenöffnung schneidet, setze man das Zeichen *d*. Nun vervielfache man *cb* mit *df* und das, was sich ergiebt, theile man durch *dc*, so erhält man *fg*, das ist die Tiefe des Brunnens, wie die 24. Figur zeigt.



24a figura.

Dasselbe kann man mit einem Spiegel ausführen. Man befestige den Spiegel auf einer Tafel, welche man umgekehrt gegen die Tiefe des Brunnens kehrt, so dass sie gleichmässig von der Brunnenöffnung absteht, und zwar so, dass der Spiegel sich über dem Endpunkte der Brunnenöffnung im Punkte *a* der Tafel befindet. Von der andern entgegengesetzten Seite des Brunnens ziehe man die Gerade *cb* bis zu der Tafel. Fs sei weiter *f* das Auge, das in der Mitte des Spiegels den Punkt *d* durch Reflexion sieht. Dann ziehe man vom Auge *f* die Gerade *fg* parallel der Geraden *bcd*, multipliciere darauf *fg* mit *ab* und theile das Ergebnis durch *ag*, so erhält man *bcd*. Hiervon ziehe man *bc* ab, so bleibt *cd*, die Tiefe des Brunnens, wie die 25. Figur zeigt.

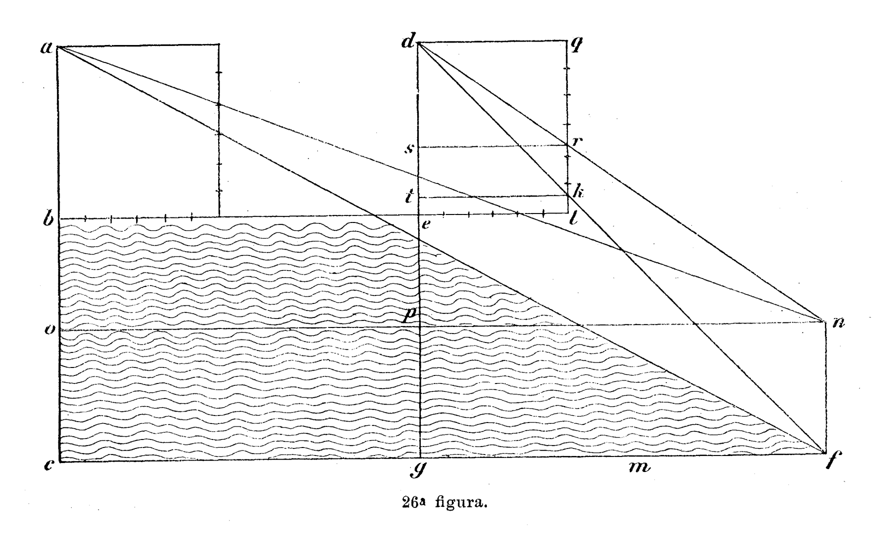
Zweite Aufgabe. In folgender Weise misst man die Tiefe eines Thales.[1])

Der Berg sei *bcgme*, die Horizontalebene *cgmf*, der Punkt im Thale sei *f*, die ebene Fläche auf dem Berge *bc* parallel dem Horizonte. Der Messende stehe nun in dem Endpunkte *e* und visiere den Punkt *f* im Thale mit dem Astrolab oder mit dem Quadranten, oder mit dem Stangeninstrumente, oder mit der quadratischen Tafel, und merke die Punkte des Schattens. Sind das Punkte des verkehrten Schattens, so theile man durch sie 144. Es sei der Messende weiter im Endpunkte *b* und thue unter Feststellung der Punkte genau so, wie wir es zuerst gesagt haben. Von diesen letzten Punkten ziehe man die zuerst beobachteten ab, und merke die Differenz.

---

zontalebene gefällten Lothes. Erst die folgenden Aufgaben geben die Höhe des Berges.

11v prima. Da li qualli | ponti tray li primi ponti, che tu auesti, e serua lo resto. Alora multiplica la distancia de li doi termine, cioe la linea *be*, per li minor ponti, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea *gf*.



26a figura.

A quello medesimo modo faray, se una torre fosse in del termine *f*, de la quale volessimo sapere la sua alteza, la quale sia *nf*. Messado la linea *opn* equalmente distante al orizon, ed aueray la linea *pn*. Ma perche anchora non ay lalteza de la torre, ne la lalteza del monte, in sul quale tu sey, impercio quelle alteze se auerano in questo modo. Guarda, onde la linea visuale *df* secha, cioe tocha, la linea *ql*, e lo sia el ponto *k*, del qual ponto *k*, mena la linea *kt* equidistante a lorizon *cgmf*. Alora multiplica la linea *gf*, la qual tu ay zia atrouata, per la linea *dt*, e quello, che ne vene, partilo per la linea *kt*, et aueray la linea *dg*, ed anche la linea *eg*, la quale e lalteza del monte.

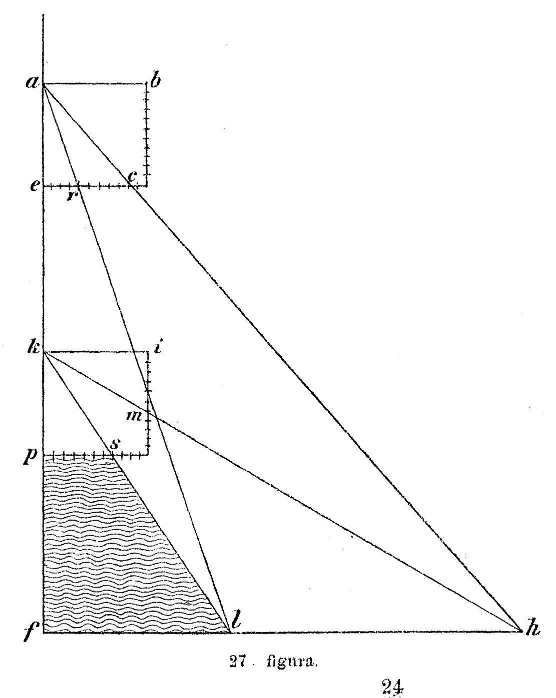
Per quelo medesimo modo faray per la alteza de la torre, vedendo doue la linea visuale *dn* secha la linea *ql*, e li sia el ponto *r*, del quale mena la linea *rs* equidistante a lorizon. Alora multiplica *pn* per *ds*, e quelo, che ne vene, partilo per *rs*, et aueray *dp* et *ep*, adunque *pg*, la quale e inguale a la alteza de la torre. E tute queste cosse apare 12r in la 26a figura. |

Ma se non fusse pianura alcuna in del monte, alora primamente guarda el termine ouero el segno in del piano, e nota le ponti de la umbra versa; secundariamente driza perpendicularmente alcuna mesura dal luogo del ochio tuo in de la prima hoperatione verso al aiere ouero el

Darauf multipliciere man den Abstand der beiden Stationen, das ist die Gerade be, mit der Zahl der kleinern Punktsumme, und dividiere das Ergebnis durch die gemerkte Differenz der Punkte, dann erhält man die Gerade gf (Fig. 26).

In derselben Weise geht man vor, wenn im Punkte f ein Thurm steht, dessen Höhe man bestimmen will, derselbe sei nf. Man messe die Gerade opn parallel zum Horizonte, und erhält so die Gerade pn. Da man aber die Höhe des Thurmes noch nicht kennt, noch die des Berges, auf welchem man sich befindet, so erhält man beide Höhen auf folgende Weise. Man sehe zu, in welchem Punkte die Gesichtslinie df die Gerade ql schneidet, es sei das im Punkte k. Von diesem Punkte k ziehe man die Gerade kt parallel zum Horizonte $cgmf$. Darauf multipliciere man die Gerade gf, die man schon gefunden hat, mit der Geraden dt und dividiere das Ergebnis durch die Gerade kt, dann erhält man die Gerade dg und also auch die Gerade eg, das ist die Höhe des Berges.

In derselben Weise findet man die Höhe des Thurmes, indem man zusieht, wo die Gesichtslinie dn die Gerade ql schneidet; es sei das im Punkte r. Von ihm zieht man die Gerade rs parallel dem Horizonte und multipliciert dann pn mit ds und dividiert das Ergebnis durch rs, dann erhält man dp und ep und folglich pg, was der Höhe des Thurmes gleich ist. Alles dieses zeigt die 26. Figur.



27 figura.

Ist aber auf dem Berge keine ebene Fläche, so beobachte man zunächst den Punkt oder das Zeichen in der Ebene und merke sich die Punkte des verkehrten Schattens. Zweitens errichte man von dem Orte des Auges bei der ersten Beobachtung aufwärts senkrecht irgend ein Maass in die Luft oder nach dem Zenith. Von der Spitze dieses Maasses aus visiere man ein zweites Mal den vorgenannten Punkt oder das Zeichen und merke wieder die Punkte. Darauf multi-

zenit. De la cima de la qual mesura guarda una altra volta el preditto termine ouero segno, e nota li ponti. Alora multiplica 12 per la mesura drizada, e quelo, che ne vene, partilo per la diferentia de li ponti abuti per la prima e per la seconda volta, come sarebe, se tu fusse in sul monte *fp* e tu volessi la longeza *fh*, e sia lalteza de la somita del monte a lo ochio tuo *kp*, e sie el numero dato de li ponti *im*, esempli gratia $3\frac{3}{11}$. Ancora dal ponto *k* fiza drizato *ak* de cognosuda quantita esempli gratia 5; e sia el numero de li ponti *bc* exempli gratia 6. E perche tragando $3\frac{3}{11}$ de 6, resta $2\frac{8}{11}$, sara questa diferentia el partitore. Multiplica adunque 5 per 12, e quelo, che ne viene, partilo per $2\frac{8}{11}$, et aueray 22, la longeza cioe *fh*, la qual circhaui. Ma quando tu auessi li ponti de umbra drita, volta quelli in de li ponti de umbra versa, perche e le da fare cossi volendo le profunditade. Como e, guardando el ponto *l* per *a* aueray *er*, cioe 6 ponti, per li quali parte 144, et aueray 24. Ancora guardando el ponto *l* per *k* aueray *ps*, cioe 11 ponti, per li quali parte 144, el aueray 12v $13\frac{1}{11}$, | le quali trali de 24, aueray el partitore $10\frac{10}{11}$. Multiplica aduncha 5 per 12, como e dito de sopra, e quelo, che ne vene, partilo per $10\frac{10}{11}$, et aueray $5\frac{1}{2}$, el quale e *fl*. Ma nota, che in la mesura de la pianura e de la profunditade tu di usare la umbra drita per la versa et e conuerso (Fig. 27).

Sapia etiamdio, che la praticha fatta segondo questa 27ª figura serua a la prima parte de la secunda conclusione del primo tratado, usando quela alteza *ab* per la pianeza messa qui, la qual he *fh*, e usando de quela pianeza *bd* per questa alteza messa qui, la qual he *fa*, si como la praticha secundo la 25ª figura serue a la secunda parte de la secunda conclusione del primo tratado, cioe usando la pianeza de luno per la alteza de laltro et e conuerso.

Tertia pars primi tractatus.

Sequitur de longimetria, per la quale ponno tre cunclusione.

Prima sie: Quando la longeza ouero pianura de un campo sia dritta, aueray la soua longeza per questo modo. Prima cun lo astrolabio ouero cun lo quadrante sta in uno locho del piano et guarda per li busi de li ditti instrumenti tegnando lo angulo del quadrante, in lo quale e lo chiodo del perpendichulo perme lo ochio, et raxionialmento cadera lo perpendichulo sopra li ponti de la umbra versa; alora multi-
13 plica la quantita de lo ochio tuo a terra per 12, ouero piu certo | multi-

pliciere man 12 mit dem errichteten Maasse und dividiere das Ergebnis durch die Differenz der bei der ersten und zweiten Beobachtung erhaltenen Punkte. Wie es z. B. sein würde, wenn man auf dem Berge *fp* sich befände und man wollte die Länge *fh* messen, und es wäre die Höhe des Berges vom Auge aus gemessen gleich *kp*. Die gefundene Zahl der Punkte *im* sei z. B. $3\frac{3}{11}$. Nun errichte man im Punkte *k* die *ak* von bekannter Länge, etwa 5, und es sei etwa die Zahl der Punkte 6. Da nun, wenn man $3\frac{3}{11}$ von 6 abzieht, $2\frac{8}{11}$ Rest bleibt, so ist diese Differenz der Nenner. Multipliciert man nun 5 mit 12 und dividiert das Ergebnis durch $2\frac{8}{11}$, so erhält man 22, das ist die Länge *fh*, die man sucht. Erhält man aber Punkte des rechten Schattens, so verwandelt man sie in Punkte des verkehrten Schattens, da man so bei Messung von Tiefen verfahren muss. So erhält man z. B. bei Beobachtung des Punktes *l* von *a* aus, *er*, das sind 6 Punkte, durch die 144 getheilt 24 kommen. Beobachtet man ferner den Punkt *l* von *k* aus, so erhält man *ps*, das sind 11 Punkte. Dividiert man dadurch 144, so entstehen $13\frac{1}{11}$, die von 24 weggenommen den Nenner $10\frac{10}{11}$ ergeben. Multipliciert man nun 5 mit 12, wie oben gesagt ist, und theilt das Ergebnis durch $10\frac{10}{11}$, so erhält man $5\frac{1}{2}$, und das ist *fl*. Man beachte aber, dass bei Messung der Ebene und der Tiefen man sich statt des rechten Schattens des verkehrten bedienen muss und umgekehrt (Fig. 27).

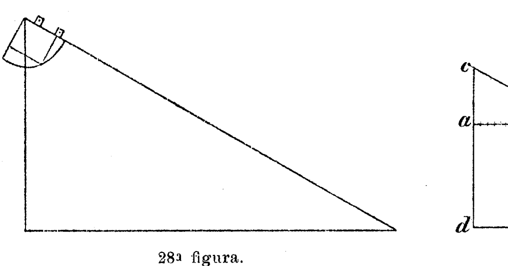
Man wisse ferner, dass das Verfahren gemäss der 27. Figur auch für den ersten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates benutzt werden kann, wenn man die dortige Höhe *ab* für die hier genommene Ebene, nämlich *fh*, setzt, und die dortige Ebene *bd* für die hier gesetzte Höhe, nämlich *fa*, nimmt. Ebenso wie das Verfahren gemäss der 25. Figur auch für den zweiten Theil der zweiten Aufgabe des ersten Traktates dienen kann, indem man die Ebene des einen als die Höhe des andern gebraucht und umgekehrt.

Dritter Theil des ersten Traktates.

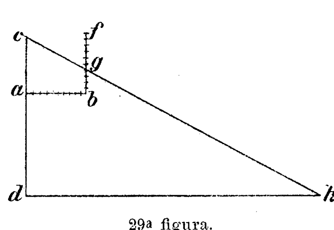
Nun folgt die Längenmessung, für welche wir drei Aufgaben stellen.

Die erste ist folgende: Wenn die Länge oder ebene Ausdehnung eines Feldes gerade ist, so erhält man seine Länge in folgender Weise. Zuerst stehe man mit dem Astrolab oder dem Quadranten in dem einen Endpunkte der Ebene und visiere durch die Absehen genannter Instrumente, indem man die Ecke des Quadranten, in welchem der Stift des Bleilothes sich befindet, an das Auge hält. Dann fällt naturgemäss das Loth auf Punkte des verkehrten Schattens. Nun multipliciere man die Entfernung des Auges von der Erde mit 12, oder genauer, man

plica la distancia del centro de lo astrolabio a tera, ouero da lo angulo del quadrante per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de ii ponti, che tu hay abuto, e quelo, che ne vene, sera la longeza como apare in la 28ª figura. E sapi, che non besogna voltare li ponti de umbra versa in li ponti de umbra dritta.



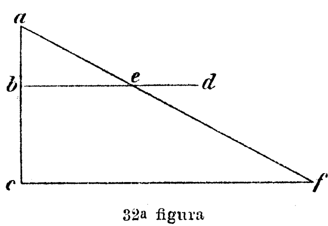
28ª figura.



29ª figura.

Questo medesimo se puo fare cun lo instrumento de le verge, chomo he in la 27ª figura, ponendo lo ochio perme lo *c*, guardando lo altro termine del piano per la regula posta in *c*, chi secha la linea *fb* in ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et aueray *dh*, la longeza del piano, como apare in la 29ª figura. E sapi chel te bisogna cauare la linea *ab* de la linea *dh*. Houero aueray questo, como apare in la 30ª figura, ponendo lo ochio in ponto *f*, in lo quale he la regula, chi secha in lo ponto *g*. Alora multiplica *cd* per 12, e quelo, che ne vene, partilo per *cg*, et aueray *dh*, la longeza.

Questo medesimo se puo fare cun la tabula quadrata ponendo lo ochio a ponto *c*, in lo quale sie la regula, si che lo lado *ce* sia de sopra, e si che la regula si secha la linea *eb* in ponto *f*. Alora multiplica *ca* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per *ef*, et aueray la longeza del piano, como apare in la 31ª figura. Questo medesimo si farebbe, 13′ se lo | lato *ad* fosse alleuato dal piano, e alora la distantia da *c* al piano multiplica per 12 etc.

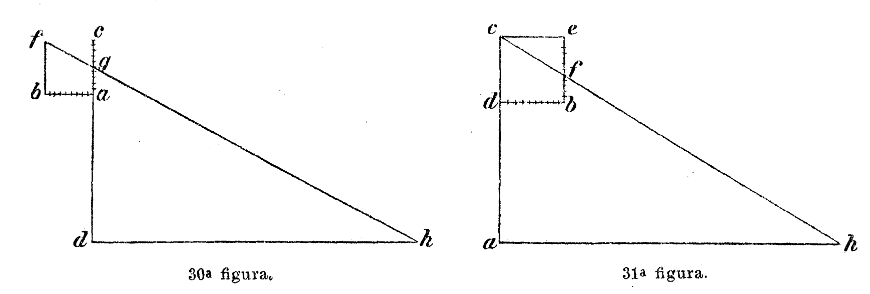


32ª figura

Questa medesima faray per uno tale instrumento. Sia lo piano *cf*, la verga *ac* equale a la statura, a la quale inficha una altra verga perpendichularmente, che sia *bd*; sia lo ochio tuo in ponto *a*, e sia la linea vissuale *af*, che secha la verga *bd* in ponto *e*. Alora multiplica *be* per *ac*, e quelo, che ne viene, partilo per *ab*, et haueray *cf*, la longeza, como apare in la 32ª figura.

multipliciere den Abstand des Mittelpunktes des Astrolabs oder der Ecke des Quadranten von der Erde mit 12 und theile das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man beobachtet hat, dann ist der Quotient die gesuchte Länge, wie in der 28. Figur ersichtlich ist. Man beachte, dass es hier nicht nöthig ist, die Punkte des verkehrten Schattens in solche des rechten Schattens zu verwandeln.

Man kann dasselbe auch mit dem Stangeninstrumente ausführen, wie man es in der 27. Figur benutzte, indem man das Auge nach c bringt und das andere Ende der Ebene mittelst des Messlineals, das man in c befestigt hat, einvisiert. Dieses schneide die Gerade fb im Punkte g. Nun multipliciere man cd mit 12 und das erhaltene Produkt theile man durch fg, dann erhält man dh, die Länge der Ebene, wie die 29. Figur zeigt. Man beachte aber, dass man die Länge ab von der Geraden dh wegnehmen muss. Man könnte auch die Messung so ausführen, wie die 30. Figur zeigt, dass man das Auge in den Punkt f bringt, in welchem das Messlineal sich befindet, das im Punkte g einschneidet. Man multipliciere dann cd mit 12 und dividiere das Ergebnis durch cg, so erhält man dh, die gesuchte Länge.



30a figura. 31a figura.

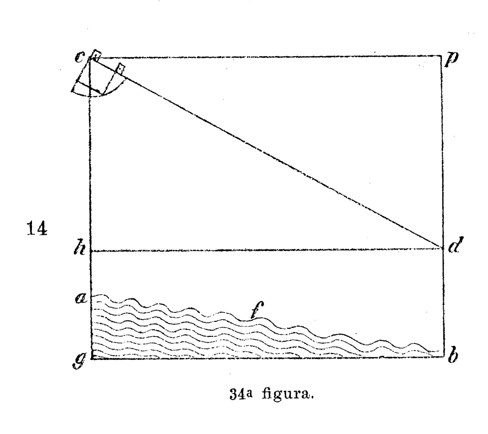
Ebenso kann man mit der quadratischen Tafel vorgehen, wenn man das Auge in den Punkt c bringt, in welchem das Messlineal befestigt ist, und zwar so, dass die Seite ce oben liegt, und das Lineal die Gerade eb im Punkte f schneidet. Man multipliciere nun ca mit 12 und das Ergebnis dividiere man durch ef, so erhält man die Länge der Ebene, wie in der 31. Figur ersichtlich ist. Ebenso könnte man vorgehen, wenn die Seite ad nicht bis zur Ebene reichte. Dann vervielfache man den Abstand von c bis zur Ebene mit 12 u. s. w.

Auch mit folgendem Instrumente lässt sich das ausführen. Die Ebene sei cf, die Stange ac gleich der Grösse des Beobachters. An ihr befestige man senkrecht eine zweite Stange, die bd heisse. Das Auge befinde sich im Punkte a, und die Gesichtslinie sei af, welche die Stange bd im Punkte e schneide. Nun multipliciere man be mit ac und theile das Ergebnis durch ab, so erhält man cf, die gesuchte Länge, wie in der 32. Figur ersichtlich.



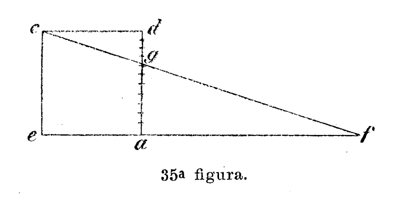
Questa medesima se puo fare per lo spechio. Driza una verga perpendicholarmente sopra lo orizonte, cioe sopra lo piano, a la qual verga apicha lo spechio in ponto, che sia mancho distante da la terra cha lo ochio tuo, como sarebe in ponto *c*, e sia lochio tuo *a* tra lo spechio e lo termine del piano, el quale sia *f*, e sia la distantia de lo ochio tuo de la verga la linea *ba*. Multiplica adunque *ba* per *cd*, e quelo, che ne viene, partilo per *bc*, et haueray *df*, como apare in la 33ª figura.

Secunda conclusio. Se la longeza del piano da fir mesurada non sera drita, como se lorizonte *gb*, el spazio gibboso, cioe non piano, *afb*, fa cossi. Ficha doe righe una in del termine *a*, laltra in del termine *b* piu basso, cossi lonze, che dal ponto *d* possa fir messado una linea in fina a la linea *cg*, la qual sia equalmente distante a lorizonte, la qual linea sia *dh* et non secha la gibbosita del spatio. Alora cholo astrolabio ouero cun el quadrante | 14 situe in ponto *c* vedi el ponto *d*, e nota el numero de li ponti del lumbra versa, iquali te dara la lidada ouero el perpendichulo, e seruali. Poy multiplica *ch* per 12, e quelo, che ne viene, partilo per lo numero de li ponti, che tu seruasti, et aueray la linea *hd*, la qual e equale ha *gb*. E se da ponto *c* vorey menare la linea *cp* in fina ad *bd* equidistante a lorizonte, poray fare de la linea *pd*, si como facesti de la linea *ch*, como apare in la 34ª figura. Vero he, che per questo non se cumprende la gibbositade, ma solamente la distancia de *g* et *b*.



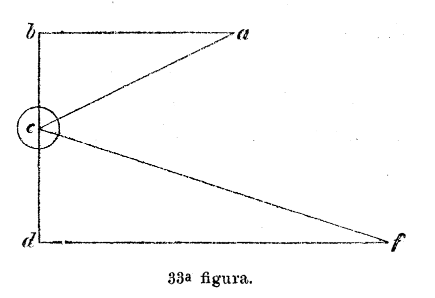
34ª figura.

Terza conclusio. E perche a la fiada hocore in la longimetria la largeza de una fossa, per la noticia de quela sia la terza conclusione. Faray cossi. Meteray la tabula de la 20ª figura sopra la ripa tua de la fossa ouero lo piano elquale, doue tu sey, e guarda el termine *f* in la ripa opposita per *eaf*, metendo lo ochio apreso al ponto *e*. Anchora guarda el ponto *f* per la linea *cgf*, metendo lo ochio justa a ponto *c*, stagando sempre la tabula ferma. Alora multiplica *ec* per si medesimo, e quelo, che ne viene,



35ª figura.

Man kann dasselbe auch mit einem Spiegel machen. Errichte eine Stange senkrecht zum Horizonte, befestige an dieser Stange den Spiegel in einem Punkte, der einen geringern Abstand von der Erde hat, als das Auge, wie es etwa der Punkt *c* wäre. Das Auge befinde sich in *a* zwischen dem Spiegel und dem Endpunkte der Ebene, der mit *f* bezeichnet sei; der Abstand des Auges von der Stange sei die Gerade *ab*. Multipliciere nun *ab* mit *cd* und theile das Produkt durch *bc*, so entsteht *df*, wie Figur 33 zeigt.



33a figura.

Zweite Aufgabe. Wenn die Längenausdehnung der zu messenden Ebene nicht horizontal liegt, wenn z. B. der Horizont *gb* ist, die höckrige, das heisst nicht ebene Länge *afb*, so verfahre man so. Man errichte zwei Stangen, eine im Endpunkte *a*, die andere in dem tiefer gelegenen Endpunkte *b* von solcher Länge, dass man vom Punkte *d* aus eine Gerade bis zur Stange *cg* messen kann, die gleichmässig vom Horizonte absteht. Es sei dies die Gerade *dh*, und sie schneide die Erhöhung des zu messenden Raumes nicht. Nun visiere man mit dem Astrolab oder dem Quadranten, die im Punkte *c* aufgestellt sind, den Punkt *d*, und bestimme die Zahl der Punkte des verkehrten Schattens, welche die Alhidade oder das Bleiloth angiebt, und merke dieselben. Dann multipliciere man *ch* mit 12, und dividiere das Produkt durch die Zahl der Punkte, die man gemerkt hat, so erhält man dadurch dle Gerade *hd*, welche gleich *gb* ist. Würde man vom Punkte *c* aus die Gerade *cp* parallel dem Horizonte bis zur Geraden *bd* ziehen, so könnte man zur Bestimmung der Geraden *pd* genau so verfahren, wie man zur Bestimmung der Geraden *ch* vorgegangen ist, wie die 34. Figur darstellt. Es ist aber klar, dass man hierdurch nicht die Länge der nicht ebenen Fläche, sondern nur den Abstand zwischen *g* und *b* erhält.

Dritte Aufgabe. Da bei der Längenmessung zuweilen die Bestimmung der Breite eines Grabens vorkommt, so behandele die dritte Aufgabe die Bestimmung derselben. Man gehe so vor. Die Tafel der Figur 20 stelle man an dem Ufer des Grabens oder auf der Horizontalebene auf, auf welchem man selbst sich befindet, und beobachte den Punkt *f* auf dem gegenseitigen Ufer vermittelst der Geraden *eaf*, indem man das Auge in den Punkt *e* bringt. Dann visiere man den Punkt *f* ebenfalls vermittelst der Geraden *cgf*, indem das Auge sich im Punkte *c* befindet, die Tafel selbst aber immer fest steht. Nun multipliciere man *ec* mit sich

partilo per dg, et aueray ef, la largeza de la fossa, como apare in la 35ª figura.

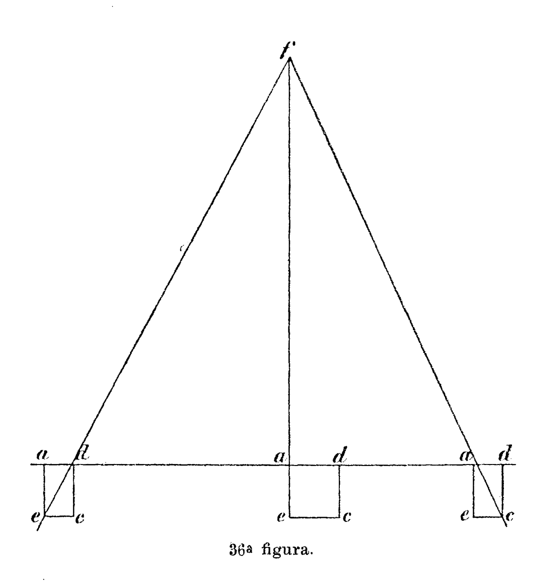
Questo medesimo poy fare altramente. Guarda el ponto f per la linea ebf como prima. Posta menaray la tabula tuo verso la mane destra ouero a la senistra per si fatto modo, che lo lado ad staga per-
14' pendichulare sopra la riga eaf, | cioe al squadro, menando la tabula per tanto spatio, che tu veda anchora el ponto f guardando per ca, si tu aueray menada la tabula da la mane destra, ouero guardando per ed, se tu aueray menada la tabula da la parte senistra. Alora quanta sera la distantia tra el primo locho a el secondo locho a, tanta sera la largeza de la fossa da la parte destra, ouero tra el logo a el secondo locho d da la parte senistra, como apare in la 36ª figura.

A volere mesurare una alteza de una torre sopra una ripa opposita de uno fiume, et etiamdio la largeza de fiume, faray cossi. Driza sopra la ripa, su la quale tu sey, uno tale instrumento, como he $efmng$ per si fatto modo, che la asta ef sopra la terra sia de certa nota, in lo quale instrumento siano doy busi per doue lidade, cioe f et g equidistante a lorizon e fiza menado gf drito fino a la torre da, la qual linea sia gfc. La largeza del fiume sia cd, e la alteza de la torre sia db ouero da. Sia etiamdio ceschaduno de li tri ladi del instrumento, cioe gn, et nm et mf diuisi per 12 ponti. Aduncha e da considerare che, perche doy centri sono posti in lo instrumento presente per due quantita da fir mesurade, de le quale l'una si zose laltra se driza sopra quela, che zose; per la quale chasone la razone de la umbra
15 se menda, impercio | li preditti tri ladi del instrumento serano denominati variamente, percioche a mesurare ed. Perche a le parte de la linea gn firano diti ponti de ombra dritta, e a la parte de nm ponti de ombra versa, e termina el 12 in

37ª figura.

selbst und theile das Ergebnis durch *dg*, so erhält man *ef*, die Breite des Grabens, wie in Figur 35 ersichtlich ist.

Man kann das auch anders machen. Visiere den Punkt *f* wie vorher durch die Gerade *eaf*. Darauf rücke die Tafel nach rechts oder nach links in der Art, dass die Seite *ad* stets auf der Geraden *eaf* senkrecht bleibt, das heisst im Winkelmaass, und zwar rücke man die Tafel um eine solche Entfernung weiter, dass man den Punkt *f* wieder sieht, indem man über *c* und *a* visiert, wenn man die Tafel nach rechts gerückt hat, oder indem man über *e* und *d* visiert, wenn man nach der linken Hand gerückt hat. Dann ist die Breite des Grabens ebenso gross als der Abstand zwischen dem ersten Orte von *a*



36a figura.

und seinem zweiten Orte, wenn man nach rechts gerückt hat, oder wie der zwischen dem ersten Orte von *a* und dem zweiten Orte von *d* bei Linksrückung, wie in Figur 36 zu sehen ist.

Um die Höhe eines Thurmes auf dem gegenüberliegenden Ufer eines Flusses und zugleich die Breite des Flusses zu messen, gehe man so vor. Auf dem Ufer, auf welchem man sich befindet, richte man ein Instrument auf, wie es *efmng* ist, und zwar in folgender Weise. Die Stange *ef* sei über der Erde von bestimmter Länge. In dem Instrumente selbst seien je zwei Absehen für zwei Alhidaden, nämlich *f* und *g* parallel dem Horizonte befestigt. Man verlängere *gf* in gerader Linie bis an den Thurm *da*; es sei dies die Gerade *gfc*. Die Breite des Flusses sei *ed*, die Höhe des Thurmes *db* oder *da*. Es sei ferner jede der drei Seiten des Instrumentes, nämlich *gn*, *nm* und *mf* in je 12 Punkte getheilt. Dabei ist zu beachten, weil zwei Mittelpunkte im vorliegenden Instrumente angenommen sind wegen der zwei zu messenden Gegenstände, von denen einer liegt, der andere auf dem liegenden senkrecht errichtet ist, dass dieserhalb das Verhältnis der Schatten sich ändert. Deshalb werden die drei Seiten des Instrumentes verschieden benannt. Denn will man *ed* messen, so werden die Theile der Linie *gn* Punkte des

ponto *n*, e firano scritte de fora. Ma per mesurare *da* la parte *nm* firano diti ponti de ombra drita, e la parte de *mf* ponti de umbra versa, e termina el 12 in ponto *m*, e firano scritti de dentro. Adunque a volere mesurare *ed* sia lochio apreso al lado *gn* in ponto *h* menada la linea *hfd*. Poy moltiplica *fe* per *gf*, e quelo, che ne viene, partilo per *gh*, et aueray *ed*. Ma se lo ochio fia tra *n* et *m* in ponto *l*, alora multiplica *cf* per *ml*, e quelo, che ne viene partilo per *gn*, et aueray *ek*. Ma a volere mesurare *db* menada la linea *gb*, la quale secha la linea *fm* in ponto *i*, e meso lo ochio apreso ad *g*, alora multiplica *gc* per *if*, e quelo, che ne viene partilo per *fm*, et aueray *eb* et anche *db*. Ma se la linea vissuale chadesse tra *m* e *n* in ponto *l*, alora multiplica *gc* per *gn*, e quelo, che ne viene, partilo per *nl*, et haueray *ca*, e aduncha *da*, como 15′ apare in la 37ª figura. |

Secundus Tractatus.

Per la dio gratia inpaza ouero fornida la pratica del mesurare la longeza, seguita la praticha del mesurare la largeza ouero le superfitie. Ma perche el e de doe generatione superficie, perche alchuna superficie e diforme, cioe che non ha linie dritte ny circhulare, ma parte drite e parte curve inregularmente, como se atroua in di colli, e alchuna e uniforme, la quale a linie drite ouero circhulare: ne la prima non se ne dica niente, ma de la uniforme, la quale ha due parte, perche alchuna e rectilinea, e alchuna e curvilinea. Prima se dira de la rectilinea, e py de la curuilinea. Ma ad auere noticia de la prima, questo bisogna intendere innanci, che una figura ouero superficie rectilinea, la quale abia piu cha tri anguli, cioe cantoni, se de resoluere in tanti trianguli, como ley sera in lordine de le figure. E la *prima* figura rectilinea e lo *triangulo;* la *seconda* e lo *quadrangulo;* e la *terza* e lo *pentagono;* e la *quarta* e lo *exagono;* e la *quinta* e lo *eptagono,* como tu vidi qui. La necessitade de questa resolutione e, perche la quantitade de quelle superficie le sono per le quantitade de li trianguli, in di quali fino resolunde, perche lo triangulo e regula de quelle, perche e la prima

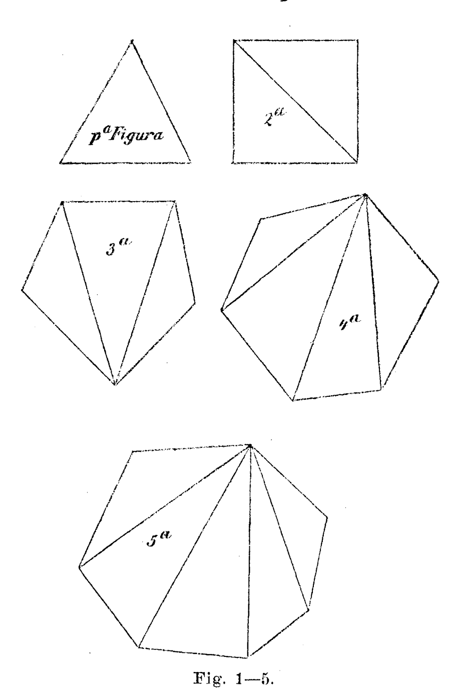


Fig. 1—5.

rechten Schattens genannt und die Theile von nm Punkte des verkehrten Schattens und die Zahl 12 endigt im Punkte n, die Zahlen werden aussen herum geschrieben. Zur Messung von da heissen aber die Theile von nm Punkte des rechten Schattens und die Theile von mf Punkte des verkehrten Schattens, und die Zahl 12 endigt im Punkte m; diese Zahlen werden innerhalb geschrieben. Will man jetzt ed messen, so befinde sich das Auge in der Seite gn im Punkte h, in dem die Sehlinie hfd gezogen ist. Nun multipliciere man fc mit gf und theile das Produkt durch gh, so erhält man ed. Befindet sich aber das Auge zwischen n und m im Punkte l, so multipliciere man ef mit ml und theile das Ergebnis durch gn, so erhält man ck. Will man aber db messen, so ziehe man die Gerade gb, welche die Gerade fm im Punkte i schneide, und bringe das Auge in g. Dann multipliciere man gc mit if und theile das Produkt durch fm, so erhält man cb, also auch db. Fällt aber die Gesichtslinie zwischen n und m in den Punkt l, so multipliciere man gc mit gn und theile das, was herauskommt, durch nl, so findet man ca und folglich auch da, wie in der Figur 37 zu sehen ist.

Zweiter Traktat.

Nachdem so durch Gottes Gnade die Anweisung, Längen zu messen, beendigt oder vollendet ist, folgt nun die Anweisung die Breite oder die Flächen zu messen. Da aber die Flächen von zweierlei Art sind, nämlich eine Fläche ist ungleichförmig, das heisst sie besitzt weder gerade noch kreisförmige Linien, sondern zum Theil gerade zum Theil krumme in unregelmässiger Weise, wie man sie auf Bergen findet, die andere ist gleichförmig; sie hat entweder gerade Linien oder kreisförmige zur Begrenzung: deshalb werde ich von der ersten Art nichts sagen, sondern allein von den gleichförmigen. Diese zerfallen in zwei Arten, die eine ist geradlinig, die andere krummlinig. Zuerst wird von der geradlinigen, dann von der krummlinigen die Rede sein. Um aber zur Kenntnis der ersten zu gelangen, muss man zunächst folgendes wissen, dass nämlich jede geradlinige Figur oder Fläche, die mehr als drei Winkel, das sind Ecken, besitzt, in soviel Dreiecke zerlegt werden muss, als ihre Ordnungszahl in der Reihe der Figuren ist. Die *erste* geradlinige Figur ist das *Dreieck,* die *zweite* ist das *Viereck,* die *dritte* das *Fünfeck,* die *vierte* das *Sechseck,* und die *fünfte* das *Siebeneck,* wie man hier sehen kann. Die Nothwendigkeit dieser Zerlegung folgt daraus, dass der Inhalt dieser Flächen sich aus dem Inhalte der Dreiecke ergiebt, in welche sie zerlegt werden, denn das Dreieck ist die Regel für sie, da es die erste geradlinige Figur ist. Dadurch wird die

figura rectilinea. E per questo la opera se aleuiara in due conclusione. La prima sera de la quantita del triangulo, la seconda sera de la sciencia de la azonzimento de li triangoli in sema, acioche se sapia tute le altre superficie.

Prima conclusio. Quando a la prima conclusione e da fir data la dotrina per atrouare la quantita de la perpendichulare da fir menada in del triangulo da uno deli anguli al lado oposito. La quale perpendichulare cosi fira manifesta, perzo che el triangulo proposito ouero che le rectiangulo, ouero che le ambligonio, ouero che le oxigonio. El primo ha uno angulo recto, el secondo ha uno angulo obtus, cioe mazore che recto, el terzo ha tutti li anguli hachuti, cioe menori che recti. Lo angulo recto e fatto de la linea recta chazando sopra laltera linea retta, quando e le aqualiata al so paro, como e manifesto, quando la linea *ab* chade sopra la linea *dbc*, siche lo angulo *dba* sia equale a lo angulo *cba* (Fig. 6).

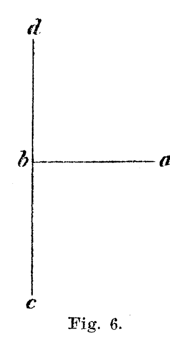


Fig. 6.

Se adunque el triangulo sera rectiangulo, da lo angulo retto mena la perpendichulare al lado oposito, come he in del triangulo *abc*. Perche lo angulo *abc* he recto, impercio da lo angulo *b* mena la linea *bd* perpendichular sopra la linea *ac*, alora multiplica *bc* per si medesimo, e quelo, che ne viene, partilo per *ac*, et aueray la linea *dc*. Lo quadrato de la quale tralo del quadrato de la linea *bc*, et del | rimanente la radix quadrata sera *bd*, la quale si circhava (Fig. 7).

16′

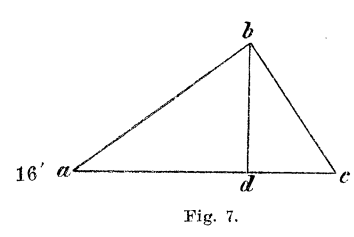


Fig. 7.

Ma se lo triangulo sera ambligonio, si como el triangulo *afg*, de lo quale lo angulo *fag* sie obtuso, prima mena la linea *fa* ultra *a*, siche dal ponto *g* fora del triangulo se poss menare una linea perpendichulare sopra la linea *fa* producta, la qual perpendichulare sia *hg* sopra *fah*, siche lo angulo *fhg* fora del triangulo sia recto. Anchora dal ponto *a* obtuso mena una linea *ak* perpendiculare sopra la linea *fg*. Alora tuti doi li quadrati de *fa* e de *ag* trali de quadrato de *fg*, e la mitade del rimanente partilo per la linea *fa*, et haueray *ah*. Poy multiplica *fa* per *fh*, e quelo, che ne viene, partilo per *fg*, et haueray *fk*, de la quale el quadrato trallo del quadrato de *fa*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ak*, el qual tu cerchi (Fig. 8).[1]

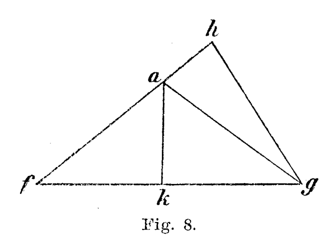


Fig. 8.

ganze Betrachtung in zwei Aufgaben gelöst werden. Die erste wird den Inhalt des Dreiecks behandeln, die zweite beschäftigt sich mit der Kenntnis des Zusammenfassens der Dreiecke, um dadurch alle andern Flächen finden zu können.

Erste Aufgabe. Was die erste Aufgabe betrifft, so muss zuerst gezeigt werden, wie man die Länge des Lothes finden kann, das man in einem Dreiecke von einer Ecke aus auf die gegenüberliegende Seite fällen kann. Dieses Loth lässt sich so bestimmen, je nachdem das vorgelegte Dreieck rechtwinklig oder stumpfwinklig oder spitzwinklig ist. Das erste besitzt einen rechten Winkel, das zweite einen stumpfen Winkel, d. h. grösser als ein rechter; das dritte hat alle seine Winkel spitz, d. h. kleiner als rechte. Ein rechter Winkel wird von einer geraden Linie gebildet, welche auf eine andere Gerade fällt, wenn er seinem Nebenwinkel gleich ist, wie es z. B. deutlich ist, wenn die Gerade ab (Fig. 6) auf die Gerade dbc so fällt, dass der Winkel dba gleich dem Winkel cba ist.

Ist nun das Dreieck rechtwinklig, so ziehe man von dem rechten Winkel die Höhe nach der Gegenseite, wie es im Dreiecke abc geschehen ist (Fig. 7). Da dort der Winkel abc ein rechter ist, so ziehe man von dem Punkte b die Gerade bd senkrecht auf die Gerade ac, dann multipliciere man die bc mit sich selbst und theile das Ergebnis durch ac, so erhält man die Gerade dc. Jetzt ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der Geraden bc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bd, welche gesucht wurde.

Ist aber das Dreieck stumpfwinklig, wie es das Dreieck afg ist, dessen Winkel fag stumpf sei, so verlängere man zunächst die Gerade fa über a hinaus, so dass man vom Punkte g aus ausserhalb des Dreiecks eine senkrechte Gerade auf die verlängerte Gerade fa fällen kann. Dieses Loth sei hg auf fah, so dass also der Winkel fhg ausserhalb des Dreiecks ein rechter ist. Auch von der Spitze a des stumpfen Winkels ziehe man die Gerade ak senkrecht auf die Gerade fg. Nun subtrahiere man die beiden Quadrate der Geraden fa und ag von dem Quadrate der fg und dividiere die Hälfte des Restes durch die Gerade fa, so erhält man ah. Darauf multipliciere man fa mit fh und das Ergebnis theile man durch fg, so erhält man fk. Das Quadrat davon subtrahiere man von dem Quadrate der fa, so ist die Quadratwurzel des Restes die ak, die man sucht (Fig. 8).[1])

1) Hier ist auf umständlichem Wege $fk = \frac{fa^2 + fg^2 - ag^2}{2fg}$ gefunden. Dass auch gh als Höhe des Dreiecks angesehen werden kann, scheint ihm nicht zum Bewusstsein gekommen zu sein, so wenig als für das rechtwinklige Dreieck die Benutzung einer Kathete als Höhe.



Ma se lo triangulo e oxigonio, como he el triangulo *hnp*, de qual angulo tu voy, menare la perpendichulare al lado oposito, si como he *hd* al lado *np*. Alora lo quadrato de uno de lo doy ladi, cioe *hp*, tralo de tutti doy le quadrati de li altri ladi, e del remanente la mitade partila per la linea, sopra la quale he la perpendichulare, cioe per la linea *np*, et aueray la linea *nd*, de la quale 17 el quadrato tralo del quadrato | de *nh*, e de lo rimanente la radix quadrata sera la linea *hd*, la quale se circha. Ma sel quadrato *hn* fosse stato trato del quadrato *hp* et de *np* azonti in sema, e del rimanente la mitade fosse partita per *np*, haueressi hauuto *dp* (Fig. 9).

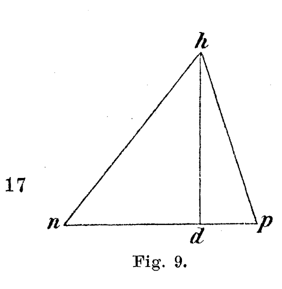


Fig. 9.

Ele aduncha manifesto al geometra, queste cosse esser ditte del triangolo, chi ha tutti li ladi inequali, el quale triangulo se chiama ascalenon, ouero piu longo da una de le parte cha le oltre doe, ouero triangolo gradatum. Ma se tuti li ladi del triangulo fusseno equali, ouero doy de lo ladi precisamente, piu facilmente se trouarebe la perpendichulare, percioche nel triangulo equilatero el quale etiamdio se chiama equicris ouero oxigonio, si como he nel triangolo *abc*, la perpendicholare *ad* partisse per 2 parte equale el lado *bc*, et per consequente la linea *dc* sie manifesta. De la quale el quadrato tralo del quadrato *ac*, e de lo rimanente la radix quadrata sera *ad* (Fig. 10).

Ma in del triangolo de doy ladi equali, el quale se chiama isoceles, similmente la perpendichulare menada al lado inequale partisse quelo lado per mezo. Adoncha el quadrato de una mitade, cioe *gh*, tralo 17′ del quadrato *gd*, e del rimanente la radix | quadrata sera *dh*, el qual e, che tu cerchi (Fig. 11—13).

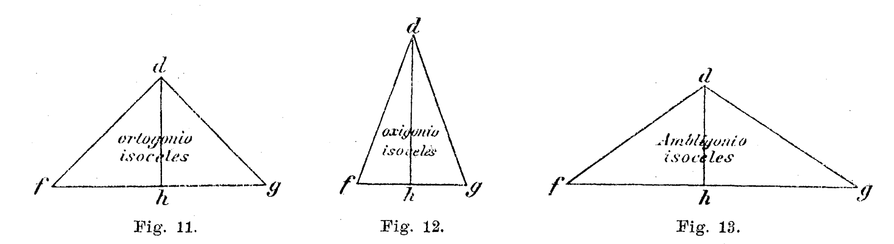


Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Aduncha hauuta la perpendichulare multiplica la soa mitade per el lado, sopra el qualle ela chade, et aueray la superficie ouero larea del triangulo, la qual cossa dice la prima conclusione.

Secundo conclusio. La secunda conclusione si se fa. Azunzi le quantitade zia atrouate de doy ouero de tri trianguli, ouero quanti tu voy, insieme, et haueray quello, che tu circhi.

Ist aber das Dreieck spitzwinklig, wie es das Dreieck *hnp* ist, so ziehe man von einer beliebigen Ecke das Loth nach der Gegenseite, wie etwa *hd* es für die Seite *np* ist. Darauf subtrahiere man das Quadrat der einen der beiden Seiten, etwa von *hp*, von der Summe der Quadrate der andern Seiten und theile die Hälfte des Restes durch die Gerade, auf der das Loth steht, also durch die Gerade *np*, so erhält man die Gerade *nd*. Ihr Quadrat ziehe man von dem Quadrate der *nh* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Gerade *hd*, welche man sucht. Wenn aber das Quadrat der *hn* von der Summe der Quadrate der *hp* und *np* abgezogen würde und die Hälfte des Restes durch *np* dividiert, so würde man die *dp* erhalten (Fig. 9).

Dem Geometriekundigen ist nun klar, dass das Vorhergehende von solchen Dreiecken gesagt ist, die lauter ungleiche Seiten besitzen. Ein solches Dreieck heisst hinkend (*scalenon*), oder auf einer Seite länger als auf der andern, oder stufenförmig (*gradatum*). Wenn aber alle Seiten eines Dreiecks einander genau gleich sind, oder zwei von ihnen, so kann man die Höhe viel leichter bestimmen. Denn in dem gleichseitigen Dreiecke, das auch *equicris* oder spitzwinklig heisst, wie es sich z. B. im Dreiecke *abc* verhält, theilt dis Höhe *ad* die Seite *bc* in zwei gleiche Theile, und es ist daher die Länge *dc* ohne weiteres bekannt. Nun ziehe man ihr Quadrat von dem Quadrate der *ac* ab, so ist die Quadratwurzel des Restes die *ad* (Fig. 10).

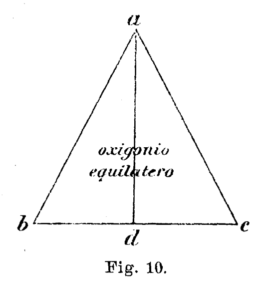


Fig. 10.

In dem Dreiecke mit zwei gleichen Seiten aber, das gleichschenklig genannt wird, halbiert in ähnlicher Weise die nach der ungleichen Seite geführte Höhe diese Seite. Man ziehe also ebenfalls das Quadrat einer Hälfte, also von *gh*, von dem Quadrate der *gd* ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die *db*, die man sucht (Fig. 11—13).

Nachdem man so die Höhe erhalten hat, multipliciere man ihre Hälfte mit der Seite, auf welcher sie steht, so erhält man dadurch die Fläche oder den Inhalt des Dreiecks, und das heisst die erste Aufgabe.

Zweite Aufgabe. Die zweite Aufgabe wird so gelöst. Man addiert die schon gefundenen Inhalte zweier oder dreier Dreiecke, oder von so vielen, als man will, zusammen, und erhält so das, was man sucht.

Per altra via puo fir demostrada geometricamente. Cioe, prima a cescheduno triangulo za cognosuto circha el quadrato, che el sia equale, da poy a doy quadrati de doy trianguli circha uno quadrato che gesia equale a li doy triangulli, e se a questo quadrato agiugneray el quadrato del terzo triangulo, atroueray uno quadrato equale a li tri trianguli, e cossi de li altri. Adoncha questa operatione requere due cosse.

La prima he, atrouare el quadrato equale al triangulo, che se fa per questo modo. Agiugne in dritto la mitade de la perpendichulare atrouata a lo lado sopra el quale essa perpendichulare chade, e sopra la mitade de questo cunposito mette el centro e descriue uno mezo circhulo tochando la estremitade de la linea cumposita. Posa dal ponto del cunzunzimento de quale due linie driza la perpendichulare in fina a la cir-
18 cumferencia, la qual perpendichulare multiplicada | in si medesima da lo quadrato equale a lo triangulo proponudo. Como he proponudo el triangulo *abe* (Fig. 14), in del quale la perpendichulare *bc*, de la qual la

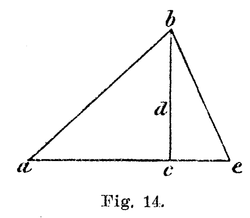


Fig. 14.

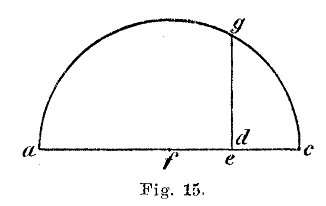


Fig. 15.

mita *dc* e da fir multiplicada in *ae*, acioche se abia la quantita del triangulo proponudo. Zonze *ae* cum *dc*, e tira *aedc* tuta una linea (Fig. 15), si che medesimo ponte sia *e*, *d*. Alora parti tuta la linea *ac* per mezo in ponte *f*, in del quale mesa la ponta del sexto se descriua mezo uno circhio *agc*. Posa dal ponto de la coniuncione de tute doe le linee, cioe dal ponto *e*, *d* fiza, trata una perpendichulare *eg* in fina a la circunferentia del circhulo. Alora questo perpendichulare sia lo lado del quadrato, chi se circhaua, siche el quadrato fatto per la multiplicatione de quela perpendichulare in si medesima sie equale al triangulo proponudo.[1])

La secunda cossa, la quale requere questa operatione, sie a sauere azonzere el quadrato a lo quadrato. La qual cossa facilmente se fara, quando tu haueray doe ladi de doy quadrati, si como te ho insegnato de uno. Adoncha queli doy quadrati azonzeli per sie fatto modo, che li faceno uno angulo retto. E allora el terza lado oposita a

1) Hier fügt der lateinische Text hinzu: Cuius perpendicularis notitiam habebis in numeris, si quadratum suum fuerit signatum numero quadrato, aliter vero non. Ut si linea *ad* esset 9, *dc* 4, linea *ge* erit 6.

Auf anderem Wege kann man die Lösung geometrisch darstellen. Zunächst sucht man nämlich zu jedem schon gefundenen Dreiecke das ihm gleiche Quadrat, darauf bestimmt man zu den zwei Quadraten von zwei Dreiecken ein Quadrat, das diesen beiden Dreiecken gleich ist. Fügt man dann zu diesem Quadrate das Quadrat des dritten Dreiecks hinzu, so findet man ein Quadrat, das den drei Dreiecken gleich ist, und so macht man es weiter. Dieses Verfahren verlangt also zweierlei.

Das erste ist, ein Quadrat zu finden, das einem Dreiecke gleich ist, und das macht man folgendermaassen. Man füge die Hälfte der gefundenen Höhe in gerader Linie der Seite hinzu, auf welcher sie senkrecht steht, und den Halbierungspunkt dieser zusammengesetzten Geraden mache man zum Mittelpunkte und beschreibe einen Halbkreis, der durch die beiden Endpunkte der zusammengesetzten Geraden geht. Dann errichte man im Vereinigungspunkte der beiden Geraden das Loth bis zum Kreisumfange, so ist das Loth mit sich selbst vervielfacht gleich dem vorgelegten Dreieck. Ist z. B. das Dreieck abe (Fig. 14) gegeben, in welchem die Höhe bc heisse, dann ist ihre Hälfte dc mit ae zu multiplicieren, um den Inhalt des gegebenen Dreiecks zu erhalten. Man verbinde ae mit dc und ziehe also die $aedc$ als eine einzige gerade Linie, so dass e und d ein und derselbe Punkt sind. Nun halbiere man die ganze Gerade ac im Punkte f, setze in denselben die Spitze des Zirkels und beschreibe den Halbkreis agc. Dann errichte man in dem gemeinsamen Punkte der beiden Geraden, nämlich in dem festen Punkte e, d, das Loth eg bis zum Kreisumfange, dann ist dieses Loth die Seite des Quadrates, das man sucht, so dass also das durch Multiplikation dieses Lothes mit sich selbst entstehende Quadrat dem vorgelegten Dreiecke gleich ist (Fig. 15).[1])

Das Zweite, was unsere Aufgabe erfordert, besteht in der Kenntnis, ein Quadrat mit einem andern zu vereinigen. Diese Aufgabe ist leicht zu lösen, wenn man die beiden Seiten der beiden Quadrate gefunden hat, wie ich es eben für eins gezeigt habe. Diese beiden Quadrate lege man nun so aneinander, dass sie einen rechten Winkel bilden, dann ist die dritte Seite, welche diesem Winkel

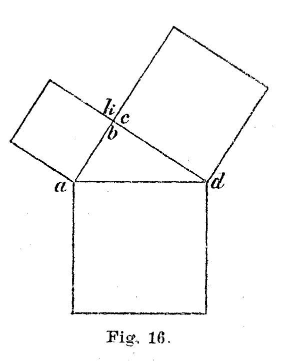


Fig. 16.

1) Die Grösse dieses Lothes als Zahl erhält man nur dann, wenn das Quadrat als eine Quadratzahl herauskommt, auf andere Weise nicht. Wenn z. B. die Gerade $ad = 9$, $dc = 4$ wäre, so würde die Gerade $ge = 6$ werden. (Zusatz des lateinischen Textes.)

questo angulo fara el quadrato, el quale a queli doy. Exempli gratia siando proponudi doy ladi di doy quadrati ab et cd, azonzi queli a langulo k drito. Alora la linea ad fa el quadrato equale ali preditti doy (Fig. 16).

18′ Ma el e da stendere queste cosse | za ditte facilmente, como he ditto, fir tratade, quando li ladi di trianguli, in di quali le altre superficie se resolue, serano noti. Ma non tuti, inanzi pochi sino noti non solamente in li figure rectilinie inregulare, ma etiandio in le regulari, per la qual cosa seguita non essere molto da estenderse in questo parlare. Noma che per le regulari inscriptibili in del circhio in poy usare la tabula de le corde e delle archi. E per li altri resolue in quanti trianguli tu poy, prendando la propinquitade de la certeza.

I v i e a d a n o t a r e, c h e i n a l c u n e l i b r o d e m e c h a n i c i f i m e s s o l o a t r o u a m e n t o d e l a q u a n t i t a d e l t r i a n g u l o a l t r a m e n t e p e r s i f a t t o m o d o.[1] Prima multiplica la mitade de la somma de tuti li ladi azonti in sema per la diferentia di uno lado e de la mita de la ditta soma. Item secondo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia del secondo lado e de la mita de la ditta somma. Item terzo multiplica quello, che ne venuto, per la diferentia de lo terzo lado e de la mita de la ditta somma, alora la radix quadrata de quello, che ne venuto, sera larea del ditto triangulo. Exempli gratia in del triangulo abc (Fig. 17) sia ab 3, ac 4, bc 6. Perche la somma de tutti li ladi sie 13; impercio la sua mita, cioe $6\frac{1}{2}$, multiplichela per $3\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo lado ab per $3\frac{1}{2}$, ne viene $22\frac{3}{4}$. Adunque | multiplica $22\frac{3}{4}$ per $2\frac{1}{2}$, perche la mitade auanza lo lado ac per $2\frac{1}{2}$, ne viene $56\frac{7}{8}$; anchora multiplica $56\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{2}$, perche la predita mitade de li ladi auanza lo lado bc per $\frac{1}{2}$, e ne viene $28\frac{7}{16}$: dicono adunche questi, che la radix quadrata de $28\frac{7}{16}$ e larea del ditto triangulo. Dico, che le ele vero, cunzosiacosa adunca, che quella pratica sia piu lezera cha questa, che jo ho messa per lo secondo de la geometria de EUCHLIDES, impercio e da usare la praticha de li Mechanici.[2]

19

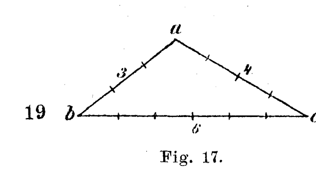


Fig. 17.

1) Das hier gemeinte *Buch über Mechanik* ist der *Liber de ponderibus* des JORDANUS NEMORARIUS, an dessen Ende, merkwürdig genug, der Beweis des HERON'schen Lehrsatzes vom Dreiecksinhalte angeschlossen ist.

2) Hier steht im lateinischen Texte so: Dico ego, quod hoc est verum. Nam, cum radix quadrata 28 cum $\frac{7}{16}$ fit 5 integra 19^{m} 57^{2a} 38^{3a}, quae sunt 5 integra et minus quam $\frac{1}{3}$, illa est quantitas prefati trianguli, quod verum est secundum practicam demonstrativam suprapositam pro triangulo obtuso. Quia, cum duo

gegenüberliegt, die Seite desjenigen Quadrates, das beiden zusammen gleich ist. Sind z. B. die beiden Seiten ab und cd zweier Quadrate gegeben, so lege man sie rechtwinklig aneinander in k, dann ist das Quadrat über der Geraden ad gleich den beiden vorgenannten (Fig. 16).

Es ist aber zu beachten, dass die eben auseinandergesetzten Sachen leicht zu behandeln sind, wenn die Seiten der Dreiecke, in welche die andern Flächen sich zerlegen lassen, bekannt sind. Aber es sind nicht alle, vielmehr sehr wenige bekannt, nicht nur in den unregelmässigen geradlinigen Figuren, sondern selbst in den regulären, folglich kann man sich darüber nicht viel weiter verbreiten, ausser dass man für die regulären in einen Kreis einschreibbaren Figuren sich der Tafel der Sehnen und Bogen bedienen kann. Die andern aber zerlege man in soviel Dreiecke als man kann, indem man sich der Genauigkeit soweit als möglich nähert.

Es ist noch zu bemerken, dass in einem Buche über Mechanik die Bestimmung des Inhaltes eines Dreiecks anders, und zwar in folgender Weise gelehrt wird.[1]) Zunächst multipliciere man die Hälfte aller Seiten zusammengenommen mit der Differenz zwischen einer Seite und der Hälfte genannter Summe; zweitens multipliciere man dieses Produkt mit der Differenz zwischen der zweiten Seite und der Hälfte genannter Summe; ebenso multipliciere man dieses Ergebnis mit der Differenz zwischen der dritten Seite und der Hälfte genannter Summe, dann ist die Quadratwurzel des hieraus entstehenden Produktes der Inhalt des gegebenen Dreiecks. Es sei z. B. ein Dreieck abc gegeben, es sei $ab = 3$, $ac = 4$, $bc = 6$. Da also die Summe aller Seiten 13 beträgt, so multipliciere man die Hälfte davon, das ist $6\frac{1}{2}$, mit $3\frac{1}{2}$, da diese Hälfte die Seite ab um $3\frac{1}{2}$ übertrifft; es entsteht daraus $22\frac{3}{4}$. Nun multipliciere man $22\frac{3}{4}$ mit $2\frac{1}{2}$, weil die halbe Summe die Seite ac in $2\frac{1}{2}$ übertrifft, so entsteht $56\frac{7}{8}$; nochmals multipliciere man $56\frac{7}{8}$ mit $\frac{1}{2}$, da die obige halbe Summe der Seiten die Seite bc in $\frac{1}{2}$ übertrifft; es kommt $28\frac{7}{16}$. Nun sagen also jene, dass die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ den Inhalt des genannten Dreiecks ergiebt. Ich sage, dass das richtig ist. Da nun dieses Verfahren viel leichter als jenes ist, das ich nach dem zweiten Buche der Geometrie des Euklides gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.[2])

---

2) *Übersetzung des lateinischen Textes:* Ich sage, dass das richtig ist. Denn da die Quadratwurzel von $28\frac{7}{16}$ gleich $5^g 19' 57'' 38'''$ ist, das ist 5 Ganze und etwas weniger als $\frac{1}{3}$, so ist das der Inhalt genannten Dreiecks, und das ist auch nach der oben für ein stumpfwinkliges Dreieck auseinandergesetzten Beweismethode richtig. Nimmt man nämlich, da die beiden Quadrate über ac und ab

Secunda pars secundi tractatus.

Mi resta a dire de circhulo, per lo quale se mete 4 conclusione.

Prima conclusio. La prima, quando per lo diametro tu voray la circunferentia, multiplica el diametro per $3\frac{1}{7}$ parte del diametro. Exempli gratia perche el diametro del circhio *ai* sie 7 parte, quando tu lo multiplicharay per $3\frac{1}{7}$, aueray la circunferencia 22 parte (Fig. 18).[1]

Secunda conclusio. Quando voray la capacitade del circhio ouero el spacio infra la circunferentia, el quale si chiama la area, multiplica la mita del diametro in la mita de la circunferentia. Como he in lo exemplo proposito, multiplica 11 per $3\frac{1}{2}$, ed aueray $38\frac{1}{2}$, e tanto cuntiene el predito circhio de li quadrati fatti de le parte del diametro, si como e manifesta in questa figura (Fig. 19).[2]

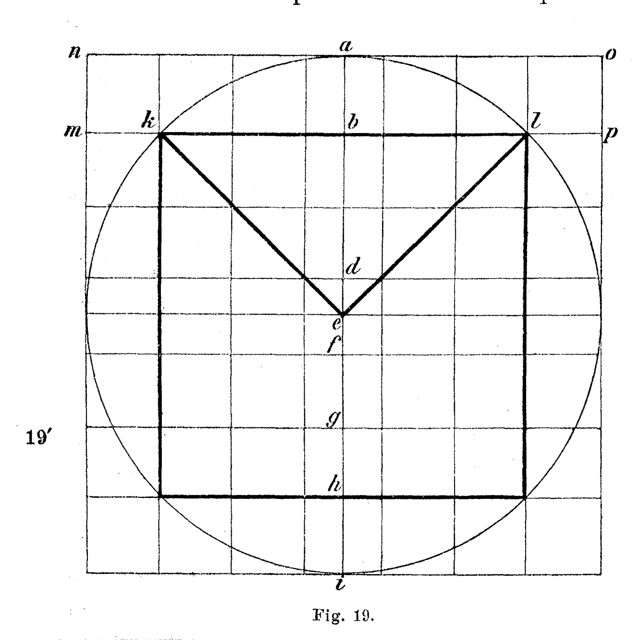


Fig. 19.

Per questo se cognose in quanto lo quadrato fatto del diametro auanza il circhio, perche el ditto, quadrato he 49, el circhio he $38\frac{1}{2}$, aduncha e lo $10\frac{1}{2}$.[3])

Ouero atrouaray larea | del circhio per questo modo piu facilmente, cioe multiplicaray el quadrato de la mita del diametro per $3\frac{1}{7}$.[4])

19'

quadrata *ac* et *ab* simul iuncta sint 25, si illa dempta fuerint de quadrato *bc*, quod est 36, remanent 11. Cum medietatem diviserimus per lineam *ac*, videlicet 5 cum $\frac{1}{2}$ per 4, et fient 1 et $\frac{3}{8}$, quod est linea *da*, et sic linea *dc* est 5 et $\frac{3}{8}$. Quam si multiplicaverimus per *ac*, que est 4, fient 21 cum $\frac{1}{2}$, que si diviserimus per lineam *bc*, que est 6, exiet in numero quotientis 3 et $\frac{7}{12}$, quod est linea *ec*, cuius quadratum, quod est 12 et $\frac{121}{144}$, cum demptus fuerit de quadrato *ac*, quod est 16, remanebit quadratum linee *ae*, quod est $3\frac{23}{144}$, cuius radix quadrata est 1 int. 46^{m} 39^{2a} 12^{3a} 36^{4a}, quod est minus quam 1 et $\frac{4}{5}$, quantitas videlicet linee *ac*. Cuius medietatem, que est 0 in integris 53ma 19^{2a} 36^{3a} 18^{4a}, cum multiplicaverimus per 6, videlicet per lineam *bc*, fiet ut prius, ut dicitur in libro mechanicorum, 5 int. 19ma 57^{2a} 38^{3a}, quod est intentum. Cum ergo practica illa sit levior quam ista, quam posui ex secundo geometrie Euclidis, ideo utendum est practica mechanicorum.

Zweiter Theil des zweiten Traktates.

Es bleibt mir noch übrig vom Kreise zu sprechen. Für ihn werde ich vier Aufgaben stellen.

Erste Aufgabe. Will man zuerst aus dem Durchmesser den Umfang erhalten, so vervielfache man den Durchmesser mit $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers. Enthält z. B. der Durchmesser des Kreises ai 7 Theile, so erhält man durch Multiplikation desselbem mit $3\frac{1}{7}$ den Umfang zu 22 Theilen (Fig. 18).[1]

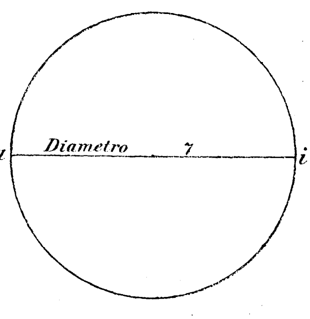


Fig. 18.

Zweite Aufgabe. Wünscht man die Fläche des Kreises oder den Raum zu finden innerhalb des Umfanges, den man Kreisinhalt nennt, so multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfangs. In dem vorgelegten Beispiele also multipliciere man 11 mit $3\frac{1}{2}$, dann erhält man $38\frac{1}{2}$, und soviel enthält der genannte Kreis von den Quadraten, welche über den einzelnen Theilen des Durchmessers gezeichnet sind, wie in nebenstehender Figur klar ist (Fig. 19).[2]

Daraus ersieht man auch, um wieviel das über dem Durchmesser errichtete Quadrat den Kreis übertrifft. Da dieses Quadrat 49 ist, der Kreis $38\frac{1}{2}$, so ist der Überschuss gleich $10\frac{1}{2}$.[3]

Oder man findet den Kreisinhalt viel leichter auf folgende Weise. Man multipliciere nämlich das Quadrat des Halbmessers mit $3\frac{1}{7}$.[4]

---

zusammen 25 betragen, dieses von dem Quadrate der bc, das gleich 36 ist, weg, so bleiben 11. Dividiert man hiervon die Hälfte durch die Gerade ac, nämlich $5\frac{1}{2}$ durch 4, so entsteht $1\frac{3}{8}$, das ist die Gerade da, und folglich ist die Gerade $dc = 5\frac{3}{8}$. Multiplicieren wir diese mit ac, das ist mit 4, so erhalten wir $21\frac{1}{2}$, und wenn dieses durch die Gerade bc, das ist durch 6, dividiert wird, so ergiebt sich als Quotient $3\frac{7}{12}$, das ist die Gerade ec. Nimmt man ihr Quadrat, das $12\frac{121}{144}$ beträgt, von dem Quadrate der ac, das ist 16, weg, so bleibt als Quadrat der Geraden ae $3\frac{23}{144}$ übrig. Die Quadratwurzel davon ist $1^g 46' 39'' 12''' 36''''$, das ist weniger als $1\frac{4}{5}$, nämlich der Betrag der Geraden ac. Ihre Hälfte, nämlich $0^g 53' 19'' 36''' 18''''$, multiplicieren wir mit 6, das ist mit der Geraden bc, so entsteht, wie oben nach dem Buche der Mechaniker gesagt ist, $5^g 19' 57'' 38'''$, was verlangt wurde. Da also jene Methode viel leichter ist, als diejenige, welche ich nach dem zweiten Buche der Geometrie Euklid's gezeigt habe, so muss man also die Methode der Mechaniker benutzen.

1) $U = 3\frac{1}{7}d = d\pi$. 2) $J = \frac{d}{2} \cdot \frac{U}{2}$.

3) $d^2 - J = 48 - 38\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$. 4) $J = r^2\pi$.

Tertia conclusio. Quando voray sapere la quantita de la portione minore cha mezo el circhio, multiplica lo archo de la portione per la quantitade de larea de tuto el circhio, e quelo, che ne vene, partilo per la quantitade de tutta la circunferentia, e da lo numero, che ne vegnera per la diuisione, remoue la quantita del triangulo fatto de duy semidiametri del ditto circhio e de la corda de la portione.[1] ¡Verbi gratia sia la portione, de la quale tu voy sapere la quantita, *kal* (Fig. 19), sia larcho suo $5\frac{1}{2}$; el quale multiplica per $38\frac{1}{2}$, e ne vegnera $211\frac{3}{4}$, el quale partilo per 22, et aueray $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2a}$, el quale serualo. Da questo aduncha diray sotrare la quantita del triangulo, el quale te insegnato si. Perche $5\frac{1}{2}$ e la quarta parte del circhio, adunque $2\frac{3}{4}$ sie lotaua parte, cunciosia cosa che tuto sia 22 in el proposito. Inpercio intra la tabula de seno cun la otava parte de 360, cioe cun 45^{gr}, e tolge el sino suo dritto, el quale e $42^{gr}\,25^{m}\,35^{2a}$. El qual multiplica per $3\frac{1}{2}$, che le $\frac{1}{2}$ del diametro, e quelo, che ne vene, partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la quale he $2^{gr}\,28^{m}\,20^{2a}$. E perche in questo chaso la linea *eb* e equale a la linea *bk*, inpercio aueray la linea *eb*, la quale e perpendichulare in del triangulo. Multiplica adunque la linea *bk* per la linea *be*, ed aueray 20 la quantitade del triangulo, | che circhato, secondo la dotrina de la prima conclusione de la parte precedente, la qual quantita sie $6^{gr}\,7^{m}\,32^{2e}$. La quale trala de quelo, che tu seruasse, cioe de $9^{gr}\,37^{m}\,30^{2e}$, et rimane $3^{gr}\,29^{m}\,58^{2e}$, el quale e la quantita de la portione, che se circhava.

Ma in di altri chasi, quando larcho de la portione non e precisamente la quarta parte del circhio, ma piu ouero meno, alora per hauere la linea *bk* fa cossi, come a zo ditto. Perche, se larcho de la portione sera 4, a respeto de tuta la circumferentia, la quale e 22, sige cunrespondera $65^{gr}\,27^{m}\,26^{2e}$, quando tuto el circhio sie 360^{gr}, e perche, per volere auere el sino del archo de la porcione del circhio proposito, bisogna cun la mitade de quelo, cioe $65^{gr}\,27^{m}\,16^{2a}$, intrare la tabula di sen, adunque intra in directo $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2a}$, e atroueray $32^{gr}\,26^{m}\,17^{2a}$, el qual multiplicalo per $3\frac{1}{2}$ como de prima, e quelo, che ne viene partilo per 60, et aueray la linia *bk*, la qual e $1^{gr}\,53^{m}\,32^{2e}$. Ma per la linia *eb* faray cossi: larcho, cun el quale tu intrasti la tabula di sen, cioe $32^{gr}\,43^{m}\,38^{2e}$, trallo de 90, e cun lo rimanente, el quale e $57^{gr}\,16^{m}\,22^{2e}$, intraray quela medesima tabula di sen, in directo di qualo tu atroueray $50^{gr}\,28^{m}\,29^{2e}$. El quali multiplica per $3\frac{1}{7}$, e quelo, che ne viene, partilo per 60 si como da prima, ed averay la linea *eb*, la quale e $2^{gr}\,56^{m}\,39^{2e}$.

---

1) Kreisabschnitt, dessen Bogen $= 2\alpha$, ist gleich $J \cdot \frac{2\alpha}{360} - r^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Dritte Aufgabe. Will man die Grösse eines Kreisabschnittes kleiner als der Halbkreis finden, so multipliciere man den Bogen des Abschnittes mit der Grösse der ganzen Kreisfläche und dividiere das Produkt durch die Länge des ganzen Umfanges. Von der Zah , welche durch diese Division entsteht, ziehe man dann den Inhalt des Dreiecks ab, das durch die beiden Halbmesser des gegebenen Kreises und durch die Sehne des Abschnittes gebildet wird.[1] Es sei z. B. der Abschnitt, dessen Grösse man berechnen will, kal (Fig. 19); der zugehörige Bogen sei $5\frac{1}{2}$. Ihn multipliciere man mit $38\frac{1}{2}$, so erhält man $211\frac{3}{4}$. Dieses durch 22 dividiert, ergiebt $9^0 37' 30''$; dies verwahre man. Hiervon, sagte ich, müsse man den Dreiecksinhalt abziehen, den man so erhält. Da $5\frac{1}{2}$ der vierte Theil des Kreises ist, so ist $2\frac{3}{4}$ der achte Theil, weil in unserem Beispiel der ganze Umfang gleich 22 ist. Nun gehe man also mit dem achten Theil von 360^0, das ist mit 45^0 in die Tafel der Sinus ein, und entnehme ihr seinen Sinus rectus. Derselbe ist $42^0 25' 35''$. Ihn multipliciere man mit $3\frac{1}{2}^0$, das ist mit dem Halbmesser, und theile das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade $bk = 2^0 28' 30''$. Da für unsern Fall die Gerade ab gleich der Geraden bk ist, so haben wir damit die Gerade ab, das ist die Höhe des Dreiecks. Man multipliciere also die Gerade bk mit der Geraden ba, so hat man den Inhalt des Dreiecks, den man sucht, gemäss der Lehre der ersten Aufgabe des vorhergehenden Theiles. Dieser Inhalt ist $6^0 7' 32''$. Nun ziehe man dies von dem Gemerkten ab, nämlich von $9^0 37' 30''$, dann bleiben $3^0 29' 58''$, das ist die Grösse des Abschnittes, den man suchte.

In andern Fällen aber, wenn der Bogen des Abschnittes nicht genau den vierten Theil des Kreises ausmacht, sondern mehr oder weniger, dann gehe man zur Ermittelung der Geraden bk so vor, wie ich es eben gesagt habe. Da, wenn der Bogen des Abschnittes gleich 4 ist, diesem im Verhältnis zum ganzen Umfange, der 22 beträgt, $65^0 27' 26''$ entsprechen, wenn der ganze Kreis 360^0 hat, und da man zur Bestimmung des Sinus des Bogens des vorgelegten Kreisabschnittes mit der Hälfte von $65^0 27' 26''$ in die Sinustafel einzugehen hat, so gehe man in diese mit $32^0 43' 38''$ ein, und findet dann in der nämlichen Zeile $32^0 26' 17''$. Das vervielfache man mit $3\frac{1}{2}$, wie oben, und dividiere das Ergebnis durch 60, so erhält man die Gerade bk, die gleich $1^0 53' 32''$ ist. Zur Bestimmung der Geraden eb aber gehe man so vor. Man ziehe den Bogen, mit welchem man in die Sinustafel einging, also $32^0 43' 38''$ von 90^0 ab, und gehe mit dem Reste, das ist mit $57^0 16' 22''$, wieder in die Sinustafel ein, dann findet man in derselben Zeile $50^0 28' 29''$. Das multipliciere man mit $3\frac{1}{2}$ und theile das Ergebnis durch 60, wie oben, so erhält man die Gerade $eb = 2^0 56'' 39''$. So hat man also gefunden, dass die Gerade $bk = 1^0 53' 32''$ und

E si ay, che la linea *bk* sie $1^{gr}\ 53^{m}\ 32^{2e}$, e la linea *eb* sie $2^{gr}\ 56^{m}\ 39^{2e}$ siando el diametro del circhio 7.

20' E se | tu traray de tuta larea del circhio la quantita de la minore portione za atrouata, rimanera la quantita de la mazore porcione.

Per questo se cognos, in quanta parte el quadrangulo fatto de la sagita de la portione del circhio e del diametro auanza la ditta portione. Ma la sagita el sino verso sie una medesima cosa, e perche in del primo chaso quela sagita, cioe *ab*, sie $1^{gr}\ 1^{m}\ 29^{2e}$, quando la multiplicarey per 7, aueray $7^{gr}\ 10^{m}\ 23^{2e}$, la quantita de tuto el quadrangulo *mnbapo*. Aduncha auanza la ditta portione in $3^{gr}\ 40^{m}\ 45^{2e}$.

Quarta conclusio. Quando tu saperay la proportione de doy circhuli, e tu voray sapere la proportione de li diametri, troua la radix quadrata de la proportione de li ditti circhuli. Exempli gracia se uno de li circhuli auanza laltro in 16, cioe che luno intra nel altro 16 volte, el diametro del mazore auanzara el minore in 4, cioe chel sera mazore 4 volte che laltro per diametro.[1])

Tertius Tractatus.

Mo per lo dio gracia diremo in questo terzo tratado de la mesura di corpi. Ma perche alcuni corpi sono regulari e alcuni inregulari, non diremo alcuna cossa de li segundi, cioe de li inregulari, cunçosiacossa che tra li corpi regulari alchuni siano non uniformalmente regulari, come 21 sono | le veze, e le piramide tronchate e non tronchate, et alchuni siano uniformalmente regulari, come he la spera, e lo chubo, e lo octoedron, e lo duodecedron, e lo incocedron, e la piramide de 4 basi triangulari equilateri, e la columna uniforme rotonda ouero laterata, e altri corpi uniformalmente regolari, io non diro de tuti, ma solamente de li seratili, e de le columne, e de le piramide, e de li chubi, e de le spere.

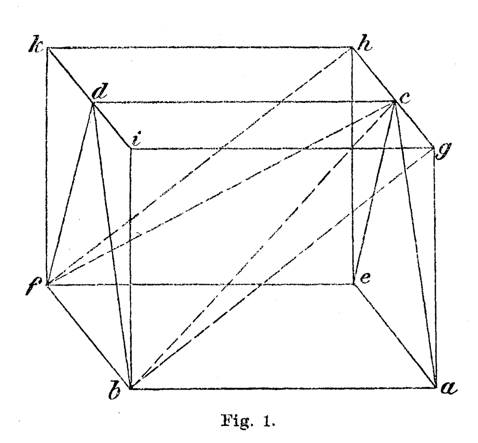


Fig. 1.

Prima conclusio. Quando tu hay lo seratile[2]) *aebfcd* (Fig. 1), del qual la basis quadrangulo *aebf* e la sumitade *cd*, aueray la portione *bfdc*. Compisse lo paralellogromo[3]) *abig*, *efkh*, cunçosiacosa adunque che el seratile parciale, cioe *gac*, *ibd* sia la mitade

die Gerade $eb = 2^0\,56'\,39''$ ist, wenn der Durchmesser des Kreises 7 beträgt.

Wenn man ferner den Betrag des kleinern Abschnittes, den man eben gefunden hat, von dem ganzen Kreisinhalte wegnimmt, so bleibt der Inhalt des grössern Kreisabschnittes übrig.

Durch diese Betrachtung erkennt man auch, um wieviel das von dem Pfeil des Kreisabschnittes und dem Durchmesser gebildete Rechteck besagten Abschnitt übertrifft. Pfeil und Sinus versus sind ein und dasselbe. Da nun im ersten Beispiele dieser Pfeil, das ist ab, gleich $1^0 1' 29''$ ist, so erhält man durch Multiplikation desselben mit 7 $7^0 10' 23''$, das ist der Gesamtinhalt des Rechtecks *mnbapo*. Es übertrifft also genannten Abschnitt um $3^0 40' 45'$.

Vierte Aufgabe. Kennt man das Verhältnis zweier Kreisinhalte und wünscht das Verhältnis der Durchmesser zu erhalten, so suche man die Quadratwurzel des Verhältnisses genannter Kreisinhalte. Wenn z. B. der eine den andern 16 mal übertrifft, das heisst, wenn der eine in dem andern 16 mal enthalten ist, so übertrifft der Durchmesser des grossen den des kleinern viermal, das heisst, er wird einen viermal so grossen Durchmesser besitzen als der andere.[1])

Dritter Traktat.

Nun werden wir mit Gottes Hilfe in diesem dritten Traktate von der Ausmessung der Körper reden. Da aber manche Körper regelmässig, andere unregelmässig sind, so wollen wir von der zweiten Art, das ist von den irregulären, nichts sagen. Obwohl unter den regelmässigen Körpern sich einige von nicht gleichförmiger Gestalt befinden, wie die Fässer und die abgestumpften sowie die nicht abgestumpften Pyramiden, andere aber gleichförmig regulär sind, wie die Kugel, der Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder, das Ikosaeder und die Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Flächen, die gleichförmig runde Säule oder die eckige und andere gleichförmig regelmässige Körper, so werden wir doch nicht von allen handeln, sondern nur von den dreiseitigen Prismen, den Säulen, den Pyramiden, den Würfeln und der Kugel.

Erste Aufgabe. Hat man das dreiseitige Prisma[2]) *aebfcd* (Fig. 1), dessen rechteckige Grundfläche *aebf*, die obere Kante aber *cd* ist, so erhält man das Stück *bfdc* so. Man vervollständige das Parallelepiped[3]) *abig*, *efkh*, so dass das Theilprisma, nämlich *gac*, *ibd*, die

1) $J : J_1 = d^2 : d_1{}^2$, also $d : d_1 = \sqrt{J} : \sqrt{J_1}$.

2) *Seratile* ist dreiseitiges Prisma, genaue Übersetzung des griechischen Wortes.

3) Parallelogromo ist hier offenbar durch Parallelepiped zu übersetzen.

de tuto el primo. Similmente el seratile *hec*, *kfd*. Quelo, che se disse de luno se dixe de laltro. Se adoncha del primo seratile uoray mouere la porcione *bfcd*, la quale e a ti ignota, tu la saueray per questo modo. Perche per la 28 conclusione del $\frac{1}{11}$ libro de UCLIDES[1]) la superficie *bfgeh* seca el parallelogramo fatte per mezo, ma per la sesta del $\frac{1}{12}$ libro[2]) el seratile parciale *fkd*, *che* e triplo a la piramide *hcef*, aduncha e sesquialtero al residuo, el qual e *hcfkd*. Ma quelo residuo e equale per quela
21′ medesima raxone a lo residuo del altro seratile parciale, cioe *cgbdf* | aduncha uno seratile parciale e subsesquitercio a li altri doy residui agiunti insiema. Aduncha queli agiunti insiema trali de la mita de tuto el parallelogramo, e rimagnera la porcione quesita, percio che de quela porcione e de li diti doy residuy se fa la mita del paralellogramo.

Acio che per demostracione numerale sia manifesto quelo, che se dice, la largeza de la basis del seratile, la quale sia *bf*, sia 4, la longeza, la qual sie *ae*, sia 16, e la largeza signata per la perpendichulare ducibile dal ponto *d* ad *bf* sia 5: adoncha *aebf* sie 64, e tuto el paralellogramo sie 320, e tuto el seratile 160, aduncha el parciale sie 80, de la quale la piramide sie $26\frac{2}{3}$, percio che la terza parte. Adoncha el residuo sie $53\frac{1}{3}$, ali quali 80 sie in proportione sexquialtera. Ma el doppio de quello residuo sie $106\frac{2}{3}$, el quale he a 80 in proporcione sexquiterzia. Tralo adoncha $106\frac{2}{3}$ de 160, resta $53\frac{1}{3}$, la quantitade de la porcione quesita, la quale somadamente parlando sie la terza parte del seratile.

Secunda conclusio. Ma quando fusse uno corpo in forma de secure ouero de cuneo, si como he el corpo *aec*, *bfd* (Fig. 2^a—2^b), ouero che piu propriamente se dise, seratile grosso in la superficie parte, del qualle la groseza sie *abcd*, ed in la inferiore parte strato, de lo qualle la sumi-
22 tade sie la linea *ef*, | e vole se taiare da quello la porcione transversale acommenzando dal ponto *a* descendo verso *f*, la quale porcione sia *acg*, *bdh*, taiando dal tutto

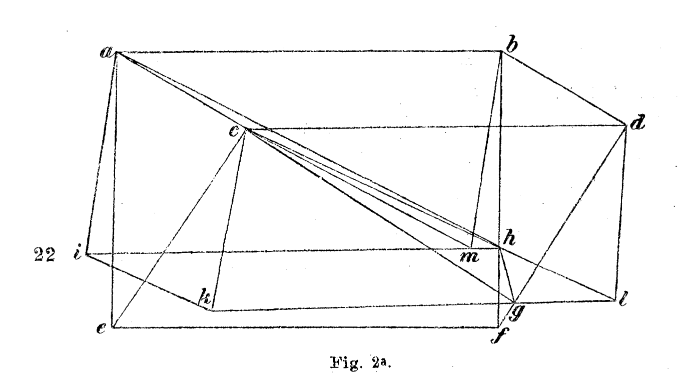


Fig. 2a.

1) EUKLIDES ed. CAMPANUS XI, 28: *Si superficies aliqua solidum parallelogramum super duas quaslibet oppositas superficies eius terminales et super has duas diametros secet, eandem superficiem corpus illud per equalia secare necesse est.*

Hälfte des ganzen ersten sei, ähnlich das Prisma *hec*, *kfd*. Was nämlich von dem einen gilt, gilt auch von dem andern. Will man also von dem ersten Prisma das Stück *bfcd*, das man nicht kennt, wegnehmen, so findet man es in folgender Weise. Da nach dem 28. Satze des 11. Buches Euklid's[1]) die Fläche *bfgch* das oben konstruierte Parallelepiped halbiert, nach dem 6. Satze des 12. Buches[2]) aber das Theilprisma *fkd*, *che* das Dreifache der Pyramide *hcef* ist, so ist sie also das Anderthalbfache des Restes, der *hcfkd* ist. Dieser Rest ist aber derselben Schlussfolgerung nach gleich dem Reste des andern Theilprisma, nämlich *egbdf*, folglich ist ein Theilprisma gleich drei Viertheil der beiden Reste zusammengenommen. Man ziehe also die Summe derselben von der Hälfte des ganzen Parallelepipeds ab, so bleibt der gewünschte Theil übrig, weil dieser Theil und die beiden besagten Reste die Hälfte des Parallelepipeds ausmachen.

Damit aber das Gesagte zahlenmässig klar werde, sei die Breite der Grundfläche des Prisma, die durch *bf* bezeichnet sei, gleich 4, die Länge, die *ab* heisse, sei 16, und die Höhe, welche durch das Loth gemessen wird, das man vom Punkte *d* auf *bf* fällen kann, sei 5, dann ist $aebf = 64$, und das ganze Parallelepiped ist 320, das ganze Prisma 160, das Theilprisma folglich gleich 80. Die Pyramide davon wird also $26\frac{2}{3}$ sein, da sie sein dritter Theil ist. Der Rest ist also $53\frac{1}{3}$, von welchem 80 das $1\frac{1}{2}$fache ist. Das Doppelte dieses Restes ist aber $106\frac{2}{3}$, was von 80 das $1\frac{1}{3}$fache ist. Man ziehe nun $106\frac{2}{3}$ von 160 ab, so bleibt $53\frac{1}{3}$ als Körperinhalt des gesuchten Stückes übrig, das ist, im Allgemeinen zu reden der dritte Theil des Prisma.

Zweite Aufgabe. Wenn aber der Körper die Gestalt eines Beiles oder eines Keiles hätte, wie der Körper *ace*, *bfd* (Fig. 2ᵃ und 2ᵇ) ist, oder, wie richtiger gesagt werden sollte, die eines Prisma, das im obern Theile stärker ist, dessen breiterer Theil *abcd* sei, im untern Theile zusammengezogen, wovon die Kante die Gerade *ef* sei, und man will von ihm ein Stück durch eine Transversalebene abschneiden, die im Punkte *a* anfängt und nach *f* zu absteigt, so sei dieses

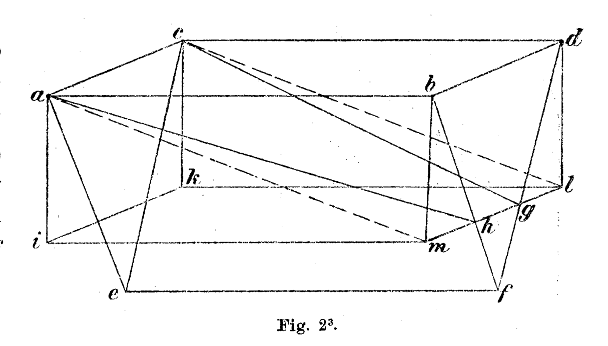


Fig. 2ᵃ.

2) Euklides ed. Campanus XII 6: *Omne corpus seratile in tres piramides equales basesque triangulas habentes est divisibile.*

mediante la superficie $acgh$[1]) e de porcione inregulare, perche la summitade sua sie la linea ac, a la quale sie opposita da la parte inferiore la linea gh minore, e da la parte superiore la linea bd equale. Elieno aduncha due linee opposite ah et cg equale, anchora due ab et cd. Adunque sopra la superficie dada $acdb$ driza el paralellogramo secondo lalteza de la linea bh, el quale sia $iklm$. Ma abi auertenzia che la linea hg sie parte de la linea lm, siche $mhgl$ e tuta una linea drita, ma per la disegnatione del solido in piano pareno esse 3 linee.[2]) Aduncha la mitade de questo paralellogramo sie el corpo bca, mdb per la 28ª del 11° libro de Uclides, el qual corpo e manifesto, per la qual cosa el tuto e anchora manifesto. Cunçosiacosa adunque, che per el presuposito la linea bh sia manifesta, et la linea mh sie la mitade del exceso de bd sopra hg, sera manifesta mb. Ma ele doe linee mb et hb sono in una superficie, in la quale la linea ab sta perpendicular secundo la 5ª del 11°, conçosiacosa che per la 6ª del 12° el seratile fatto sopra la superficie mbh segundo la alteza ab sie triplo a la piramide $hmba$, sera quela piramide 22′ manifesta. Ma quela e equale a la piramide $lgde$, | la quale col corpo da fir remouesto fa la mitade del paralellogramo predito. Rimoueste aduncha quele due piramide de la dita mitade de paralellogramo, rimane el corpo da fir remouesto de tute lo seratile. Ma saperay el seratile parciale multiplicando la superficie mbh per la linea ab.

De cholumnis.

Tertia conclusio. Aueray la quantitade de la columna uniforme, ouero laterata ouero rotonda, multiplicando la quantila de labas per la longeza de la columna. Como in la columna rotonda ab multiplica larea del circhio a per la linea ab; et in la laterata columna multiplica la superficie $hefg$ per la linea hd, et aueray intentum.[3])

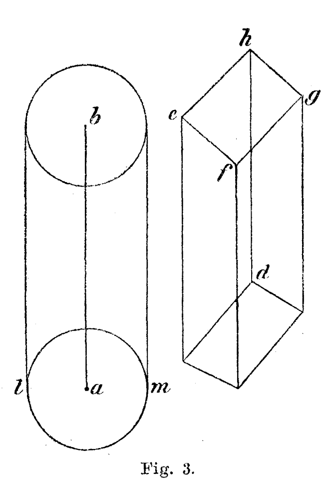


Fig. 3.

Quarta conclusio. A volere sapere la superficie de la columna rotonda, multiplica la circunferentia del circhio per la longeza de la columna.

Ma in la laterata multiplica la somma de tuti li ladi de labas per la longeza de la columna.

Como in la columna ab multiplica la circunferentia lm per la linea ab, et in la laterata multiplica la quantitade de

Stück acg, bdh von dem Ganzen abgeschnitten durch die Ebene $acgh$.[1]) Es ist aber ein unregelmässiges Stück, da seine obere Kante die Gerade ac bildet, welcher im untern Theile die kleinere Gerade gh gegenüberliegt, im obern Theile aber die ihr gleiche Gerade bd. Es sind also auch die beiden Gegenkanten ah und cg einander gleich, ebenso die beiden ab und cd. Nun errichte man über der gegebenen Fläche $acdb$ ein Parallelepiped von der Höhe der Geraden bh, das $abcd$, $iplm$ sei. Dabei beachte man aber, dass die Gerade hg ein Theil der Geraden lm ist, so dass $mhgl$ eine einzige gerade Linie ist, wegen Verzeichnung des Körpers in der Ebene scheinen es aber drei Gerade zu sein.[2]) Nun ist die Hälfte der Parallelepipeds der Körper bca, mdb nach Satz 28 des 11. Buches EUKLID's, dieser Körper ist aber bekannt, also ist auch der ganze bekannt. Da nun nach Voraussetzung die Gerade bh bekannt ist, und die Gerade mh die Hälfte des Überschusses der bd über die hg ist, so ist auch mb bekannt. Aber die beiden Geraden mb und hb befinden sich in einer Ebene, auf welcher die Gerade ab senkrecht steht nach dem 5. Satze des 11. Buches. Da nun nach Buch 12 Satz 6 das Prisma über der Fläche mbh und von der Länge ab das Dreifache der Pyramide $hmba$ ist, so ist auch diese Pyramide bekannt. Sie ist aber gleich der Pyramide $lgde$, die mit dem wegzunehmenden Körper zusammen die Hälfte des vorgenannten Parallelepipeds ausmacht. Nimmt man also jene beiden Pyramiden von der besagten Hälfte des Parallelepipeds weg, so bleibt der von dem ganzen Prisma abzuschneidende Körper übrig. Das Theilprisma aber erhält man, indem man die Fläche mbh mit der Geraden ab multipliciert.

Von den Säulen.

Dritte Aufgabe. Man erhält den Körperinhalt der gleichförmigen Säule, mag sie rund oder eckig sein, indem man den Inhalt der Grundfläche mit der Länge der Säule multipliciert. So multipliciert man z. B. für die runde Säule ab den Inhalt des Kreises a mit der Geraden ab, und in der eckigen Säule multipliciert man die Grundfläche $hefg$ mit der Geraden hd, so erhält man das Verlangte.[3])

Vierte Aufgabe. Um die Oberfläche der runden Säule zu finden, vervielfache man den Kreisumfang mit der Länge der Säule;

in der eckigen aber multipliciere man die Summe aller Seiten der Grundfläche mit der Länge der Säule.

In der Säule ab z B. multipliciere man den Umfang lm mit der Ge-

1) Es ist also ein schief abgeschnittenes Prisma zu bestimmen.

2) Wir haben in Fig. 2^a die Figur LEONARDO's gegeben, während Fig. 2^b die richtige Gestalt giebt. 3) $V = g \cdot h$.



4 linee, cioe *eh*, *hg*, *gf*, *fe*, per la linea *dh*, et aueray intentum (Fig. 3).[1])

De piramidibus.

Quinta conclusio. Se voray la quantita de la piramide equialta, si como e de la columna, toglie la terza parte de la columna. Si como e in la colomna *ab*, se voray sapere la piramide *lam*, sapi chele la terza parte de la colonna *ab*, et in la colomna laterata semelmente la piramide *nko* e la terza parte de la dita colomna (Fig. 4).[2])

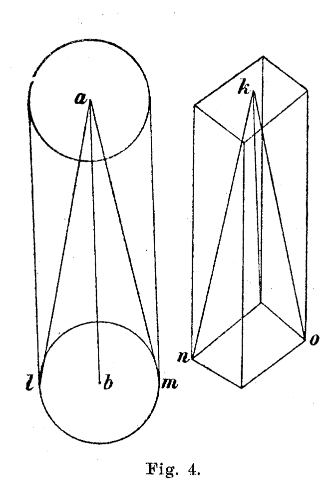


Fig. 4.

Sexta conclusio. Ma quando tu voray la superficie de la piramide, sapi, che secundo la opinione de alcuni ela e la mitade de la superficie de la colomna. Ma questo non e vero, perche ele necessario, che la superficie de la piramide sia mazore cha la mitade de la superficie de la colomna, cunçosiacosa, che la ypotemissa[3]) sia mazore cha lo asale. Tu aueray adunque la quantitade de la superficie proponuda per questo modo, ouero che la colomna laterata, ouero chele rotunda. Sele laterata, multiplica la mita del lado de la basis per la ypotemissa, ed aueray la superficie triangulare de la alteza de la piramide. Et cosi per rispetto de tutti li ladi de la bassis. Como se de la colomna trilatera la basis *abf* (Fig. 5) area sia ped. $5 \cdot 11^{m} \cdot 46^{2a}$, perche la perpendichulare *fe* sie pe. 3, e cescaduno de li ladi de la bassis sie pe. $3 \cdot 27^{m} \cdot 50 \cdot 45 \cdot 56 \cdot 44$, | e sia *d* el centro del circhio da fir fatto circha la bassis, e sia la linea *de*, la alteza de la colomna, 4 p^{e}, conçosiacosa adunque che per la 8^{a} dell 3° la linea *cd* sia pe. 1, sera la ypotemissa *ce* pe. $4 \cdot 7^{m} \cdot 23^{2a}$. Multiplica adunca *ce* per *ac*, et aueray la superficie proponuda *aeb*, la qualle e pe. $7 \cdot 8^{m} \cdot 27^{2a}$. Adunque la superficie quadrangula de la columna sie pe. $13 \cdot 5^{m} \cdot 23^{2a}$: adunque la linea *ae* e equalle a la linea *be*, auegnandio che in questa solla figura non appare a loghio per la discripsione del corpo in piano.

23'

Ma quando la columna sie rotunda, descrive uno circhio, del

1) $O = U \cdot h$. 2) $J = \frac{g \cdot h}{3}$.

3) Unter Hypotenuse versteht er die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Höhe der Pyramide, die andere Kathete

raden ab; in der eckigen multipliciere man den Betrag der vier Geraden, nämlich eh, hg, gf, fe mit der Geraden dh, so erhält man das Verlangte (Fig. 3).[1])

Von den Pyramiden.

Fünfte Aufgabe. Will man den Inhalt einer Pyramide finden, die ebenso hoch ist als die Säule, so nehme man den dritten Theil der Säule. Will man so z. B. für die Säule ab die Pyramide lam bestimmen, so weiss man, dass sie der dritte Theil der Säule ab ist, und für die eckige Säule ist die Pyramide nok in ähnlicher Weise der dritte Theil genannter Säule (Fig. 4).[2])

Sechste Aufgabe. Will man aber die Oberfläche der Pyramide bestimmen, so wisse man, dass nach der Meinung einiger sie die Hälfte der Oberfläche der Säule ist. Das ist aber nicht richtig, da die Oberfläche der Pyramide nothwendigerweise grösser sein muss als die Hälfte der Oberfläche der Säule, da ja die Hypotenuse[3]) grösser ist als die Seitenlinie. Man erhält nun den Werth der vorgelegten Oberfläche in folgender Weise, mag sie eckig oder rund sein. Ist sie eckig, so multiplicere man die Hälfte der Seite der Grundfläche mit der Hypotenuse, so erhält man die dreiseitige Fläche der Höhe der Pyramide, und so verfährt man für alle Seiten der Grundfläche. Wenn etwa der Inhalt der Grundfläche abf der dreiseitigen Säule (Fig. 5) 5 Fuss 11′ 46″ wäre, weil die Höhe $fc = 5$ Fuss und jede der drei Seiten der Grundfläche gleich 3 Fuss 27′ 50″ 45‴ 56^{IV} 44^{V} ist, und es wäre d der Mittelpunkt des um die Grundfläche beschriebenen Kreises, und die Gerade de, das ist die Höhe

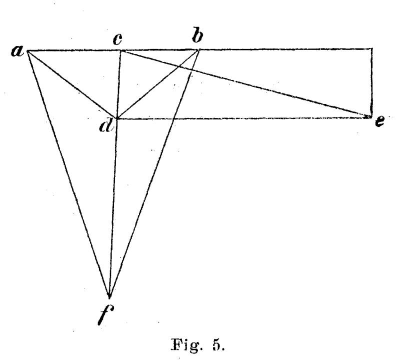


Fig. 5.

der Säule, 4 Fuss, so muss, da nach Satz 8 des 3. Buches die Gerade cd 1 Fuss beträgt, die Hypotenuse $ce = 4$ Fuss 7′ 23″ sein. Man multipliciere also ce mit ac, so erhält man die verlangte Oberfläche aeb, die dann 7 Fuss 8′ 27″ ist. Die vierseitige Fläche der Säule ist 13 Fuss 5′ 23″, da die Gerade ae gleich der Geraden be ist, obwohl das in in der Figur dem Auge nicht so erscheint wegen der Zeichnung des Körpers in einer Ebene.

Ist aber die Säule rund, so beschreibe man einen Kreis, dessen

---

aber das von dem Fusspunkte derselben auf eine Grundflächenkante gefällte Loth ist.

quale el semidiametro sia la predita ypotemissa, fato lo centro c (Fig. 7). Da poy de la circonferencia sua tagliandone tante parte, quante sono in la circunferencia del circhio de la abassis de la colomna, tira dal centro c due linie drite, le quale vada in fine a larco tolto, ed aueray el sectore del circhio el quale tu circhi. La quantita del quale tu saueray per la 3^a conclusione de la seconda parte del secundo tratado de questa opera. Tu saperay adunque quelle parte per questo modo. Multiplica 360 per la circonferencia del circhio de la

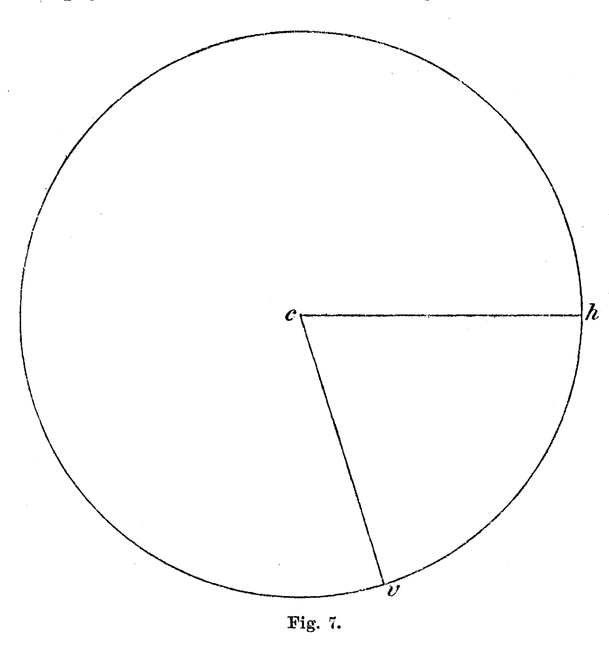


Fig. 7.

bassis, e quelo, che ne viene, partilo per la circumferentia del circhio descripto secondo la ypotemissa[1]), ed aueray li gradi del archo av, el qual e $87^{gr}18^{m}49^{2e}$, ali quali correspondera pe. $6 \cdot 17 \cdot 9$, perche li sono equali a lo archo av. Ma la circonferentia de tuto questo circhio grando sie pe. $25 \cdot 54 \cdot 59$, e lo semidiametro sie pe. $4 \cdot 7 \cdot 23$, adunque aueray lo sectore ave, lo qual he la superficie de la piramide, cioe $12^{pe} \cdot 56 \cdot 56$. 24 Per la qual cosa si como e tuto larcho | a le parte, cosi e tuto lo circhio a la sectore, aduncha la superficie de la colomna sie pe. $25 \cdot 8 \cdot 26$, de la quale non e proporcione dupla al sectore.

Septima conclusio. Seguita per la 5^a conclusione, che tu saperay la

1) Hier fährt der lateinische Text von 303 abweichend so fort: vel, quia circumferentia basis columne $afcgek$ est 6 pedum $17^m 9^{2a}$, quia semidiameter est 2 pedum, et altitudo columne est sicut prius 4 pedum, et semidiameter circuli describendi 4 pedum $28^m 20^{2a}$, ergo circumferentia sui circuli erit 28 pedum $6^m 38^{2a}$. De qua accipies 6 pedes $17^m 9^{2a}$, ubi pone a, n, et habebis ane, qui est superficies pyramidis, videlicet 14 pedum $3^m 21^{2a}$. Superficies vero columne est 25 pedum $9^m 24^{2a}$, cuius non est proportio dupla ad sectorem. Ut autem facilius capias illas partes, multiplica 360 per 6 pedes $17^m 9^{2a}$, et proveniens divide per 28 pedes $6^m 38^{2a}$, et habebis $80^{gr} 29^m 54^{2a}$ de circumferentia circuli ane, ipsum dividendo per 360.

Halbmesser die genannte Hypotenuse ist, indem man c als Mittelpunkt benutzt (Fig. 7). Dann schneide man von seinem Umfange soviele Theile ab, als in dem Umfange der Grundfläche der Säule enthalten sind, und ziehe vom Mittelpunkte c zwei gerade Linien, die nach den Endpunkten des abgeschnittenen Bogens gehen, dann erhält man den Kreisausschnitt, den man sucht. Seine Grösse findet man nach der 3. Aufgabe des zweiten Theiles des zweiten Traktates dieses Werkes. Man findet also diesen Theil auf folgende Weise. Man multipliciere 360^0 mit dem Kreisumfange der Grundfläche und theile das Ergebnis durch den Umfang des Kreises, der mit der Hypotenuse beschrieben ist[1]), so erhält man dadurch die Grade des Bogens hv; er ist $87^0\,18'\,49'$, ihm entsprechen 6 Fuss $17'\,9''$, da sie dem Bogen hv gleich sind. Der Gesamtumfang des grossen Kreises aber ist 25 Fuss $54'\,59''$, und der Halbmesser ist 4 Fuss $7'\,23''$, also erhält man den Sektor hvc, der die Oberfläche der Pyramide darstellt, zu 12 Fuss $56'\,56''$, denn, wie sich der ganze Umfang zu seinem Theile verhält, so verhält sich der ganze Kreis zu dem Ausschnitt. Nun ist die Oberfläche der Säule 25 Fuss $8'\,26''$, und ihr Verhältnis zum Ausschnitt ist also nicht das von $2:1$.

Siebente Aufgabe. Aus der 5. Aufgabe folgt, dass man den Theil der Pyramide kennen wird, wenn man nur den Schnittpunkt der Axe oder der Seite der Pyramide kennt, und zwar auf folgende Weise, nämlich für die Säule $bche$, wenn ihre Pyramide aeh im Punkte i durch die Ebene pd

---

1) Übersetzung des lateinischen Textes (derselbe findet sich so übrigens nur in dem Cod. Bonc. 303): oder, weil der Umfang der Grundfläche der Säule $afcgek$ (Fig. 6) gleich 6 Fuss $17'\,9'''$ ist, da der Durchmesser 2 Fuss beträgt, die Höhe der Säule aber wie früher 4 Fuss misst, und der Durchmesser des zu beschreibenden Kreises 4 Fuss $28'\,20''$, so ist der Umfang des zugehörigen Kreises 28 Fuss $6'\,38''$. Von ihm schneide man 6 Fuss $17'\,9''$ ab, und bezeichne denselben mit hv (Fig. 7), so erhält man hvc, das ist die Oberfläche der Pyramide, gleich 14 Fuss $3'\,21''$. Die Oberfläche der Säule ist aber 25 Fuss $9'\,24''$, und sie steht nicht zu dem Sektor im doppelten Verhältnis. Damit man aber die fraglichen Theile leichter erhalten kann, multipliciere man 360 mit 6 Fuss $17'\,9''$ und theile das Ergebnis durch 28 Fuss $6'\,38''$, so erhält man $80^0\,29'\,54''$ von dem Umfange des Kreises hvc, wenn man ihn in 360 Theile theilt.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Werthe des italienischen Textes die richtigen sind. So ist z. B. die Hypotenuse gleich $\sqrt{17}$, und das ist 4 Fuss $7'\,23''$ und nicht 4 Fuss $28'\,20''$, wie der lateinische Text sagt, u. s. w.

Fig. 6.

porcione de la piramide, domente tu sapi el logo de la sectione de lo axalle ouero del lado de la piramide per si facto modo. Cioe in la cholomna *bche*, quando la sua piramide *aeh* sera tajada in del ponto *i* per la superficie *pd*, ouero in del ponto *k* per la superficie *kg* (Fig. 8). Ma se e taiada in del ponto *i*, fa la columna secunda la bassis *kl* e secondo *ai*, la qual columna e tripla a la piramide *lak*, el se sauera etiamdio el residuo de la piramide, el quale sie *lehk*. Ma quando quella piramide fosse taiada in *k*, sapi prima el za ditto residuo, possa fa la columna secondo *kl* e secondo la longeza *if*, la quale sie *lkgm*, la quale trala del prefato residuo, et aueray la porcione *kgh* et *lem*.[1])

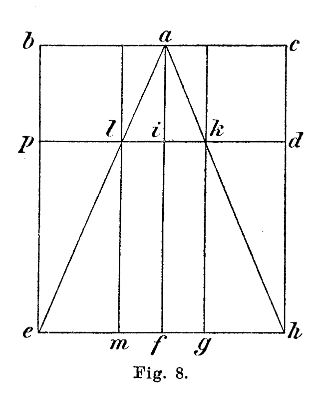


Fig. 8.

Octava conclusio. Ma quando el fosse proponudo una piramide tronchada, compise la quela, e alora primamente saueray quela per la 4ª conclusione, e le soue doue parte, ouero porcione per la 7ª conclusione. Como e, sel fosse proponudo una piramide tronchata *abcd*, de la quale el minore lado sia *bc*. Tira tuti doy li ladi equali *ab* et *dc* fino che li concurrano in *e*. | Tu saueray primamente la quantitade de tuto lo assalle de la piramide in questo modo. Dal ponto *b* mena la perpendichulare *bf* a la bassis *ad*, et lo luogo, onda lo asale taia el lado *bc* sia *h*, conçosiacosa che *bf* sia equale ad *hg*. Similmente *bh* e equale ad *fg*, e rimane *af* manifesta. Multiplicha adonche *bf* per *ag*, e quelo, che ne vene, partilo per *af*, et haueray *eg*, et per consequente *he*. Driza adunque due parciale colomne sopra *bc*, una da la parte *e*, e laltra da la parte *g*, et procede, como e dito in la prefata conclusione.[2])

24′

E per questo seguita, che la pratiche de molti sie falace e de demostracione ignara, la quale dice, che la piramide si tronchata se mesura ad questo modo. Cioe in la piramide *agdb* (Fig. 10) conziosacosa chel lado *gd* auanza el lado *ab*, tu doy agiugnere la mitade del excesso a quello *ab*, aciochel se faza una linia *ca* et *bh*, et alora la colomna fatta segondo *ch* et secondo la longeza, la quale e *an*, e equale a la proposita

1) Der erste Körper ist also eine abgestumpfte Pyramide, der zweite entsteht durch Ausbohrung dieses Restkörpers mit einem geraden Cylinder.

2) Leonardo berechnet also die abgestumpfte Pyramide stets als Differenz der vervollständigten Pyramide und der von ihr abgeschnittenen Spitze. Er verwandelt dabei jede dieser Pyramiden in eine gleich hohe Säule. Der Bestimmung der Grundfläche derselben ist die neunte Aufgabe gewidmet. Dabei zeigt er,

geschnitten wird, oder im Punkte *k* durch die Fläche *kg* (Fig. 8). Wird sie zuerst im Punkte *i* geschnitten, so bilde man die Säule für die Grundfläche *kl* und die Höhe *ai*. Diese Säule ist das Dreifache der Pyramide *lak*, und man wird dadurch auch den Rest der Pyramide kennen, der *lehk* ist. Wird aber die Pyramide im Punkte *k* geschnitten, so kennt man zunächst den schon gefundenen Restkörper. Nachher bilde man die Säule über *kl* und für die Länge *if*, die *lkgm* sein wird. Sie ziehe man von dem vorhergefundenen Restkörper ab, so erhält man dadurch den Theil *kgh*, *lem*.[1])

Achte Aufgabe. Ist aber eine abgestumpfte Pyramide vorgelegt, so vervollständige man sie. Dann kennt man diese nach Aufgabe 4 und ihre beiden Theile nach Aufgabe 7. Wäre z. B. die abgekürzte Pyramide *abcd* vorgelegt (Fig. 9), deren kleinere Seite *bc* sei, dann verlängere man beide gleiche Seiten *ab* und *dc*, bis sie sich in *e* treffen. Erstens kennt man dann die Länge der ganzen Axe der Pyramide folgendermaassen. Vom Punkte *b* fälle man das Loth *bf* auf die Grundfläche *ad*; der Punkt, in welchem die Axe die Seite *bc* schneidet, sei *h*, so dass $bf = hg$ ist. Ebenso ist $bh = fg$, und es bleibt *af* als bekannt übrig. Nun multipliciere man *bf* mit *ag* und dividiere das Produkt durch *af*, so erhält man *eg* und folglich auch *he*. Nun beschreibe man zwei Theilsäulen über *bc*, eine nach *e* zu, die andere nach *g*, und verfahre weiter, wie in der vorigen Aufgabe gezeigt ist.[2])

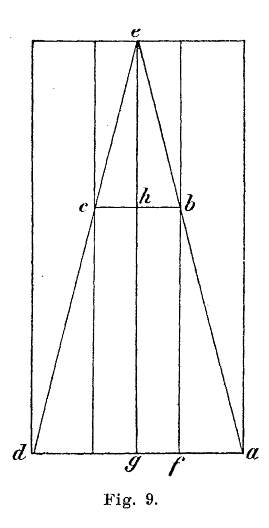


Fig. 9.

Daraus folgt, dass das Verfahren Vieler falsch ist und unbeweisbar, das so lautet. Die abgestumpfte Pyramide werde in folgender Weise gemessen, dass man nämlich für die Pyramide *agdb* (Fig. 10), wenn die Seite *gd* die Seite *ab* übertrifft, die Hälfte des Überschusses zu *ab* hinzufügen soll, so dass sie eine gerade Linie *cabh* ausmachen, dann sei die Säule über *ch* nach der Länge *an* gleich der vorgelegten Pyramide, und ich be-

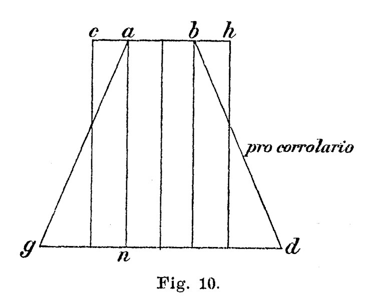


Fig. 10.

---

dass das bis dahin im Mittelalter benutzte Verfahren, das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen als diese Grundfläche zu benutzen, unrichtig ist.

piramide. Et io dicho, che questo sie falso, inpercio anetero la 9ª conclusione per veraxe praticha.

Nona conclusio. Parti la piramide tronchata per la sua longeza, e alora circha el numero quociente procede in questa forma. Percio che se lo abassis maiore de la piramide proponuda sera quadrata, alora la radice quadrata del dito numero quociente sera el lado tetragonico del abasis de la colomna da fir fatta per la multiplicatione del basis quadrata per la longeza. Ma sel abasis de la piramide proponuda sera de altra figura, ouero lateratra, ouero
25 rotonda, alora la radice quadrata | de la proporcione de quella abasis de la piramide proponuda, ouero del diametro suo ali ladi, ouero el diametro del abasis de la piramide significata per el numero quociente preditto. Verbi gratia in la piramide *nofd* (Fig. 11), del quale la longeza *pa* sia 14, la linea del abasis *nao* sia 10, la linea minore del abasis, cioe *dpf* sia 4, conçosiacosa che segunda la arte de la 8ª conclusione sia lo axale de la piramide compiuta cioe *hpa*, $23\frac{1}{3}$. Se la linea *nao* sera el lado tetragonico, el suo quadrato fera 100, el quale multiplicato per la linea *hpa* fira la columna $2333\frac{1}{3}$. Adunque tuta la piramide sie $777\frac{7}{9}$. Ma la linea *dpf* sie 4, adunque la basis parciale de la piramide, cioe *hdf*, sera 16. Ma la linea *ph* e $9\frac{1}{3}$, adunca la colomna fatta sopra *dpf* segondo la longeza *ph* est $149\frac{1}{3}$, adunque la piramide parciale, cioe *hdf* sie $49\frac{7}{9}$. Adunque tuto el residuo, el quale he la piramide tronchata proponuda, sia 728. Ma le manifesto segondo la via di li altri, de la quale he dito in del corolario, quela piramide tronchata serane 686, el quale sia falso, si como he manifesto per la praticha demostracione, la quale io fo. Sia adunque lasato el processo de quelli. Cumplando aduncho el processo de la praticha, la quale

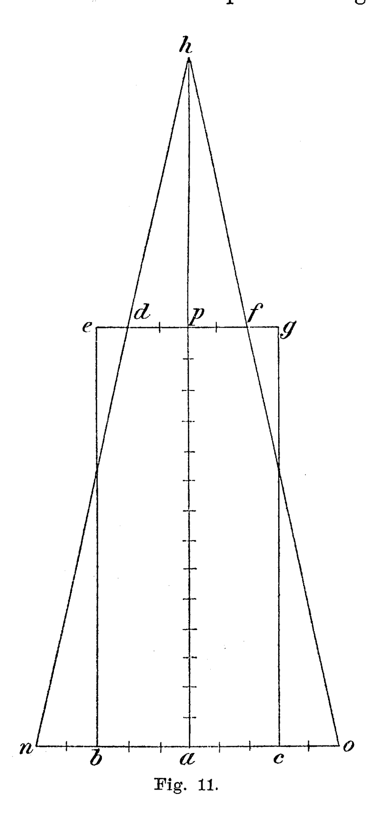


Fig. 11.

io ho commenza, partisse 728 per la linea *pa*, chi e 14, si viene in del numero quociente 52, chi e la abasis de la cholumna da fir fatta sopra *bac*. E
25′ perche nel calchulo za fatto se supone, che la dita bassis sia quadrata, tratta | inpercio la radice quadrata de 52, sie 7 e uno pocho piu cha $\frac{1}{5}$. Ele 7 integri e $12^{m}39^{2e}52^{3e}36^{4e}$, et si la linea *bac* sie nel proposito $7\frac{1}{5}$. Ma segundo

haupte, dass dies falsch ist, weshalb ich die neunte Aufgabe mit dem richtigen Verfahren hinzufüge.

Neunte Aufgabe. Dividiere die abgestumpfte Pyramide durch ihre Höhe und verfahre mit dem Quotienten in folgender Weise. Wenn die grössere Grundfläche der vorgelegten Pyramide ein Quadrat ist, so ist die Quadratwurzel aus obigen Quotienten die Quadratseite der Grundfläche derjenigen Säule, welche aus der Multiplikation der quadratischen Grundfläche mit der Höhe entsteht. Ist aber die Grundfläche der Pyramide von anderer Gestalt, entweder vieleckig oder rund, dann ist sie die Quadratwurzel des Verhältnisses der Grundfläche der gegebenen Pyramide oder des Durchmessers zu den Seiten oder dem Durchmesser der Grundfläche der Pyramide, die durch den obigen Quotienten bezeichnet wird. Z. B. für die Pyramide $nofd$ (Fig. 11), deren Länge $pa = 14$, die Basislinie $nao = 10$, die Seite der kleinern Grundfläche $dpf = 4$ wäre, da nach Anweisung der 8. Aufgabe die Axe der ganzen Pyramide, nämlich hpa, gleich $23\frac{1}{2}$ ist. Ist die Gerade nao Seite eines Quadrates, so beträgt ihr Quadrat 100; das multipliciere man mit hpa, so entsteht die Säule gleich $2333\frac{1}{3}$, also ist die ganze Pyramide $777\frac{7}{9}$. Die Gerade dpf aber ist 4, also ist die Grundfläche der Theilpyramide hdf gleich 16, die Gerade ph aber ist $9\frac{1}{3}$, also ist die Säule über dpf und von der Länge ph gleich $149\frac{1}{3}$, folglich ist die Theilpyramide, nämlich hdf, gleich $49\frac{7}{9}$. Der Gesamtrest, das ist die abgestumpfte Pyramide, ist also 728. Nach dem Verfahren der andern aber, von dem ich in dem Zusatze gesprochen habe, wäre offenbar diese abgekürzte Pyramide gleich 686, was falsch ist, wie ich durch mein Verfahren praktisch bewiesen habe. Dieses Verfahren ist daher zu verwerfen. Um nun das Verfahren, das ich angefangen habe, zu vollenden, theile man 728 durch die Gerade pa, das ist durch 14, so kommt im Quotienten 52, das ist die Grundfläche der Säule, welche über bac zu errichten ist. Da nun in der bis jetzt geführten Rechnung vorausgesetzt wurde, die fragliche Grundfläche sei ein Quadrat, so ziehe man deshalb die Quadratwurzel aus 52; sie ist 7 und ein klein wenig mehr als $\frac{1}{5}$. Sie beträgt nämlich 7 Ganze $12'39''53'''36''''$, und es ist folglich für unsern Fall die Gerade $bac = 7\frac{1}{5}$. Nach dem andern Verfahren wäre sie aber nur 7, was falsch ist. Nun errichte man über der Grundfläche bac und von der Höhe ap die Säule $begc$, so ist diese gleich 728.

Hat aber die vorgelegte Pyramide keine quadratische Grundfläche, sondern solche von anderer Figur, wie rechteckig oder vieleckig und un-



li altri la sarebe solamente 7, el quale he falso. Adoncha sopra la bassis bac secondo la longeza ap se fa la cholumna $begc$, la quale ha 728.

Ma se la piramide proponuda non hauesse la abassis quadrata, ma de altra figura, como he quadrangula ouero multilatera e de ladi inequali, ouero circhulare, perche el se supone, che la basis de la piramide proponuda sia 100, la bassis adunque de la columna da fir cunstituita sopra bac sie 52, alora perche la radice quadrata de la proportione de 100 a 52 e si como 10 a $7\frac{1}{5}$ ultra la modicha parte, como e ditto di sopra, sera la proporcione de la linia nao a la linea bac, si como he 10 a $7\frac{1}{5}$, ouero che quele doe linee siene diametri ouero ladi del abassis de la figura multilatera de li ladi equali ouero inequali, percio che cescaduno lado del abassis proponuda se auera al suo relatiuo lado del abassis de la colomna da fir descripta sopra bac si como 10 a $7\frac{1}{5}$.

Decima conclusio. Tu mesuraray una veza in questo modo. Prima mesura una mitade in longeza secondo larte dita in la prossima conclusione 9ª, et per quello medesimo modo mesuraray laltra mitade como in questo exemplo. Mesura prima la mitade $abde$ (Fig. 12), secundariemente mesura $bcef$. Ma intendi, que questo non | he totalmente vero, se la linia ab non sia drita, e similmente bc, per quelo simelo modo de li opositi. Percio che, se le sono curue, ouero che abc sia uno archo ouero 2, similmente de li opositi, sarebe bisogna far per altro modo, massimamente se li fosse archi de circhulo pizolo, si che y fusseno molti arcuati. Ma quando non sono molto arcuati, ma quasi dritti, non ge gran forza.

26

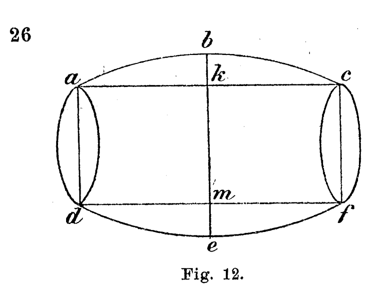


Fig. 12.

Item in questa conclusione e in la precedente non he gran forza, quando el diametro de la mitade non excede molto el diametro de la extremitade. Alora se puo fare secondo li altri, auegnadio chel non habia ueritade, ma mancha pocho de la veritade. Cunçosiacosa aduncha, che la linia abc sia ouero uno circhio, ouero doy, fossi non he regula de trouar la vera mesura per la sua inregularitade ouero deformitade.

Undecima conclusio. Ma quando la veza ouero la piramide rotonda zase, per hauere la continentia de quella in uno lado, sie questa conclusione. Prima in la veza, che zaxe equidistante al orizonte, se ab et bc non serano sensibilmente curui, perche alora per la sua deformitade non se hauerebe la veritade (Fig. 12), parti quello ac per mezo in b,

gleichseitig, oder kreisförmig, so wird, weil vorausgesetzt ist, dass die Grundfläche der Pyramide 100 ist, die Grundfläche der über *bac* zu errichtenden Säule gleich 52 sein. Da nun die Quadratwurzel des Verhältnisses von $100:52$ gleich $10:7\frac{1}{5}$ ist, unter Vernachlässigung des kleinen Theiles, wie oben gesagt ist, so wird das Verhältnis der Geraden *nao* zur Geraden *bac* auch wie $10:7\frac{1}{5}$ sein, mögen diese beiden Geraden Durchmesser sein, oder Seiten der Grundfläche der vieleckigen Figur von gleichen oder ungleichen Seiten, weil jede Seite der vorgelegten Grundfläche zu ihrer entsprechenden Seite der über *bac* zu errichtenden Säule sich wie $10:7\frac{1}{5}$ verhalten wird.

Zehnte Aufgabe. Ein Fass wird in folgender Art gemessen Zunächst messe man in der Länge eine Hälfte nach dem Verfahren, das wir in der eben vorhergehenden Aufgabe gelehrt haben, und darauf messe man nach derselben Methode die andere Hälfte, wie z. B. in dem folgenden Beispiele (Fig. 12). Man messe hier zuerst die Hälfte *abed*, zweitens messe man dann *bcfe*. Wohlverstanden, dass das nicht ganz richtig ist, wenn die Linie *ab* keine Gerade ist, und ebenso *bc*, in derselben Weise auch die gegenüberliegenden Seiten. Denn wenn sie gekrümmt sind, so dass *abc* aus einem Bogen besteht oder aus zweien, und ähnlich für die Gegenseite, so muss man auf andere Weise vorgehen, besonders dann, wenn es Bogen von kleinen Kreisen sind, so dass sie sehr stark gekrümmt sein würden. Sind sie aber wenig gekrümmt, sondern fast gerade, so hat das keinen grossen Einfluss. Ebenso hat es in dieser und der vorhergehenden Aufgabe wenig Einfluss, wenn der Mitteldurchmesser den Durchmesser der Endfläche nur wenig übertrifft. Dann ist es erlaubt nach dem Verfahren der andern vorzugehen, denn wenn es auch nicht genau ist, so fehlt doch nicht viel an der Wahrheit. Denn wenn die Linie *abc* entweder ein Kreisbogen ist, oder aus zweien besteht, so lässt sich wahrscheinlich keine Regel geben, um das wirkliche Maass zu finden, wegen ihrer Unregelmässigkeit und abweichenden Gestalt.

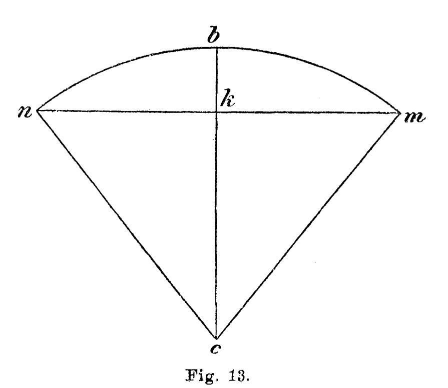


Fig. 13.

Elfte Aufgabe. Wenn aber das Fass oder der Kegel liegt, folge hier zur Bestimmung des Inhalts für eine Seite die Aufgabe. Sind zunächst in dem parallel dem Horizonte gelagerten Fasse *ab* und *bc* nicht stark gekrümmt, weil man sonst wegen der abweichenden Gestalt die Wahr-

simelmente lo oposito in *e*, e sia menato *be*, chi seca *ac* in *k* et *df* in *m*. Alora secondo la longeza *kc* e la largeza *bk* sia fatta la porcione de la 26′ colomna rotonda, de la quale la abassis sie de questa figura. Si che la | linea *bk* in figura de la veza (Fig. 13) tenga el locho del sino verso ouero de la sagita, e la linea *mkn* si tenga el loco de la porcione del circhio maiore in la largeza ouero in la groseza de la veza. Ma la alteza de la porcione de la colomna sie *kc*, de la quale porcione la terza parte he la continencia *bkc*. Ma in la piramide rotonda, chi zase segondo la sua longeza, siche el suo axale sia equidistante al orizonte, chomo he in la piramide *ade* (Fig. 14), piu veramente le hauera la continentia de la sua porcione, cioe *abc*, perzo che la linea *ac* he drita, adonque etiamdio la sua abasis, che consimile a la figura inmediatamente ditta, cioe *nbmc*.

Ma perche quello, che ditto in la conclusione 11ª he solamente veritade, quando la veza he sechata in lo ponto *a* et *e*, i quali sono termini de li diametri de li fondi de la veza, ouero etiamdio sia sechata *ab* et *bc*, impercio quando queli diametri siano secati, el bisogna procedere altramente, et percio sia questa 12ª conclusione.

Duodecima conclusio. Sia la veza *flkp* (Fig. 15), la quale taia la superficie *do*, siche tuti li diametri siano secati, e siano li ponti de la

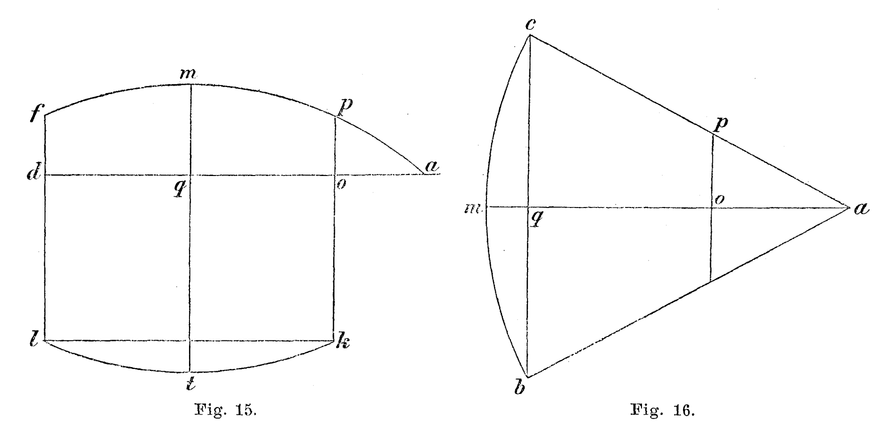


Fig. 15. Fig. 16.

secione *d*, *q*, *o*, et *mt* sia el diametro maiore, e la longeza de la veza sia taiata per mezo da la superficie *mqt*, et como ho ditto, sia *mp* quasi drita. Alora perche el corpo *mqop* sie piramide tronchata, inpercio compissela, como se dice in la 8ª conclusione, de la quale sia la bassis de consimile 7 forma | in le doe conclusione precedente. La longeza sia *qoa*, e lo cono sia *a*. Possa sopra la bassis prefato, la quale he *mq* (Fig. 16) fiza drita la porcione de la colomna rotonda segondo la longeza *qoa*, la quale porcione sera tripla a la piramide za fata. Anchora sopra la bassis *op* driza

heit nicht finden würde, so halbiere man (Fig. 12) die ac in b, ebenso die gegenüberliegende Seite in e, und ziehe be, die ac in k und df in m schneiden mag. Nun errichte man nach der Länge kc und der Breite bk ein runde Theilsäule, deren Grundfläche von folgender Gestalt sei, dass nämlich die Gerade bk in der Figur des Fasses (Fig. 13) die Stelle des Sinus versus oder des Pfeiles vorstellt, und die Gerade mkn die Stelle des Bogens eines grössten Kreises in der Breite oder Dicke des Fasses. Die Höhe der Theilsäule sei kc. Von dieser Theilsäule ist der dritte Theil der Inhalt der bkc. Für den Kegel aber, der seiner Länge nach liegt, so dass seine Axe parallel dem Horizonte ist, wie es für den Kegel ade (Fig. 14) der Fall ist, wird man den Körperinhalt des Theiles abc um so genauer erhalten, je mehr die Linie ac gerade ist, desgleichen seine Grundfläche, die der eben beschriebenen Figur, nämlich $abmc$, ähnlich ist.

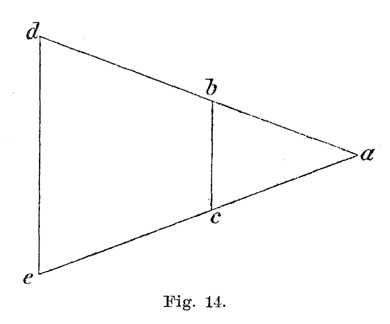


Fig. 14.

Da aber das, was ich soeben in dieser 11. Aufgabe gesagt habe, nur richtig ist, wenn das Fass in den Punkten a und c, das ist in den Endpunkten der Boden des Fasses, geschnitten wird, oder auch wenn ab und bc geschnitten werden, deshalb muss man, wenn die Durchmesser selbst geschnitten werden, anders vorgehen und daher sei folgende 12. Aufgabe gestellt.

Zwölfte Aufgabe. Es sei das Fass $flkp$ (Fig. 15), das von der Ebene do so geschnitten werde, dass alle Durchmesser getroffen werden; die Durchschnittspunkte seien d, g, o; mt sei der grösste Durchmesser und die Länge des Fasses werde durch die Ebene mqt halbiert, und es sei, wie schon gesagt ist, mp beinahe gerade. Da dann der Körper $mqop$ eine abgestumpfte Pyramide ist, so vervollständige man sie, wie es in der 8. Aufgabe gesagt ist, dann ist ihre Grundfläche von ähnlicher Gestalt wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben. Ihre Länge sei qoa, der Scheitelpunkt a. Darauf errichte man über der ebengenannten Grundfläche, die $bmcq$ ist (Fig. 16), eine runde Theilsäule nach der Länge qoa, die das Dreifache der eben konstruierten Pyramide sein wird. Ebenso errichte man über der Grundfläche op eine andere runde Theilsäule nach der Länge oa, die ebenso das Dreifache der Pyramide pao sein wird. Da nun die Theilsäulen in der folgenden Aufgabe bestimmt werden, und man auch ihre dritten Theile kennen wird, so kennt man also sowohl die ganze

una altra porcione de colomna secondo la longeza *oa*, la quale etiamdio sera tripla a la piramide *pao*. Conçosiacosa adonque, che la porcione de la colomne sera manifesta in la conclusione sequente, et se sauera etiamdio li soy subtripli de quelle, adunque el tute le piramide et etiamdio le parciale se sapera. Tray adoncha la parciale piramido *pao* de tuta la piramide *mqa*, et aueray el corpo quesito, cioe *mqop*.

Decima tercia conclusio. A volere monstrare la porcione de la colomna, multiplica larea de la parte de la abasis sua per la longeza de quela, et haueray lo intento. Tu haueray la area de la parte del abassis per quelo, chi e ditto in la 2ª parte de questo opera, ouero che la sia parte de superficie angulare ouero circhulare.

Decima quarta conclusio. Se tu haueray una veza, che tenga 4096 vizi, el ne voray una altra, che sia si longa, che tenga solamente 64, circha la radice quadrata de tuti doy li numeri. Adoncha si como el se ha quelle radice luna al altra, si se hauera li diametri de 27′ le veze. Adoncha el diametro | de la mazore sie octuplo al diametro de la minore veza. Se adoncha el primo diametro he 16, laltro de essere 2.[1])

Ma se tu non la volesse cosi longa, ma simile a quela, circha la radice cubica de tutti doy, ele adonque quelle radice 16 et 4. Si como adoncha se hanno quelle radice in semma, cossi se hauerano le longeze de la maiore veza a la longeza de la minore, e lo diametro maiore al diametro minore. Consimilmente dico de li seratile, de le piramide, de le colomne, de li cubi e de le spere.

De chubis.

Decima quinta conclusio. Quando tu voy lo cubo, multiplica la quantitade de la linia tua in si cubicamente, et haueray lo intento. Como he, se la linia *ab* sia 4 braza, multiplica 4 in se cubice, et fira 64, cioe la quantitade de tuto el cubo, el quale he *abhf*, *cgde* (Fig. 17).[2])

Sexta decima conclusio. Quando tu voray lo diametro del cubo, multiplica el quadrato del lato del cubo per 3, et quello, che ne viene, la radix quadrata sera el diametro. Como he, se *ab* sia 4, el suo quadrato

1) La radice di 4096 sie 64, la radix de 64 sie 8. Adonque la radix de 64 e lotaua parte de la radice de 4096. Sel diametro de la mazore veza he 16, el minore sera 2. Per attrouarli li diti diametri conza cosi. Prima per el minore: 8 via 16 fa 128, partilo per 64, ne viene 2, che el diametro de la minore. Se tu volesse el diametro mazore, multiplica 64 via 2, e parti per 8, et aueray el mazore. Opera simelmente per le cubice, como dicho de sopra, quando ay atrouata la radice. — Diese Anmerkung fehlt im lateinischen Texte.

2) $V = a^3$.

Pyramide als die Theilpyramide. Nun ziehe man die Theilpyramide pao von der ganzen Pyramide $cmqa$ ab, so erhält man den gewünschten Körper $mqop$.

Dreizehnte Aufgabe. Um die Theilsäulen zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt ihres Grundflächentheiles mit ihrer Länge, so hat man das Verlangte. Den Inhalt des Grundflächentheiles erhält man aus dem, was im zweiten Theile dieses Werkes gesagt ist, mag es nun der Theil einer eckigen oder kreisförmigen Fläche sein.

Vierzehnte Aufgabe. Wenn ein Fass gegeben ist, das 4096 Vizi enthält, und man will ein anderes von derselben Länge bestimmen, das nur 64 enthält, so bestimme man die Quadratwurzeln beider Zahlen. Wie sich dann diese Wurzeln zu einander verhalten, so werden sich auch die Durchmesser der Fässer verhalten. Es ist daher der Durchmesser des grössern das Achtfache des Durchmessers des kleinern Fasses. Ist also der erste Durchmesser 16, so muss der andere 2 sein.[1])

Will man dasselbe aber nicht ebenso lang, sondern ihm ähnlich, so bestimme man die Kubikwurzeln von beiden; diese Wurzeln sind nun 16 und 4. Wie sich daher diese Wurzeln zu einander verhalten, so wird sich die Länge des grössern Fasses zu der Länge des kleinern und der Durchmesser des grössern zu dem Durchmesser des kleinern verhalten. Das Nämliche behaupte ich von dem Prisma, der Pyramide, der Säule, dem Würfel und der Kugel.

Von den Würfeln.

Fünfzehnte Aufgabe. Um den Inhalt eines Würfels zu finden, multipliciere man die Länge der Kante mit sich kubisch, so hat man das Verlangte. Ist z. B. die Kante $ab = 4$ Ellen, so multipliciere man 4 mit sich kubisch, das wird 64, und das ist der Körperinhalt des ganzen Würfels, der $abhf$, $egcd$ ist (Fig. 17).[2])

Sechzehnte Aufgabe. Will man die Körperdiagonale des Würfels bestimmen, so multipliciere man das Quadrat der Kante mit 3, dann ist die Quadratwurzel des Produktes die Diagonale. Ist z. B. $ab = 4$,

1) Die $\sqrt{4096}$ ist 64, $\sqrt{64} = 8$, also ist $\sqrt{64}$ der achte Theil von $\sqrt{4096}$. Wenn der Durchmesser des grössern Fasses 16 ist, so ist der des kleinern 2. Um die fraglichen Durchmesser zu erhalten, rechne man so. Zuerst für den kleinern: $8 \times 16 = 128$, dividiert durch 64 kommt 2, das ist der Durchmesser des kleinern Fasses. Will man aber den grössern Durchmesser, so multipliciere man 64 mit 2 und dividiere durch 8, so erhält man den grössern. Ebenso, wie ich oben gesagt habe, verfährt man für den Kubikinhalt, nachdem man die Wurzel bestimmt hat.



sie 16. Multiplica 16 per 3, fa 48, del qual la radix quadrata, cioe 6 integri $55^{m} 43^{2e}$, he la linea cf, cioe el diametro.[1])

Ma se quello quadrato ab, cioe 16, tu lo dopiaray, chel sia 32, alora la radix quadrata de 32 sie el diametro del quadrato de la superficie del cubo[2]), el quella diametro sie la linea ce, cioe 5 integri $39^{m} 22^{2a}$ quasi. Ma sel prefato quadrato tu lo multiplica per 6, haueray tutte le superficie del chubo.[3])

E per lo diametro del cubo si atrouaray el lado del cubo: troua la radice de la terza parte del quadrato del diametro. Como se lo diametro fosse $6 \cdot 55 \cdot 43$, el quadrato sera 48, et la terza parte sie 16, 28 del quale la radice quadrata sera lo lado, che tu circhi, cioe 4 etc.[4]) |

De speris.

Decima septima conclusio. Quando tu voray la quantita de la spera, multiplica larea del maiore circulo de quela per lo $\frac{2}{3}$ del suo diametro, et haueray lo intento. Como he, sel diametro, cioe ab, sera 7 (Fig. 18), la area del circhio ab sera $38\frac{1}{2}$, si como in la 2^a parte de questa opera e dito. Li $\frac{2}{3}$ de quello 7 sie $4\frac{2}{3}$. Multiplica adoncha $38\frac{1}{2}$ per $4\frac{2}{3}$, et haueray $179\frac{2}{3}$, cioe la quantitade ouero la chapacitade de tuta la spera.[5])

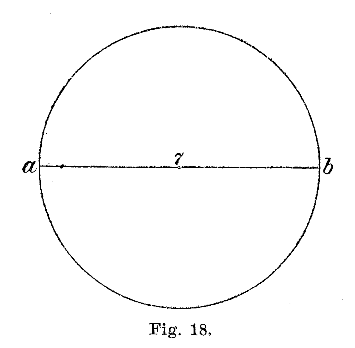


Fig. 18.

Decima octava conclusio. Quando tu voray la superficie de la spera, multiplica la circunferentia del circhio maiore per el suo diametro, et haueray quello, che tu circhi. In lo chaso preditto, quando el diametro ab he 7, la circunferencia sie 22. Multiplica 7 per 22, che fa 154, la superficie de la spera.[6])

Decima nona conclusio. Quando tu voray la porcione de la spera mazore ouero minore cha la mitade, cercha primamente la porcione del circhulo maiore, si como he ditto in la 2^a parte de questo opera. Si como aduncha la porcione del circhulo se ha al circhulo, cosi he da spera ha spera. Notta, che, sel se fu la tabula de li seni secondo la proporcione de 22 a 7, si como he fatto secondo la proporcione 360 a 120, si como la ho fatto io, alora quando lo archo del orizonte he

---

1) $D = a\sqrt{3}$. 2) $d = a\sqrt{2}$. 3) Oberfläche des Würfels $= 6a^2$.

4) $a = \sqrt{\frac{D^2}{3}}$. — Der letzte Abschnitt fehlt im lateinischen Texte.

so ist das Quadrat gleich 16. Multipliciere 16 mit 3, das macht 48, und die Quadratwurzel daraus, das ist 6 Ganze 55′43″, ist die Gerade cf, nämlich die Körperdiagonale (Fig. 17).[1])

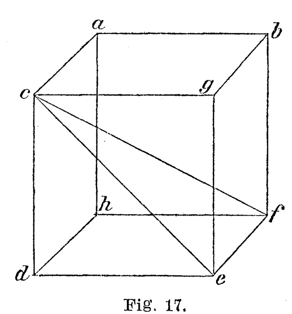


Fig. 17.

Wenn man aber das Quadrat von ab, nämlich 16, verdoppelt, so dass es 32 wird, dann ist die Quadratwurzel von 32 die Diagonale der quadratischen Seitenfläche des Würfels[2]); diese Diagonale ec ist ungefähr gleich 5 Ganzen 39′22″ (Fig. 17). Multipliciert man aber das genannte Quadrat mit 6, so erhält man die Gesamtoberfläche des Würfels.[3])

Aus der Körperdiagonale des Würfels findet man die Kante so: Man suche die Wurzel des dritten Theiles des Quadrates der Diagonale. Wäre z. B. die Diagonale gleich $6^g \cdot 55' \cdot 43''$, so ist das Quadrat gleich 48, davon ist der dritte Theil 16 und dessen Quadratwurzel ist die Kante, die man sucht, nämlich 4 u. s. w.[4])

Von den Kugeln.

Siebzehnte Aufgabe. Zur Bestimmung des Körperinhalts einer Kugel multipliciere man den Inhalt des grössten Kreises derselben mit $\frac{2}{3}$ ihres Durchmessers, so erhält man das Verlangte. Wäre z. B. der Durchmesser $ab = 7$ (Fig. 18), so ist der Inhalt des Kreises ab gleich $38\frac{1}{2}$, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. $\frac{2}{3}$ von 7 sind $4\frac{2}{3}$. Man multipliciere also $38\frac{1}{2}$ mit $4\frac{2}{3}$, so erhält man $179\frac{2}{3}$ und das ist der Körperinhalt oder die Mächtigkeit der ganzen Kugel.[5])

Achtzehnte Aufgabe. Will man die Oberfläche der Kugel bestimmen, so multipliciere man den Umfang eines grössten Kreises mit seinem Durchmesser, und erhält dadurch das Gesuchte. Im vorliegenden Falle, wo der Durchmesser $ab = 7$ ist, ist der Umfang gleich 22. Multipliciert man 7 mit 22, so macht das 154, die Oberfläche der Kugel.[6])

Neunzehnte Aufgabe. Wenn man einen Kugelabschnitt grösser oder kleiner als die Halbkugel finden will, so suche man zunächst den Abschnitt des grössten Kreises, wie im 2. Theile dieses Werkes gelehrt ist. Wie sich dann dieser Kreisabschnitt zum ganzen Kreise verhält, so verhält sich der Kugelabschnitt zur Kugel. Man bemerke hier, dass, wenn die Sinustafel nach dem Verhältnis von 22 : 7 berechnet wäre (wie ich es gethan habe), wie man sie nach dem Verhältnis von 360 : 120 konstruiert hat, man, wenn der Bogen des Horizontes 23°49′51″ ist, den vierten Theil

5) $V = \frac{d^2}{4}\pi \cdot \frac{2}{3}d = \frac{1}{6}d^3\pi.$ 6) $O = d^2\pi.$

$23^{gr}49^{m}51^{2e}$, el se ha la 4^{a} parte de la area del circhio, et chosi la quarta parte de la spera. Si como fi per lo archo *ab*, del quale el 28′ sino | drito *fh* de fir multiplicato per el sino dritto del archo *ce*, cioe per *ef*, e quelo, che ne viene da fir trato del sectore del circhulo *ehgc* abuto per la multiplicacione de tutta la area per lo archo *ecg*, e per la diuisione del proueniente per tuta la circunferentia. Eno, cioe sono, aduncha, quele seni, cioe *fh* $23^{gr}8^{m}25^{2e}$, e *ef* $52^{gr}23^{m}20^{2e}$, a li quali correspondeno $1^{gr}20^{m}59^{2e}$ per el primo sino, ma per lo secondo $3^{gr}3^{m}21^{2e}$, quando el diametro he 7. Per questo se chonosse in quanto la porcione del cubo fatta de la sagitta e del diametro del circhio auanza la porcione de la spera. Conçosiacosa, chel quadrato del diametro sie 49, e la sagita *cf* sia $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, multiplica adoncha 49 per $2^{gr}9^{m}1^{2a}$, ne viene $105^{gr}12^{m}49^{2e}$. Ma la quarta parte de la spera he $44^{gr}55^{m}$, la quale, quando la sera subtrata de $105^{gr}21^{m}49^{2e}$, rimagnera $60^{gr}26^{m}49^{2e}$, et in tanto la prefata porcione del cubo auanza la porcione de la spera preditta. Anchora se la porcione predita del cubo tu la traray de la mitade del chubo, tu saueray, in quanto questo residuo auanza la quarta parte de la spera. Chomo he el cubo circunsrito a la spera, quando el diametro he 7, sera 343, del quale la mitade sie $171 \cdot 30$. De la quale trata la prefata porcione del cubo, cioe $105 \cdot 21 \cdot 49$, el residuo sera $66 \cdot 8 \cdot 11$, el qual residuo 29 comparato a la quarta parte de la spera, | cioe a quelli $44 \cdot 55$, auanza quello, chomo he manifesto, $21^{gr}13^{m}11^{2a}$.[1])

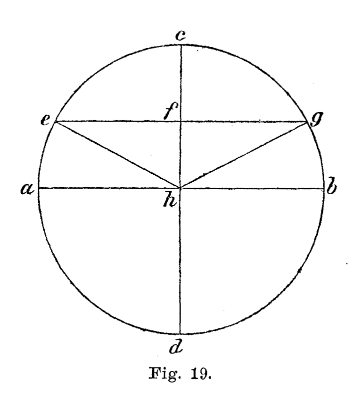


Fig. 19.

O tu, che lezaray questa opera, cognosse, mi hauere messe molte cose dicte da li altri, et hauer coreto alcuni diti de li altri, et auergene messo alchune per la dio gratia, abiando aduertencia in la sentencia del circhio, che la proporcione de la circunferentia del circhio a lo diametro non he si chomo 22 a 7, auegnadio che si per la facilita de si, etiamdio perche non he de la presente hopera reprouato questo, abia dito questa proportione, congosiacosa che la non he molto distante da la veritade. Ma quale sia la proporcione, la zo dita in altro luogo, quasi per demostratiua conclusione.[2])

29′ Deo gratias. Amen. Cumpleta die primo Aprilis 1488. |

1) Quando tu voray el diametro de una spera, multiplica la quantitade de essa spera per 343, e quela multiplicatione partila per $179\frac{2}{3}$, e de quelo, che ne viene, la radice cubicha sera el diametro adimandato. — Diese Anmerkung enthält der lateinische Text nicht.

des Kreisinhaltes und also auch den vierten Theil der Kugel vor sich hat. Wie es z. B. durch den Bogen *ae* geschieht, dessen Sinus rectus *fh* mit dem Sinus rectus des Bogens *ce*, nämlich mit *ef* multipliciert werden muss, und das Resultat von dem Kreisabschnitt *ehgc* abgezogen, den man durch Multiplikation des ganzen Kreisinhaltes mit dem Bogen *ecg* und nachherige Division des Ergebnisses durch den ganzen Kreisumfang erhält. Es sind nun hier diese Sinus nämlich $fh = 23^0 8' 25''$ und Sinus $fe = 52^0 23' 20''$. Ihnen entsprechen, wenn der Durchmesser 7 ist, für den ersten Sinus $1^0 20' 59''$, für den zweiten aber $3^0 3' 21''$. Daraus kann man auch finden, um wieviel der Würfeltheil, der von dem Pfeile und dem Durchmesser des Kreises gebildet wird, den Kugelabschnitt übertrifft. Denn das Quadrat des Durchmessers ist 49, und der Pfeil *cf* ist $2^0 9' 1''$. Durch Multiplikation von 49 mit $2^0 9' 1''$ erhält man also $105^0 21' 49''$. Der vierte Theil der Kugel ist aber $44^0 55'$, und subtrahiert man das von $105^0 21' 49''$, so bleiben 60^0 $26' 49''$ übrig, und um soviel übertrifft der Würfeltheil den vorgenannten Kugelabschnitt. Zieht man noch den erhaltenen Würfeltheil von dem halben Würfel ab, so erhält man auch, um wieviel dieser Rest den vierten Theil der Kugel übertrifft. Der einer Kugel vom Durchmesser 7 umgeschriebene Würfel ist z. B. gleich 343, und die Hälfte davon ist $171^0 30'$. Davon ziehe man den obengefundenen Würfeltheil, also $105^0 21' 49''$ ab, dann ist der Rest $66 \cdot 8 \cdot 11$. Dieser Theil verglichen mit dem vierten Theil der Kugel, also mit $44^0 55'$, übertrifft diesen offenbar in 21^0 $13' 11''$.[1])

O Du, der Du dieses Werk liest, wirst erkennen, dass ich Vieles gelehrt habe, was von andern gesagt ist, und manche Behauptungen anderer verbessert, und manches mit Gottes Hilfe gesagt habe, indem ich bei Berechnung des Kreises darauf aufmerksam machte, dass das Verhältnis des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser nicht gleich 22 : 7 ist, obwohl ich, sowohl wegen der Leichtigkeit der Berechnung und auch, weil es nicht dieses Werkes ist, sie zu rektifizieren, dieses Verhältnis angegeben habe vorzüglich deshalb, weil es nicht sehr weit von der Wahrheit abweicht. Das richtige Verhältnis aber habe ich schon an einem andern Orte gegeben durch einen fast vollständigen Beweis.[2])

Deo gratias, Amen. Vollendet am 1. April 1488.

---

1) Wenn man den Durchmesser einer Kugel finden will, so multipliciere man den Körperinhalt der Kugel mit 343 und theile das Produkt durch $179\frac{2}{3}$, dann ist die Kubikwurzel dieses Quotienten der verlangte Durchmesser. Das kommt darauf hinaus, dass $d^3 = \frac{21}{11} V$ oder $d^3 = \frac{6V}{\pi}$ ist.

2) Diese Arbeit ist vollständig verschollen.



Hieran schliesst sich auf Blatt 30r und v eine *Tabula Sinuum* des nämlichen Verfassers für halbe Grade berechnet und auf Blatt 31r bis 32r eine ebenso eingerichtete *Tabula sinuum secundum proportionem 22 ad septem,* welche oben im Texte erwähnt ist.[1]) Blatt 32v bis 34r enthält eine *Tabula Sollis (!),* d. h. eine Tafel der Tageslängen für die einzelnen Tage des Jahres. Blatt 34v ist leer.

Auf den Blättern 35r—41v, denen sechs leere Blätter folgen, worauf noch auf dem folgenden mit 42 bezeichneten Blatte das Obige fortgesetzt wird, sind eine Reihe ähnlicher Sätze niedergeschrieben, als sie in dem Werke LEONARDO's sich finden. Sie sind von derselben Hand, wie dieses, geschrieben, aber, wie aus der ganz abweichenden Sprache und Orthographie

---

35 | **1.** A volere metere uno tondo mazore, che se fossa metere in uno quadro, fa cosi. Multiplica la lado del quadro, sia quanto se voglia, per $3\frac{1}{7}$, e tanto sera la circunferentia de quelo tondo, chi e in del quadro.[2])

2. A volere sapere larea de questo tondo, multiplica la mita del diametro per la mita de la circunferentia, et haueray la area del ditto tondo.[3])

3. A volere atrouare uno tondo, che tenga tanto larea sua, como fa la area de questo quadro, fa cosi, multiplica larea del tondo cun quella del quadro, e de quelo, che ne viene, troua la radix quadrata. La qual radice multiplicala per el diametro del tondo, chi e dentro dal quadro, e quello, che ne viene, partilo per larea del tondo, chi e dentro in del quadro, et quello, che ne vienera, sera el diametro del tondo, che tu circhi.

4. Anchora habiamo uno quadro, che ha per faza capeci 14, hora voglia trouare uno tondo, che sia tanto larea sua, quanto he la area de questo quadro. Fa chosi. Prima faray la area del quadro, e di 14 vie 14, fa 196. Poy multiplica questa area per $12\frac{4}{7}$, fara 2464. La radix 35′ quadrata de 2464, chie capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ 3 $\widetilde{\text{oz}}$ $9\frac{39}{50}$, sie la circunferentia, | che tu circhi.[4])

5. Se tu voy atrouare el diametro del tondo, che debbe essere tanto

---

1) Ich lasse ein Specimen beider Tafeln am Schlusse dieser Abtheilung des Bandes abdrucken.

2) $U = 3\frac{1}{7}d$; $\pi = 3\frac{1}{7}$. 3) $V = \frac{11}{14}d^2$.

4) 1 Capec. = 6 $\widetilde{\text{br}}$
1 $\widetilde{\text{br}}$ = 12 $\widetilde{\text{oz}}$

Es ist $\sqrt{2464} \sim 49{,}626$ statt 49,638 gerechnet.

hervorgeht, nicht von demselben Verfasser. Da sie aber doch sicher aus der nämlichen Zeit stammen als die Abschrift des Werkes LEONARDO'S, füge ich sie hier ebenfalls an. Nach wieder zwei leeren Blättern findet sich von ganz anderer späterer Schrift noch die Notiz

„Nassete Zuan Vigenzo del 1502 adj 18 Zugno
de sabato a hore 9."

Hier also die Sätze des andern Verfassers:[1])

---

1. Um in ein Quadrat den grössten Kreis einzubeschreiben, der möglich ist, gehe man so vor. Man multipliciere die Seite des Quadrates, sie mag sein, welche sie will, mit $3\frac{1}{7}$, so gross ist dann der Umfang des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist.[2])

2. Um den Inhalt dieses Kreises kennen zu lernen, multipliciere man den Halbmesser mit der Hälfte des Umfanges, so erhält man den Inhalt genannten Kreises.[3])

3. Um einen Kreis zu finden, dessen Inhalt ebensoviel enthält[4]), als der Inhalt des Quadrates ausmacht, gehe man so vor. Man multipliciere den Inhalt des Kreises mit dem des Quadrates und suche von dem Produkte die Quadratwurzel. Diese Wurzel vervielfache man mit dem Durchmesser des Kreises, der in das Quadrat beschrieben ist, und das Ergebnis dividiere man durch den Inhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Kreises, dann ist der erhaltene Quotient der Durchmesser des Kreises, der gesucht wird.

4. Es sei ferner ein Quadrat gegeben, dessen Seite 14 Capeci enthalte, ich will nun einen Kreis finden, dessen Inhalt ebenso gross ist, als der Inhalt dieses Quadrates. Mache es so. Zuerst berechne den Inhalt des Quadrates; er ist 14×14, das macht 196. Dann multipliciere diesen Inhalt mit $12\frac{4}{7}$, das giebt 2464. Die Quadratwurzel von 2464, die 49 Capeci 49 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{39}{40}$ $\widetilde{\text{oz}}$ beträgt, ist der gesuchte Umfang.[5])

5. Will man jetzt den Durchmesser des Kreises finden, dessen Fläche

---

1) Die Nummerierung rührt von mir her.

2) Seite des Quadrates a, Umfang des Kreises $= 3\frac{1}{7}a$.

3) Inhalt des Kreises $= 3\frac{1}{7}a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\pi$.

4) Durchmesser des gesuchten Kreises x; dann ist

$$x = \left(\sqrt{\frac{a^2}{4}\pi \cdot a^2} \cdot a\right) : \frac{a^2}{4}\pi = \frac{2a}{\sqrt{\pi}},$$

was vollständig richtig ist.

5) Da der Kreisinhalt $= \frac{U^2}{4\pi}$ ist, so ist wirklich $U^2 = 4\pi \cdot a^2$.

larea, como e quela del quadro, fa cossi. Parti la ditta circunferentia per $3\frac{1}{7}$, che ne viene capeci 15 br 4 oz $9\frac{123}{1100}$, e tanto e lo diametro del ditto tondo.

6. E gli e uno quadrangulo, chi e per facia 4, e de longo 16. A volerlo redure a uno quadrato, che sia equale per facia, fa cosi. Multiplica la longeza cun la largeza, fara 64; la radice quadrata de 64, chi e 8, sera el lado del quadrato fatto (Fig. 1).

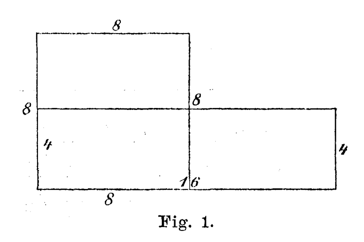


Fig. 1.

7. E gli e uno triangulo ouero uno quadro, che larea sua sie 80: voglio redure ad uno triangulo equilatero. La regula dice cosi. Quadra questa area, chi e 6400; poy multiplica per $5\frac{3}{4}$, fira 36800; poy troua la radix quadrata de la radix de 36800, e tanto sera per facia el dito triangulo, che tu circhi.[1])

8. Abiando lo lado del triangulo, volendo atrouare la perpendichulare, quadra lo lado del triangulo, e trane il $\frac{1}{4}$ de la quadratura, e del rimanente la radix quadrata sera la perpendichulare del triangulo.[2])

9. E volendo trouare lo lado de uno triangulo, che sia equilatero, fara cosi. Quadra la perpendichular, e giugni il $\frac{1}{3}$ de la quadratura: la 36 radix quadrata sera lo lado del triangulo.[3]) |

10. A volere atrouare, quanta distancia e dal centro de uno triangulo equilatero al cantone, fa cosi. Quadra lo lado del triangulo, e de la terza parte de quelo numero la radix quadrata sera la distantia dal centro al cantone.[4])

11. El' e uno triangulo ambligonio (Fig. 2), chi e per una faça 12, per laltra 10, e per laltra 6, e volgio sapere, doue chadera la perpendichulare, fa cosi. Multiplica 10 via 10, fa 100; poy 6 via 6, fa 16; tray 36 de 100, resta 64; piglia la mitade 64, chi e 32, e partilo per lado basso, chi e 12, ne viene $2\frac{2}{3}$, e queste $2\frac{2}{3}$ agiugnelo cun la mita del lado basso, chi e 6, fara $8\frac{2}{3}$, et in quelo logo chadera la perpendichulare.[5])

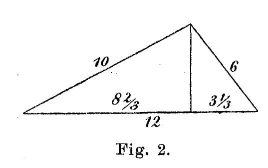


Fig. 2.

12. Et per trouare la quantita de essa perpendichulare, multiplica lo lado, chi e 6, in se medesimo, fa 36; poy multiplica quella parte del lado baso, chi e rimasa ultra la perpendichular, chi e $3\frac{1}{3}$, in si, fara $11\frac{1}{9}$;

1) Es muss natürlich $5\frac{1}{3}$ heissen, wie auch an spätern Stellen richtig angegeben wird.

2) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. 3) $a^2 = \frac{4}{3}h^2$.

ebenso gross ist als die des Quadrates, so mache man es so. Man theile den berechneten Umfang durch $3\frac{1}{7}$, wodurch 15 Capeci 41 $\widetilde{\text{br}}$ $9\frac{123}{1100}$ $\widetilde{\text{oz}}$ herauskommen, so gross ist dann der Durchmesser des genannten Kreises.

6. Gegeben ist ein Rechteck, dessen Breite 4 und dessen Länge 16 ist. Um es in ein Quadrat zu verwandeln, das gleiche Seiten hat, gehe man so vor. Man multipliciere die Länge mit der Breite, so macht das 64. Die Quadratwurzel von 64, die 8 ist, ist dann die Seite des zu zeichnenden Quadrates (Fig. 1).

7. Gegeben ein Dreieck oder ein Quadrat, dessen Inhalt gleich 80 ist, ich will es in ein gleichseitiges Dreieck verwandeln. Die Regel sagt so. Quadriere diesen Inhalt, das giebt 6400, darauf multipliciere ihn mit $5\frac{3}{4}$, so entsteht 36800; dann suche die vierte Wurzel von 36800, so gross ist dann die Seite des gesuchten Dreiecks.[1]

8. Hat man die Dreiecksseite und will die Höhe finden, so quadriere man die Dreiecksseite und ziehe $\frac{1}{4}$ von dem Quadrate ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die Höhe des Dreiecks.[5]

9. Und um die Seite eines gleichseitigen Dreiecks zu finden (wenn die Höhe bekannt ist), mache es so. Quadriere die Höhe und füge dem Quadrat seinen dritten Theil hinzu, dann ist die Quadratwurzel die Dreiecksseite.[3]

10. Um zu finden, wie gross der Abstand des Mittelpunktes eines gleichseitigen Dreiecks von der Ecke ist, gehe man so vor. Man quadriere die Seite des Dreiecks, dann ist die Quadratwurzel aus dem dritten Theile dieser Zahl der Abstand des Mittelpunktes von der Ecke.[4]

11. Gegeben ist ein stumpfwinkliges Dreieck (Fig. 2), dessen eine Seite 12, die andere 10, die dritte 6 ist; ich will bestimmen, wohin der Höhenfusspunkt fällt. Mache es so. Multipliciere 10×10, das giebt 100; darauf 6×6, das ist 36; ziehe 36 von 100 ab, es bleibt 64; nimm die Hälfte von 64, die 32 ist, und theile sie durch die Grundlinie, die 12 hält, so kommt $2\frac{2}{3}$. Diese $2\frac{2}{3}$ füge zur Hälfte der Grundlinie hinzu, die 6 ist, so giebt das $8\frac{2}{3}$, und dahin fällt der Höhenfusspunkt.[5]

12. Und um die Länge der Höhe zu finden, multipliciere die Seite, welche 6 beträgt, mit sich selbst, das giebt 36, darauf vervielfache den Theil der Grundlinie, der über dem Höhenabschnitt geblieben ist, das ist $3\frac{1}{3}$, mit sich selbst, so giebt das $11\frac{1}{9}$; ziehe das von 36 ab, so bleibt $24\frac{8}{9}$, und die Quadratwurzel von $24\frac{8}{9}$, das ist $4\frac{720828347}{729000000}$, ist die Länge der Höhe.

---

4) Der fragliche Abstand ist $\frac{2}{3}h$, also gleich $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

5) Hier ist die Formel $a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = c(p-q)$ benutzt, im Gegensatz zu der Rechnung Leonardo's.

tralo de 36, rimane $24\frac{8}{9}$, e la radice quadrata de $24\frac{8}{9}$, chi e $4\frac{720828347}{729000000}$, e la quantita de la perpendiculare. La proua sie a quadrare la perpendiculare, fa $24\frac{8}{9}$; poy quadra $8\frac{2}{3}$, fa $75\frac{1}{9}$; agiunti in siema fa 100, e la 36′ radice quadrata e con el lado de 10. |

13. El' gie uno tondo, chi e per el suo diametro 10; a volere sapere el suo sen drito fa cosi. El quadrato de quello parte del semidiametro, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera el sen drito.

14. E per sapere el sen verso, cioe la sagitta, el quadrato del sen drito tralo del quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se agiugne sopra el semediametro. El qual tralo dal semediametro, el resto sera la sagita. Exempli gratia (Fig. 3) el quadrato cb tralo dal quadrato cd, e del rimanente la radix quadrata sera ab el sen suo drito. E per el sen verso el quadrato ab tralo dal quadrato dc, e del rimanente la radix quadrata sera bc, el qual tralo de cd, e rimagnera db, la sagita ouero el sen verso.[1])

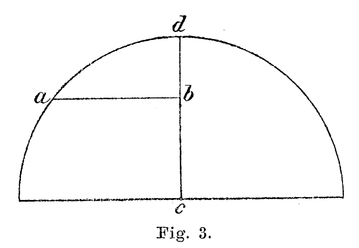


Fig. 3.

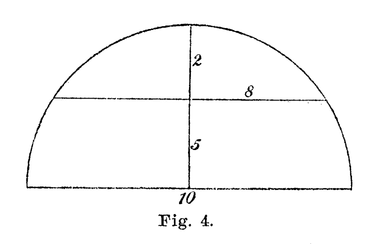


Fig. 4.

15. El' gie uno tondo, chi e per diametro b̃r 10; taglione una fetta, chi e longa b̃r 8: voglio sapere, quanto sera alta, cioe, quanto sera la sagita de quella feta (Fig. 4). Fa cossi. El quadrato de la mita de la longeza de la feta tralo dal quadrato del semediametro, e del rimanente la radix quadrata sera quello, che se azonze sopra el semediametro. El 37 qual tralo dal semediametro: el rimanente | sera la sagita, che se circhaua.

16. Volendo la longeza de tuta la feta per la sagita, multiplica la sagita, che se taia via dal diametro, per lo resto del diametro, e quelo, che ne viene, multiplicalo per 4, e la radix quadrata sera la longeza de la feta, che se circhaua.[2])

17. Et se voray sapere larcho de la porcione, sapendo la corda, la sagita e lo diametro, adiugni la mita de la corda cun la sagita, e tuto questo parti per mitado, et lo proueniente sapi, che parte e de tuto el diametro, e tal parte, como sera de tuto el diametro, tal parte sera larcho de la porcione de tula la circunferentia del circhio.[3])

Die Probe davon ist, man quadriere die Höhe, das giebt $24\frac{8}{9}$, dann quadriere man $8\frac{2}{3}$, das macht $75\frac{1}{9}$. Zusammengezählt giebt es 100, und davon die Quadratwurzel ist wie die Seite gleich 10.

13. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Um für einen Bogen den Sinus rectus zu finden, mache man es so. Das Quadrat des Theiles des Halbmessers, den man zum Pfeile hinzufügen müsste, um den Halbmesser zu vollenden, ziehe man vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes der Sinus rectus.

14. Und um den Sinus versus, das ist den Pfeil, zu erhalten, ziehe man das Quadrat des Sinus rectus vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes dasjenige, was man zu der Vollendung des Halbmessers hinzulegen müsste. Man ziehe dies vom Halbmesser ab, so ist der Rest der Pfeil. Z. B. (Fig. 3) ziehe man das Quadrat von cb von dem Quadrate der cd ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes ab, der zugehörige Sinus rectus. Und für den Sinus versus ziehe man das Quadrat der ab vom Quadrate der dc ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes die bc. Sie ziehe man von cd ab, so bleibt db übrig, der Pfeil oder der Sinus versus.[1])

15. Gegeben ein Kreis, dessen Durchmesser 10 ist. Ich schneide davon ein Stück ab, das 8 Ellen lang ist, und will wissen, wie hoch dasselbe ist, das heisst, wie gross der Pfeil dieses Abschnittes ist (Fig. 4). Mache es so. Das Quadrat der Hälfte der Länge des Abschnittes ziehe vom Quadrate des Halbmessers ab, dann ist die Quadratwurzel des Restes das, was man ⟨dem Pfeil⟩ zur Vollendung des Halbmessers hinzufügen muss. Das ziehe man vom Halbmesser ab, der Rest ist der Pfeil, den man sucht.

16. Will man die Länge des ganzen Abschnittes aus dem Pfeile bestimmen, so multipliciere man den Pfeil mit dem Reste des Durchmessers, wenn man von ihm den Pfeil abgezogen hat, und multipliciere das Produkt noch mit 4: dann ist die Quadratwurzel davon die Länge des Abschnittes, die man sucht.[2])

17. Will man auch den Bogen des Abschnittes finden, wenn man die Sehne, den Pfeil und den Durchmesser kennt, so addiere man die Hälfte der Sehne zu dem Pfeil, halbiere die Summe, und sehe dann zu, der wievielte Theil das vom ganzen Durchmesser ist. Dann ist der Bogen der ebensovielte Theil des ganzen Umfanges, der wievielte das Obige vom ganzen Durchmesser ist.[3])

1) In No. 13 und 14 sind die Formeln enthalten:
$$\sin^2 = r^2 - (r - \text{sinvers})^2; \quad \text{sinvers} = r - \sqrt{r^2 - \sin^2}.$$

2) Dieselben Rechnungen, wenn statt des Sinus die Sehne, also der doppelte Sinus, gegeben ist. 3) Danach müsste $\text{Arc}\, 2\alpha = (\sin\alpha + \text{sinvers}\,\alpha)\pi$ sein.



18. A volere sapere larea de una porcione, che fusse menore cha mezo el circhio, fa de besogna sapere prima larcho de la ditta porcione e la corda, che se sottende a lo ditto archo, e la sagita ouero el sen verso. Como sarebe questa porcione *acdb* (Fig. 5), de la quale la corda fusse 8 e la sagita 2, e lo archo fosse 10. Poy bisogna sapere, de qual circhio e stata taiada la ditta porcione. La qual saperay per questo modo. Multiplicando la mita de la corda in si medesima, e partire per la sagita, et a quello, che ne viene, agiugneui la ditta sagitta, et aueray lo diametro del circhio, de che el fo taiado.[1])

Verbi gratia multiplica *ab* in si, fa 16; parti questo 16 per *bc*, e 37′ vegnera *pb* 8, | ali quali zonzi *bc*, sera tuto el diametro 10. Ma a volere sapere larea de la dita porcione, multiplica la mita del diametro, cioe *pm*, per la mita del archo, cioe per *ac*, e quelo, che ne viene, serualo. Poy multiplica quella parte, che se azonzerebe a la sagita a compire el semediametro, cioe *bp*, per la mita de la corda *ab*, e quelo, che ne vene, tralo de quello, che tu seruasti, e lo rimanente sera larea de la ditta porcione *abdc* quesita.

19. A volere sapere larea de la mazore porcione cha mezo el circhio fa, como ay fatto di sopra, saluo che tu aueray agiugnere a quello, che tu seruasti, quello, che tu chauy de sopra da lo seruato.

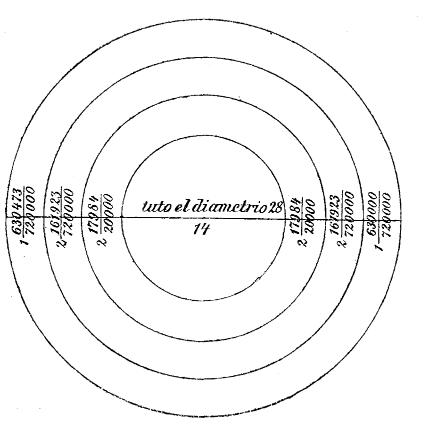


Fig. 6.

20. El' gie uno tondo, chi e 28 per diametro, del quale se vole fare 4 parti equale, e che ciaschuna parte vada al tondo (Fig. 6). Adimando, quanta parte del diametro prendera ciaschuna de queste parte. Fa cosi. Del quadrato del diametro, cioe 788, trane la quarta parte, chi e 196, e lo rimagnera 588, de lo quale 588 la radix quadrata sera lo diametro de li $\frac{3}{4}$, chi rimagnera in mezo del circhio, cioe $24\frac{89527}{360000}$ [2]), siche da $24\frac{89527}{360000}$ per fina 28 sie $3\frac{270473}{360000}$ el diametro de la quarta parte de fora. E per lo secondo quarto tray quella prima quantita, cioe 196, de 588, resta 392, e la radix quadrata, cioe $19\frac{7989}{10000}$ [3]),

1) Hier kennt also der Verfasser die Formel $d = \text{sinvers} + \frac{\sin^2}{\text{sinvers}}$.

2) $\sqrt{588} = 23{,}2487$, der Werth unseres Verfassers $= 24{,}24868$.

18. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, der kleiner ist als der Halbkreis, muss man zunächst den Bogen des Abschnittes kennen und die Sehne, welche den fraglichen Bogen überspannt, sowie den Pfeil oder den Sinus versus. Wenn z. B. der fragliche Abschnitt $acdb$ (Fig. 5) wäre, dessen Sehne 8, der Pfeil 2 und der Bogen 10 ist, so muss man bestimmen, von welchem Kreis der fragliche Abschnitt genommen ist. Das findet man auf folgende Weise. Man multipliciere die Hälfte der Sehne mit sich selbst und theile dann durch den Pfeil und zu dem Ergebnis addiere man den Pfeil, so hat man den Durchmesser des Kreises, von dem der Abschnitt genommen ist.[1])

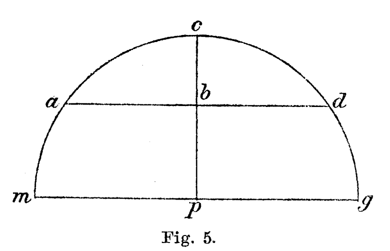


Fig. 5.

Z. B. multipliciere ab mit sich selbst, das macht 16, theile diese 16 durch bc, so kommt $pb = 8$. Dazu addiere bc, dann ist der ganze Durchmesser 10. Um aber den Inhalt genannten Abschnittes zu finden, multipliciere man den Halbmesser, also pm, mit dem halben Bogen, also mit ac, und merke sich das Ergebnis. Darauf multipliciere man das Stück, das man zum Pfeil hinzulegen musste, um den Halbmesser zu erhalten, also bp, mit der Hälfte der Sehne ab, und das Ergebnis ziehe man von dem Gemerkten ab, so ist der Rest der gesuchte Inhalt des fraglichen Abschnittes $abdc$.

19. Um den Inhalt des Abschnittes, der grösser ist als der Halbkreis, zu bestimmen, mache man es genau so, wie man es eben gemacht hat, nur dass man das zu dem Gemerkten addiert, was man oben von ihm abgezogen hat.

20. Gegeben ist ein Kreis, dessen Durchmesser 28 ist. Man will von diesem vier gleiche Theile machen, so dass jeder Theil in die Runde geht (Fig. 6). Ich frage, den wievielten Theil des Durchmessers wird jeder Theil einnehmen. Mache es so. Von dem Quadrate des Durchmessers, also von 784, ziehe seinen vierten Theil, das ist 196, ab, so bleiben 588. Die Quadratwurzel aus 588 wird dann der Durchmesser der $\frac{3}{4}$ sein, die in der Mitte des Kreises übergeblieben, also $24\frac{89527}{360000}$[2]), so dass von $24\frac{89527}{360000}$ bis zu 28 der Durchmesser des vierten Theiles von aussen gleich $3\frac{270473}{360000}$ sein wird. Für das zweite Viertel ziehe man die vorhin benutzte Zahl, also 196 von 588 ab, so bleiben 392. Davon ist die Quadratwurzel, nämlich $19\frac{7989}{10000}$[3]), der Durchmesser der zwei Viertel in der Mitte, so dass

3) $\sqrt{392}$ ist wirklich $= 19{,}7989$, so dass hier ganz genau gerechnet ist. Wie so genaue Werthe gefunden sind, ist nicht bekannt.

sie lo diametro de li 2 quarti de mezo, siche da $19\frac{7989}{10000}$ fina la $24\frac{89527}{360000}$
38 sie $4\frac{161923}{360000}$, | el diametro del secondo quarto. E per lo terzo quarto tray la prima quantita, cioe 196, de 392, resta 196, e la radix quadrata, cioe 14, sie el diametro del quarto de mezo, siche da 14 per fina $19\frac{7989}{10000}$ sie $5\frac{7989}{10000}$, el diametro del terzo quarto non precisamente.

21. Si tu volesse partire in 3 parte, tolle via la terza parte, e del resto la radix quadrata, como e fatto de sopra. E volendo partire in 2 parte, tolle via la mitade del quadrato del diametro, e del resto la
98′ radice, como dicho di sopra. |

22. Elle una peza de tera, la quale piu longa cha larga volte $3\frac{2}{5}$, et e p^{ts} 2. Adimando, quanto e longa e larga. Fa cossi. Fa la proporcione, cioe atroua duy numeri, che luno tenga laltro volte $3\frac{2}{5}$, chi e 5 e 17, perche 17 contiene 5 volte $3\frac{2}{5}$. E 5 e 17 multiplicato in sieme fa 85, el quale serualo. Poy fa de le p^{ts} 2 tabule, che sono 48, le quale 48 fanne $\frac{1}{4}$ de tabule, che sono 192. El quale e da multiplicare con 85 seruato, fara 16320, de la qual quantitade la radix quadrata e da partire per la proportione, cioe per 5 e per 17, da parsi luno dal lattro, et haueray la longeza e la largeza fatta.

23. Try compra una peza de tera, e ciaschuno paga tanti duchati per zozo, quanti zozi gli tocha in sua parte, e costo in tuto 144 ducati. Adimando, quanti zozi gli tocha per parte. Fa cossi. Piglia la radice quadrata de 144, chi e 12; poy troua 3 numeri, che multiplicati in si medisimi e giunte in sieme le multiplicatione abiano radice, como sarebe 2 e 3 e 6, perche 2 via 2 fa 4, e 3 via 3 fa 9, et 6 via 6 fa 36; azonto in seme 4 et 9 e 36 fa 49, la chuy radice he 7, numero partitore. Poy multiplica el numero, cioe 2, via 12, fa 24, partilo per 7, ne viene $3\frac{3}{7}$ zozi a uno; poy multiplica 3 via 12, fa 36, partilo per 7, ne viene zozi $5\frac{1}{7}$ per laltro; poy multiplica 6 via 12, fa 72, partilo per 7, ne vene $10\frac{2}{7}$
39 per lo terzo. Zonte in sieme queste 3 quantitade sono zozi $18\frac{6}{7}$, | e tanto fa la peza de la terra. E per saper la quantita de duchati per uno, fa cossi. Multiplica la prima quantita di zozi in si medesima, cioe $3\frac{3}{7}$, monta d̸ $11\frac{37}{49}$; poy multiplica zozi $5\frac{1}{7}$ in si medesimo, monta d̸ $26\frac{22}{49}$; poy multiplica zozi $10\frac{2}{7}$ in si medesimo, monta d̸ $105\frac{39}{49}$. Azonte insieme queste 3 quantita de duchati fano in soma d̸ 144, como ponessimo da prima.

24. El' e uno bocheto, che mena o͠z 12 de aqua fora de uno nauilio, ed e largo el ditto bocheto o͠z 10 e alto o͠z 12. Et vorra fare uno altro

von $19\frac{7989}{10000}$ bis zu $24\frac{89527}{360000}$ der Durchmesser des zweiten Viertels gleich $4\frac{161923}{360000}$ ist. Für das dritte Viertel ziehe die erste Zahl, nämlich 196, von 392 ab, dann bleibt 196. Die Quadratwurzel davon, das ist 14, ist der Durchmesser des innern Viertels, so dass von 14 bis zu $19\frac{7989}{10000}$ der Durchmesser des dritten Viertels gleich $5\frac{7989}{10000}$ nicht ganz genau sein wird.

21. Wollte man in drei Theile theilen, so ziehe man immer den dritten Theil ab und suche vom Reste die Quadratwurzel, wie oben geschehen ist. Um aber in zwei Theile zu zerschneiden, ziehe man stets die Hälfte des Quadrates des Durchmessers ab und aus dem Reste die Wurzel, wie ich oben sagte.

22. Es ist ein Landstück gegeben, das $3\frac{2}{3}$mal so lang als breit ist, und 2 ꝑ^s enthält. Ich frage, wie lang und breit es ist. Man suche das Verhältnis in ganzen Zahlen, das heisst, man suche zwei Zahlen, von denen die eine das $3\frac{2}{5}$fache der andern ist; es ist $5:17$, denn 17 enthält die 5 $3\frac{2}{5}$mal. Multipliciere 5 mit 17, das giebt 85 und merke das. Darauf mache aus den 2 ꝑ^s Tabulae, es sind 48, die $\frac{1}{4}$ Tabula ausmachen, das ist 192. Das ist mit den gemerkten 85 zu multiplicieren und macht 16320. Die Quadratwurzel dieser Grösse ist nach dem Verhältnis $5:17$ zu theilen, eins vom andern, so hat man die Länge und die Breite.

23. Drei kaufen ein Landstück und ein jeder bezahlt soviel Dukaten für den Zozo, soviel Zozi ihm auf seinen Theil zufallen; im Ganzen kostet es 144 Dukaten. In frage, wieviel Zozi jedem auf seinen Theil gebühren. Mache es so. Nimm von 144 die Quadratwurzel, sie ist 12. Dann suche drei Zahlen, die jede mit sich selbst multipliciert, und dann die drei Produkte zusammengezählt eine Quadratwurzel besitzen, wie es 2, 3 und 6 sind, denn $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $6 \times 6 = 36$ und 4, 9 und 36 zusammengezählt giebt 49, deren Wurzel 7 ist, der Theiler. Nun multipliciere die erste Zahl 2 mit 12, das macht 24, theile durch 7, so kommt $3\frac{3}{7}$ Zozi für den Ersten. Dann multipliciere 3 mit 12, macht 36; theile durch 7, so kommen $5\frac{1}{7}$ Zozi für den Zweiten. Darauf multipliciere 6 mit 12, macht 72, dividiere durch 7, giebt $10\frac{2}{7}$ Zozi für den Dritten. Diese drei Grössen addiert geben $18\frac{6}{7}$ Zozi, und so gross war das Landstück. Um die Zahl der Dukaten für einen jeden zu finden, mache es so. Multipliciere die erste Anzahl Zozi mit sich selbst, also $3\frac{3}{7}$, so kommen $11\frac{37}{49}$ Dukaten, dann multipliciere $5\frac{1}{7}$ Zozi mit sich selbst, so kommen $26\frac{22}{49}$ Dukaten; endlich multipliciere $10\frac{1}{7}$ mit sich selbst, so kommen $105\frac{39}{49}$ Dukaten. Alle diese drei Summen von Dukaten zusammengezählt machen zusammen 144 Dukaten, wie wir zuerst gesagt haben.

24. Es ist eine Öffnung, welche aus einem Schiffe 12 Unzen Wasser ablässt. Diese Öffnung ist 10 Unzen breit und 12 Unzen hoch. Man will

bocheto, che menara $\widetilde{oz}$ 18 del dito nauilio a quela medesima proporcione. Adimando la largeza e la alteza. Fa cosi. Multiplica la largeza del noto bocheto per le onze de quello, che voliamo sapere, cioe 10 via 18, fa 180 area. Poy fa la proporcione de la largeza e de lalteza del noto bocheto, cioe mette 12 sopra 10, como vedi qui: $\frac{12}{10}$, esquisali sera $\frac{6}{5}$, el qual 6 e 5 e da multiplicare in siema, fa 30; el qual 30 multiplicalo con 180 di sopra, fa 5400, de la qual somma la radix quadrata[1]) e da partire per la proportione, cioe per 6 e 5, e quelo, che ne vegnero, sera la largeza e la alteza del bocheto da fir fatto. E si como 6 contiene 5 volte $1\frac{1}{5}$, 39′ cosi si contegnera quelli numeri, che vegnera, luno alo altro. |

25. El quadrato de qual numero tu voy, ouero superficie tu voy, multiplica per $5\frac{1}{3}$, el radix radicis de quel, che ne vegnera, sera el lado del triangulo equilatero.

26. E a fare uno tondo, multiplica, che area tu voy, per $12\frac{4}{7}$, e de quello, che ne viene, la radice quadrata he la circunferentia.

27. El' e uno triangulo rectiangulo per faza 10 e longo 20 (Fig. 7), e la sua area 100. A volere trare uno, che sia area 50, ouero partire quelo per mezo, quanto sera lo per facia e per longo a quela medesima proporcione? Fa cosi. Fa la proportione de la facia sopra la longeza cosi, como qui, cioe 10 sopra 20 in quella forma $\frac{10}{20}$, squisali sono $\frac{1}{2}$; poy di 1, chi e sopra la riga, via 2, che de sotto, fa 2. Poy multiplica quello 2 per la area de quello triangolo, cioe 2 via 100, fa 200, del qual 200 la radix quadrata partila per la proporcione, cioe per 1 e per 2, e quelo, che ne vegnera, sera la longeza e la facia.

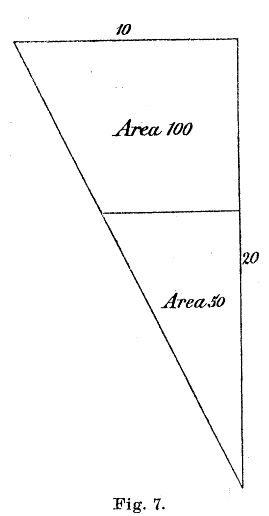


Fig. 7.

28. E se volesse $\frac{1}{3}$, piglia li $\frac{2}{3}$ de la area del tuto; e se ne volesse $\frac{1}{4}$, piglia li $\frac{3}{4}$ de la area. E se volesse li $\frac{1}{5}$, piglia li $\frac{4}{5}$ de la area del tuto, et sic de singulis, e fa como de sopra.

29. Ma nota, sel triangulo equilatero ouero isoceles, fa la proporcione de la mita de lo abaso 40 sopra tuta la perpendichulare, la quale | proporcione multiplica cun quella parte de quantita, che tu voy, operando, como ho dito de sopra, et haueray tuta la perpendichulare e la mitade de lo abaso, che se circhaua.

30. A chi volesse partire una peza de terra, che fosse per una testa

1) Radix 73 · 29 · 5; diuisa per 6 e per 5 ne viene 12 · 14 · 50 · 50 per 6, et per 5: 14 · 41 · 49

eine andere Öffnung herstellen, die 18 Unzen aus dem Schiffe abführen soll, nach demselben Verhältnis (von Breite und Höhe): ich frage nach der Breite und Höhe. Mache es so. Multipliciere die Breite der bekannten Mündung mit den Unzen derjenigen, welche wir berechnen wollen, also $10 \times 18 = 180$. Dann bestimme das Verhältnis der Breite zur Höhe der bekannten Öffnung, das heisst, setze 12 über 10, wie man es hier sieht, $\frac{12}{10}$, gekürzt wäre es $\frac{6}{5}$. Diese 6 und 5 sind zu multiplicieren, das macht 30; diese 30 multipliciere mit den obigen 180, so macht das 5400, und die Quadratwurzel dieser Summe ist durch das Verhältnis zu theilen, also durch 6 und 5, dann ist das Ergebnis die Breite und Höhe der zu konstruierenden Öffnung. Und so wie 6 die 5 $1\frac{1}{5}$mal enthält, so werden auch die sich ergebenden Zahlen sich gegeneinander verhalten.[1])

25. Das Quadrat einer beliebigen Zahl oder einer beliebigen Fläche multipliciere man mit $5\frac{1}{3}$, dann ist die vierte Wurzel des entstehenden Produktes die Seite des (ebenso grossen) gleichseitigen Dreiecks.

26. Um aber einen Kreis zu erhalten, multipliciere eine beliebige Fläche mit $12\frac{4}{7}$, dann ist die Quadratwurzel des Ergebnisses der Umfang des Kreises.

27. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck von der Grundlinie 10 und der Länge 20 (Fig. 7), und seine Fläche ist 100. Man will davon ein anderes abschneiden, dessen Fläche 50 ist, oder das gegebene halbieren: wie lang und wie breit wird es nach dem nämlichen Verhältnis sein? Mache es so. Suche das Verhältnis der Grundlinie zur Länge so wie hier, indem man nämlich 10 über 20 setzt in dieser Form $\frac{10}{20}$, gekürzt ist es $\frac{1}{2}$. Dann sage: 1, was über dem Strich steht, mal 2, das unten ist, giebt 2. Nun multipliciere diese 2 mit dem Inhalte des Dreiecks, also $2 \times 100 = 200$. Die Quadratwurzel dieser 200 theile dann nach dem Verhältnis, also von $1:2$, so ist dann das, was herauskommt, die Länge und die Grundlinie.

28. Will man $\frac{1}{3}$, so nimm $\frac{2}{3}$ von dem Gesamtinhalte weg; will man $\frac{1}{4}$, so nehme man $\frac{3}{4}$ des Inhaltes, und für $\frac{1}{5}$ nehme man $\frac{4}{5}$ des Gesamtinhaltes und so für die übrigen, und verfahre wie vorher.

29. Merke aber, ist das Dreieck gleichseitig oder gleichschenklig, so suche das Verhältnis der halben Grundlinie zu der ganzen Höhe. Dieses Verhältnis multipliciere mit dem grössern Theile, welchen man will, indem man so verfährt, wie ich oben gesagt habe, und erhält dadurch die ganze Höhe und die Hälfte der Grundlinie, die man sucht.

30. Will man ein Landstück theilen, das an einem Kopfende 6 Capezi

1) Die Wurzel ist 73 · 29 · 5; dividiert durch 6 und durch 5 kommt 12 · 14 · 50 · 50 für 6, und für 5: 14 · 41 · 49.

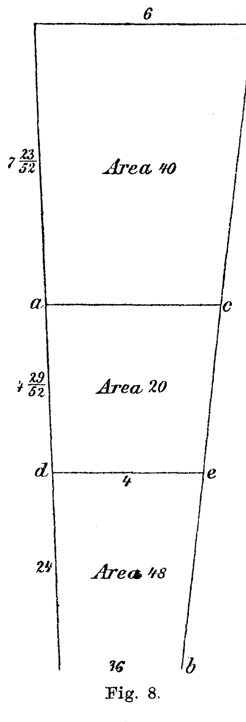


Fig. 8.

capezi 6 (Fig. 8), et per laltra capezi 4, e per longo capezi 12, e larea sua 60, prima fa cosi. Compisse la piramide in questo modo. Multiplica la testa de 6 per la longeza, chi e 12, fa 72, e partilo per la diferentia de la teste, chi e 2, ne viene 36, la longeza de la piramide. Cossi fatto, fa la area de tuta la piramide ouero de tuto lo triangulo, chi e 108, del qual 108 la radix quadrata sie $10\frac{2}{5}$ non aponto seruala. E poy fa larea de *bd*, cioe del arapente de la piramide, chi e 48; a la qual 48 azonzege quela parte de larea, che tu voy cauare de la dita peza de terra, cioe se voy partila per mezo, azonze la mita de larea de la dita peza de terra, e se voy $\frac{1}{4}$, azonze $\frac{1}{4}$, et sic de singulis. Partendo per $\frac{1}{3}$ ne troueremo adoncha $\frac{1}{3}$ de larea, chi e 20; azonto 20 a 48, fa 68, del qual 68 la radix quadrata sie $8\frac{1}{4}$ non aponto, seruala. E per atrouare donda chade la perpendichulare, multiplica la longeza de tuta la piramide per la radix de 68, perche le son le aree *dcad* e *dedb* azonte in sieme, chi e $8\frac{1}{4}$, via 36, che fa 297, e partilo per la radix de larea de tuta la piramide, chi e $10\frac{2}{5}$, che ne viene *ab* $28\frac{29}{52}$, detrato *db* 40′ 24 | resta $4\frac{29}{52}$, el caso de la perpendiculare. E per sapere la longeza de la perpendichulare, multiplica *de* per *ab* e partilo per *db*, et haueray *ac* la perpendichulare $4\frac{79}{104}$, e fatta.

31. Quando tu saperay larea de uno circhulo, e tu voray el suo diametro, azorze li $\frac{3}{11}$ de tutta larea a la ditta area, e la radix quadrata de ditta quantitade sera el diametro.

32. A volere fare uno triangulo equilatero, che sia doue volte tanto larea sua, como sia li try sui ladi azonti in sema, faray cosi. Dopia li 3 ladi del triangulo da fir fatto, fan 6, poy quadralo, cioe 6 via 6, fa 36; el quale 36 multiplicalo sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 192, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato; fatta.

33. E se volesse 3 volte tanto larea suo, como sarebe li ladi azonti in siema, toy 3 volte li ladi del triangulo, che sarebe 9, e poy quadra el dito 9, fara 81; el qual 81 multiplica sempre per $5\frac{1}{3}$, che fara 432, e la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

34. Quando larea de uno triangulo ambligonio e doy ladi noiando, atrouare el terzo lado, fa cosi. Parti larea del dito triangulo per la 41 mitade del lado mazore, et quello | multiplicalo per se medesimo, et quella

(Fig. 8), am andern 4 Capezi hält, und in der Länge 12 Capezi hat, und dessen Fläche 60 ist, so mache man es zunächst so. Man vollende es zu einem vollständigen Dreieck in folgender Weise. Multipliciere das Kopfende 6 mit der Länge, die 12 ist, das giebt 72, und theile das durch die Differenz der beiden Kopfenden, nämlich durch 2, so kommt 36, die Länge des ganzen Dreiecks. Nachdem diese gefunden, suche man den Inhalt des ganzen Dreiecks, der 108 ist. Von diesen 108 ist die Quadratwurzel nicht ganz genau $10\frac{2}{5}$; merke sie dir. Dann suche den Inhalt von bd, d. h. des Arapente des Dreiecks, er ist 48; zu diesen 48 füge denjenigen Theil des Inhaltes, den du von dem gegebenen Landstück abschneiden willst, hinzu, d. h., will man ihn halbieren, so addiert man die Hälfte des Inhalts des fraglichen Landstückes, will man $\frac{1}{4}$, so fügt man $\frac{1}{4}$ hinzu, u. s. w. Indem wir nun für $\frac{1}{3}$ theilen, suchen wir also $\frac{1}{3}$ des Inhalts, es ist 20. Nun ist $20 + 48 = 68$ und es ist $\sqrt{68} = 8\frac{1}{4}$, wenn auch nicht ganz genau. Auch dies verwahre. Um nun zu finden, wohin der Fusspunkt des Lothes fällt, multipliciere die Länge des ganzen Dreiecks mit $\sqrt{68}$, weil es die Flächen $dcad$ und $dcdb$ zusammengenommen sind, das ist ja $8\frac{1}{4} \times 36 = 297$, und theile durch die Wurzel aus der Fläche des ganzen Dreiecks, nämlich durch $10\frac{2}{5}$, so kommt daraus $ab = 28\frac{29}{52}$. Davon $db = 24$ abgezogen, bleibt $4\frac{29}{52}$, der Fusspunkt des Lothes. Und um die Länge des Lothes zu finden, multipliciere de mit ab und theile durch db, so erhält man ac das Loth $= 4\frac{79}{104}$, und ist gemacht.

31. Wenn man den Inhalt eines Kreises kennt, und wünscht seinen Durchmesser, so füge man $\frac{3}{11}$ des ganzen Inhaltes dem Inhalte hinzu, so ist die Quadratwurzel der erhaltenen Grösse der Durchmesser.

32. Um ein gleichseitiges Dreieck zu finden, das einen zweimal so grossen Flächeninhalt hat, als seine drei Seiten zusammengenommen sind, mache es so. Verdoppele die drei Seiten des zu suchenden Dreiecks, das macht 6, dann quadriere dies, $6 \times 6 = 36$; diese 36 multipliciere jedesmal mit $5\frac{1}{3}$, das giebt 192, dann ist die Quadratwurzel davon die Seite des verlangten Dreiecks. Fertig.

33. Will man die dreimal so grosse Fläche haben, als die drei Seiten zusammengenommen sind, so nimm die Seiten des Dreiecks dreimal, das wäre 9. Darauf quadriere genannte 9, das giebt 81. Diese 81 multipliciere immer mit $5\frac{1}{3}$, das macht 432, dann ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

34. Kennt man die Fläche eines stumpfwinkligen Dreiecks und zwei Seiten, und will die dritte Seite haben, so verfahre man so. Man theile die Fläche des gegebenen Dreiecks durch die Hälfte der grössern Seite und multipliciere das mit sich selbst und merke das Produkt. Darauf multi-

multiplicatione serua. Poy multiplica laltro lado in si medesimo, e quelo, che ne viene, tralo del seruato, sel si puo, ouero el seruato de quello, e del resto toy la radix quadrata, la qual radice tralla del primo lado, et lo rimanente multiplicalo in si medesimo, e quelo, che ne vegnera, azonzelo a lo numero, che tu seruasti, e quelo, che vegnera, la radix quadrata sara el terzo lado adimandato.

35. A metere el mazore triangulo, che se possa metere equilatero in uno tondo, fa cosi. Piglia li $\frac{3}{4}$ del diametro, e multiplicali contra laltro $\frac{1}{4}$, chi e rimasto, e la quantita, che fara, multiplicala per 4, e la somma, che fara, la radix quadrata sera el lado del triangulo adimandato.

36. A volere la quantita de una piramide tronchata, che sera quadra, e che sia 4 per facia, cioe la baso mazore, e che sia per lo abaso menore 2, e che sia per lo asale longo 10, como apare qui per figura (Fig, 9), fa cossi. Quadra lo abaso mazore, che fara 16, poy quadra lo abaso menore, che fa 4; azonti questi doy quadrati de li abasi fanno 20. Poy multiplica luno lado del abaso con laltro lado, cioe 2 via 4, fa 8; azonto con 20 fa 28, el qual 28 e da moltiplicare con la terza parte de lo asale, chi e $3\frac{1}{3}$, che fara $93\frac{1}{3}$, la quantita adimandata.[1]) | 41

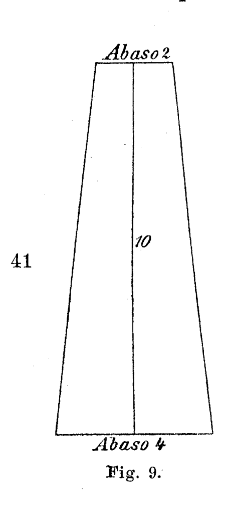


Fig. 9.

37. A volere la quantita de uno seratile, como he za segnato qui per figura (Fig. 10), che sia longo 10 de sotto, e lo abasso longo 6, e de sopra longo 8, e per lalteza 5 perpendichulariter, faray cosi. Multiplica la longeza mazore per la abasso, cioe 10 via 6, che fa 60, serualo. Poy multiplica la mitade de la longeza de sopra contra lo abasa, cioe 4 via 6, fa 24. Azonzelo cun el 60 seruato, fara 84, el quale 84 multiplicalo per la terza parte de 5, chi e la sua alteza, cioe $1\frac{1}{3}$ via 84, fara 140, la quantitade adomandata.

38. La proporcion del diametro a la circonferentia non he como 7 a 22, cioe $3\frac{1}{7}$, perche el e troppo, ne anche como e $3\frac{10}{71}$, perche el e pocho, secondo la demonstracione de ARCHIMEDE. La diferentia de $3\frac{1}{7}$ ad $3\frac{10}{71}$ sie $\frac{1}{497}$, e la otaua parte de $\frac{1}{497}$ sie $\frac{1}{3976}$; azonzelo a $3\frac{10}{71}$, fara $3\frac{39831}{282296}$, e 42 questa e la proporcion del diametro a la circonferentia.[2]) |

39. El' e da sapere secondo PTHOLOMEO, lo circulo sie per la circonferentia 360 gradi. Ma nota, che piu grandi sarebbe li gradi di uno

---

1) Hier ist genau richtig $V = (a^2 + b^2 + ab)\frac{h}{3}$.

2) Dieser seltsame Werth von π und seine Begründung ist bemerkenswerth: Es wäre danach $\pi \sim 3{,}14109$, was sehr von der Wahrheit entfernt ist.

pliciere man die andere Seite mit sich selbst und ziehe das Ergebnis von dem Gemerkten ab, wenn es möglich ist, oder das Gemerkte von ihm, und von dem Reste suche man die Quadratwurzel. Diese Wurzel nehme man von der ersten Seite weg und multipliciere den Rest mit sich selbst, das Ergebnis aber addiere man zu der gemerkten Zahl, dann ist die Quadratwurzel aus der Summe die verlangte dritte Seite.

35. Um in einen Kreis das grösste Dreieck einzubeschreiben, das sich als gleichseitiges einbeschreiben lässt, mache man es so. Man nehme $\frac{3}{4}$ des Durchmessers und multipliciere das mit dem andern Viertel, das übrig geblieben ist. Die erhaltene Grösse multipliciere man mit 4, und von der Summe, die das ausmacht, ist die Quadratwurzel die Seite des verlangten Dreiecks.

36. Zur Bestimmung des Volumens einer abgestumpften Pyramide, die quadratisch sei und zur Seitenkante 4 habe, das heisst die grössere Grundfläche, und für die kleinere Grundfläche 2, und deren Axe 10 lang sei, wie in der beigegebenen Figur (Fig. 9) zu sehen, mache man es so. Man quadriere die grössere Kante, das macht 16, dann quadriere man die kleinere, das macht 4. Beide quadratischen Grundflächen zusammen ergeben 20. Darauf multipliciere man eine Grundflächenkante mit der andern, also $2 \times 4 = 8$, zu 20 gezählt giebt 28. Diese 28 muss mit dem dritten Theile der Axe, das ist mit $3\frac{1}{3}$, multipliciert werden, das giebt $93\frac{1}{3}$, das verlangte Volumen.[1])

37. Um das Volumen eines Prisma, wie wir es hierneben in der Figur gezeichnet haben (Fig. 10), zu finden, das unten 10 lang sei, und die Grundlinie sei 6, die obere Kante sei 8 lang, und die senkrechte Höhe sei 5, mache es so. Multipliciere die grössere Länge mit der Grundlinie, also $10 \times 6 = 60$, und merke das. Dann multipliciere die Hälfte der obern Länge mit der Grundlinie, also $4 \times 6 = 24$. Addiere das zu den gemerkten 60, so macht das 84. Diese 84 multipliciere mit dem dritten Theile von 5, welches seine Höhe ist, also $1\frac{2}{3} \times 84$, so ist das das verlangte Volumen.

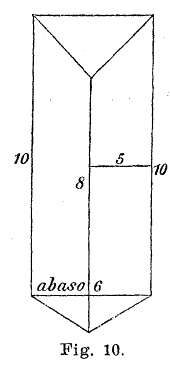
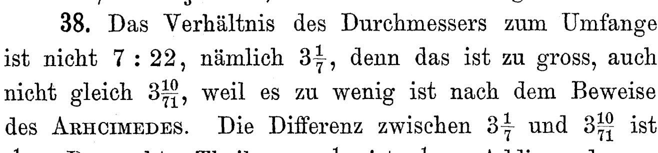


Fig. 10.



38. Das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange ist nicht $7:22$, nämlich $3\frac{1}{7}$, denn das ist zu gross, auch nicht gleich $3\frac{10}{71}$, weil es zu wenig ist nach dem Beweise des Arhcimedes. Die Differenz zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ ist $\frac{1}{497}$. Der achte Theil von $\frac{1}{497}$ ist $\frac{1}{3976}$. Addiere das zu $3\frac{10}{71}$, so kommt $3\frac{39831}{282296}$, und das ist das Verhältnis des Durchmessers zum Umfange.[2])

39. Nach Ptolemäus ist bekannt, dass der Kreis einen Umfang von 360 Graden hat. Man beachte aber, dass die Grade eines grossen Kreises,

grande circhulo, como he lo celo, che non sarebbe quello de una citade; et etiamdio e da sapere, che li diametri sie 120 gradi. Ma questi non sono gradi, como li gradi del circhulo, perche lo circhulo e mazore chal diametro piu cha 3 volte, perche la chomuna opinione tene, chel diametro sia $3\frac{1}{7}$ a la circonferentia. Ma ARCHIMENIDES dice luy, che non e cosi: dice, che lo he $3\frac{10}{71}$.

40. Notta, che dal centro de la terra a la spera de Saturno sie meia, de braza 4000 per miglio, sie 73387747, e quelo se chiama semidiametro spere Saturni. A volere sapere la circunferentia, multiplica lo diametro per $3\frac{10}{71}$, che fa $460999086\frac{56}{71}$. E per sapere, quante meia contiene in uno grado, parti la circunferentia per 360, che ne vene $1280553\frac{241}{12780}$, e tanta miglia he 1° gr°.

41. El e sono 2 balle de cera, luna e per el suo diametro o͞nz 4, e pexa libre 8; e una altra e per el suo diametro o͞z 6: adomando, quanto debe pexare. Dobiamo chubichare li diametri, cioe prima 5 via 4, fa 16, e 4 via 14 fa 64; per la seconda 6 via 6 fa 36, e 6 via 36 fa 216. Hore dice cossi: se 64 pexa 8, che pexara 216? Dobiamo multiplichare 8 via 216, che fa 1728, e partire per 64, che ne viene 27, e libre 42′ 27 pexara la seconda balla de o͞nz 6 per diametro. |

42. Cescaduna quantita de numero diuisa per 2 altri numeri, cescaduna de le prime parte auanza la seconda, si como auanza el mazore numero el minore.

43. A volere sapere la superficie de la spera, multiplica larea del mazore circhulo per 4, et aueray la superficie, la quale se la multiplicaray per la sexta parte del suo diametro, aueray la quantita, che la tiene.

44. A volere la capacitate de una piramide rotonda, multiplica la area del abasis, cioe de la tondeza mazore, in la terza parte de la sua alteza, et haueray la sua tenuta.

wie etwa des Himmels, viel grösser sind, als die von einer Stadt sein würden. Es ist weiter zu merken, dass die Durchmesser 120 Grade haben. Letztere sind aber keine Grade, wie die Grade des Kreises, da der Kreis mehr als dreimal so lang ist als der Durchmesser, weil die gewöhnliche Meinung sagt, dass der Kreis das $3\frac{1}{7}$fache des Durchmessers sei. Aber Archimedes selbst sagt, dass das nicht so ist: er sagt, es sei $3\frac{10}{71}$.

40. Merke, dass vom Mittelpunkte der Erde bis zu der Sphäre des Saturn 73 385 747 Meilen sind, 4000 Ellen für die Meile, und das nennt man den Halbmesser der Sphäre des Saturn. Um den Umfang kennen zu lernen, multipliciere man den Durchmesser mit $3\frac{10}{71}$, so macht das $460\,999\,086\frac{56}{71}$, und um zu wissen, wieviele Meilen er auf einen Grad enthält, theile diesen Umfang durch 360, dann ergiebt sich $1\,280\,553\frac{241}{12780}$, soviele Meilen enthält ein Grad.

41. Gegeben sind zwei Wachskugeln. Die eine hat einen Durchmesser von 4 Unzen und wiegt 8 Pfund, die andere hat einen Durchmesser von 6 Unzen, ich frage, wieviel sie wiegen wird. Wir müssen die Durchmesser kubieren. Also erstens $4 \times 4 = 16$ und $4 \times 16 = 64$, und für die zweite $6 \times 6 = 36$ und $6 \times 36 = 216$. Nun sprich so. Wenn 64 wiegen 8, wieviel wiegen 216? Wir müssen 8 mit 216 multiplicieren, das giebt 1728, und durch 64 dividieren, dann kommt 27. Also wiegt die zweite Kugel von 6 Unzen Durchmesser 27 Pfund.

42. Wenn man eine beliebige Zahl durch zwei andere Zahlen dividiert so wird jeder erste Theil den zweiten um soviel übertreffen, als die grössere Zahl die kleinere übertrifft.

43. Um die Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, multipliciere man den Inhalt eines grössten Kreises mit 4, so erhält man die Oberfläche. Wenn man sie mit dem sechsten Theile ihres Durchmessers vervielfacht, so erhalt man den körperlichen Inhalt.

44. Um das Volumen einer runden Pyramide zu finden, multipliciere man den Inhalt der Grundfläche, das heisst der grössten Rundung, mit dem dritten Theile ihrer Höhe, so hat man das Volumen.

Tabula Sinuum. (360 : 120)						
Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.		
Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a
0	30	179	30	0	31	25
1	0	179	0	1	2	50
1	30	178	30	1	34	14
2	0	178	0	2	5	38
2	30	177	30	2	37	2
3	0	177	0	3	8	25
3	30	176	30	3	39	46
4	0	176	0	4	11	7
4	30	175	30	4	42	27
5	0	175	0	5	13	46
etc.		etc.		etc.		
85	0	95	0	59	46	19
85	30	94	30	59	48	35
86	0	94	0	59	51	15
86	30	93	30	59	53	17
87	0	93	0	59	55	3
87	30	92	30	59	56	34
88	0	92	0	59	57	48
88	30	91	30	59	58	45
89	0	91	0	59	59	27
89	30	90	30	59	59	51
90	0	90	0	60	0	0

Tabula Sinuum. (22 : 7)						
Arcus augmentati per dimidium gradum.				Corde mediate.		
Gr.	m^a	Gr.	m^a	Gr.	m^a	2^a
0	30	179	30	0	29	59
1	0	179	0	0	59	59
1	30	178	30	1	29	57
2	0	178	0	1	59	55
2	30	177	30	2	29	53
3	0	177	0	2	59	51
3	30	176	30	3	29	47
4	0	176	0	3	59	43
4	30	175	30	4	29	37
5	0	175	0	4	59	30
etc.		etc.		etc.		
85	0	95	0	57	3	18
85	30	94	30	57	5	47
86	0	94	0	57	8	22
86	30	93	30	57	9	57
87	0	93	0	57	11	29
87	30	92	30	57	13	5
88	0	92	0	57	14	14
88	30	91	30	57	15	10
89	0	91	0	57	15	50
89	30	90	30	57	16	13
90	0	90	0	57	16	22

IV.

DIE ALGEBRA
DES INITIUS ALGEBRAS AD YLEM GEOMETRAM MAGISTRUM SUUM.

Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum.

Einleitung.

Von der nachfolgenden Arbeit eines deutschen Mathematikers des XVI. Jahrhunderts haben sich vier Handschriften erhalten. Diejenige, welche mir zuerst zu Händen kam, scheint mir die vorzüglichere zu sein, aber keine von allen vieren ist die Originalhandschrift. Jede hat beim Abschreiben an einer oder der andern Stelle Auslassungen, durch Gleichklang der Worte veranlasst, an anderer Stelle wieder Zusätze gemacht. Der eigentliche Text ist jedoch, so weit sie ihn enthalten, ein und derselbe. Jede einzelne Handschrift hat aber die Orthographie nach ihrer Schreib- oder Mundart geregelt, so dass ich gezwungen war, einer derselben genau zu folgen und von Angabe der Abweichungen im Allgemeinen abzusehen, so dass unter dem Texte nur wirkliche Textänderungen kurz bemerkt sind.

Die Handschrift, welcher ich folge, bewahrt die königl. Universitätsbibliothek zu Göttingen unter der Bezeichnung *Codex Gotting. Philos. 30.* Es ist eine Papierhandschrift in Folio von 205 beschriebenen und numerierten Blättern. Sie enthält der Reihe nach:

Blatt 1′—150′: Den im Nachfolgenden abgedruckten Text. Auf Blatt 1 steht der Vermerk: „Auf einer hiesigen Auction erkauft (vid. Manuale A. 1808 p. 77).“ Blatt 1′ enthält folgende Inhaltsangabe des ganzen Werkes:

„Libri Algebrae sunt octo.

Primus de octo equationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus de quantitatibus additis et diminutis seu pregnantibus.

Tertius de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus de binomiis et de comitibus eorundem secundum 13 numeros irrationales.

Sextus de clavibus numerorum in genere ad cunctas coniecturas propositionum sive questionum.

Septimus de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus de datis absolutis numerorum secundum claves examinatis.

Auf Blatt 2 befindet sich der Titel: „*Algebrae Arabis Arithmetici viri Clarissimi Liber ad Ylem Geometram praeceptorem suum.*

Anno MDXLV. 2da Septembris foeliciter incipit.“

Auf derselben Seite hat ein späterer Besitzer geschrieben:

„Georgius Manitius Lowitz MDCCLIIj.“

Blatt 2′ ist leer, auf Blatt 3 beginnt dann der „Prologus in Algebram“. Nur die drei ersten Bücher sind vorhanden, aber an der Spitze von Blatt 151 steht der Vermerk: „Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum.“ Dass dieser zweite Band sich erhalten hätte, ist mir nicht bekannt.

Blatt 151′—176′: „Algorithmus de datis (Jordani Nemorarii).“[1] Darin Blatt 152—153 eine Einleitung aus späterer Zeit.

Blatt 176′—185: Anhänge zur vorhergehenden Arbeit.

Blatt 186—187: Arithmetische Notiz, beginnend: „*Minuta est quadrata.*“

Blatt 187′—189: „*Residui regula vera. Numeros, qui per propositum numerum divisi datos numeros residuant, invenire.*“

Blatt 190—202′: „*Tractatus de tribus notis.*“[2]

Blatt 203—205: „Fragment der Trigonometrie des Levi ben Gerson.“[3]

Auf Blatt 160, einem eingelegten Zettel, sind folgende Gleichungen geschrieben:

„Aequationes.

6 ʒʒ + 1 ʒ aequalis 5 ȼ + 115920. facit?

1 ʒʒ + 1 ȼ aequalis 4 ʒ + 3 𝔯 + 2. facit?

1 ß + 10 ʒʒ + 18 ȼ + 352 aequalis 88 ʒ + 328 𝔯. facit?

1 ß aequalis 44 ʒ + 92 𝔯 — 16 ʒʒ — 45 ȼ + 48. facit?

1 ʒȼ — 6 ß aequalis 12 ʒʒ — 52 ȼ — 60 ʒ + 96 𝔯 + 80. facit?

1 ʒȼ + 27 ß + 463 ʒ + 22950 aequalis 113 ʒʒ + 669 ȼ + 4245 𝔯. facit?

3 biß + 513 ȼ + 1080 ʒ + 96 𝔯 aequalis 4 ʒȼ + 66 ß + 3 ʒʒ + 620?

1) Abgedruckt in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik II, S. 125—166 und Zeitschrift für Math. und Physik XXXVI, 1—23; 41—63; 81—95; 121—138.

2) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 3. Folge I, 380—390.

3) Abgedruckt in Bibliotheca Mathematica 2. Folge XII, 103—107.

facit 1 ꝛc ist 10. frag nach den andern radicibus, so diese aequation vermag. Auch wie die Gegenaequation beschaffen sey, darinn obige wahre radices alhie die gedachten, vnd alhie die gedachten in obiger die wahren seindt etc.“ 1)

Worauf sich die Behauptung CANTOR'S, Vorlesungen II^2, 612 gründet, dass unsere Handschrift im Besitze des Schreibkünstlers STEPHAN BRECHTEL, der in Nürnberg 1574 starb, gewesen sei, ist mir nicht bekannt. Dem Dialekte nach dürfte süddeutsche Herkunft wohl richtig sein.

Die drei andern Handschriften unserer Algebra besitzt die königl. öffentliche Bibliothek zu Dresden. Auch sie konnte ich, wie die Göttinger, durch die Liberalität der beiderseitigen Bibliotheksvorstände in den Räumen der hiesigen königl. Gymnasialbibliothek benutzen, und sage ich dafür allen betheiligten Faktoren verbindlichsten Dank.

Von den Dresdner Handschriften ist die am sorgfältigsten ausgeführte die, welche heute die Bezeichnung *Mspt. Dresd. C. 405* trägt. Sie ist auf Pergament vorzüglich geschrieben, wie der Einband ausweist, für Kurfürst AUGUST von Sachsen. Dieser Einband ist nämlich von rothem Maroquin, mit Goldschnitt und Goldpressung das Wappen des genannten Fürsten und seiner Gemahlin ANNA darstellend. In dem Wappen des Kurfürsten stehen die Initialen: A(ugust) H(erzog) Z(u) S(achsen) K(urfürst). Ihre Entstehungszeit ist also zwischen die Jahre 1553—1586 zu setzen, und sie ist daher jedenfalls später entstanden als die 1545 angefangene Göttinger Handschrift.

Es sind 170 beschriebene Quartblätter, denen drei Vor- und vier Nachblätter, sämtlich ebenfalls Pergament, hinzugethan sind. In ihr ist einzig und allein unsere Algebra enthalten, der sich aber am Schlusse ein Fragment eines vierten Buches anschliesst, das aber dem oben mitgetheilten Inhaltsverzeichnis entsprechend als fünftes zu bezeichnen wäre, da es von den Binomien und Recisen EUKLID'S handelt. Während das Göttinger Manuskript, wie ich oben andeutete, den süddeutschen Ursprung verräth, ist die Sprache der Handschrift *C. 405* so ausgesprochen sächsisch, dass man auch dadurch seinen Ursprung nach Dresden oder Leipzig verlegen

1) Aus dem Wortlaut geht wohl unzweideutig hervor, dass der Verfasser dieser Aufgaben wusste, dass jede derselben mehr als eine Lösung besass, und dass durch Veränderung der Vorzeichen die positiven Lösungen (das sind seine wahren) sich in gleich grosse negative (das sind seine gedachten), und zugleich die negativen in gleich grosse positive verwandeln lassen. Dass seine Angabe, $x = 10$ sei eine Lösung der letzten Gleichung, nicht zutrifft, hebt die Wichtigkeit der eben hervorgehobenen Kenntnis unseres Verfassers für die Geschichte der Algebra nicht auf.

würde, wenn die Beschaffenheit der Handschrift das nicht schon von selbst an die Hand gäbe. Diese Handschrift entbehrt des im Göttinger Codex enthaltenen Titels. Sie beginnt nämlich auf dem mit 1 bezeichneten Blatte sofort mit: *„Prologus. Hie hebet sich ahn das Buch* Algebre *genandt Gebra vnnd Almuchabola tzu deutsch"* u. s. w. Das im Mspt. Gott. Philos. 30 auf Blatt 1[b] enthaltene Inhaltsverzeichnis hat sie zwischen dem *Prologus* und dem Briefe des *Initius Algebras ad Ylem magistrum suum* eingeschoben, fügt aber noch ein *„Nonus liber Compilatio super Algebram tam latina quam theutunica"* hinzu, was wohl die Absicht des Schreibers unserer Handschrift andeuten soll, eine solche Sammlung von Aufgaben hinzuzufügen.

Die zweite Dresdner Handschrift: *Mspt. Dresd. C. 349* ist auf Papier in Folio von 155 Blättern. Da das erste Blatt, das neuere Schmutzblatt nicht eingerechnet, mit II bezeichnet ist, so dürfte ein Blatt, auf dem der *Prologus in Algebram* gestanden haben wird, verloren gegangen sein. Die Blätter und Lagen sind vielfach verbunden. Zwischen Blatt 41 und 42 ausserdem 6 nicht bezeichnete Blätter eingeschoben. Wenn man die Reihenfolge so nimmt: II, III, 137′, 137, V′, V, VI′, VI, VII—XLI, XLII—51, Eingelegte Blätter 6, 5, 1, 2, 3, 4, Blatt 52—78, 90—136, 138—150, 80—89, 79′, 79, so ist der vollständige Text der drei ersten Bücher vorhanden, nur fehlt am Ende ebenfalls ein Blatt, die letzte halbe Seite des Göttinger Manuskriptes. Das vorliegende Manuskript beginnt also auf Blatt II mit den Worten: *„Initii Algebrae Arabis viri clarissimi Ad sommum Mathematicum eo tempore geometram Ylem Prologus feliciter incipit."* Hier hat irgend Jemand über Initii mit Bleistift die Bemerkung gemacht: Anitii (Boetii)? Ebenso steht neben *sommum* am Rande: *Dominum?* Beides natürlich ganz unzulässige Konjekturen. Der Dialekt dieser Abschrift nähert sich mehr der Göttinger Handschrift als dem *Mspt. Dresd. C. 405,* ist aber doch ein anderer, als der der erstern.

Der letzte mir bekannte Codex unserer Algebra ist das *Mspt. Dresd. C. 8.* Dass er unsere Algebra, wenn auch nur theilweise enthält, ist dem Verfasser des Katalogs entgangen. Er beginnt nämlich nicht wie die andern mit dem Titel: *Initii Algebrae viri Clarissimi* u. s. w., sondern erst mit dem 9. Kapitel des ersten Buches der ganzen Arbeit: *„Capitulum nonum de secunda propositione Algebrae Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio."* Ausserdem fehlen und sind augenscheinlich überhaupt nie vorhanden gewesen die Kapitel 20—25 des ersten Buches und das ganze zweite Buch. Das 19. Kapitel füllt nämlich gerade die Vorderseite von Blatt 13, dann ist Blatt 13′ leer und auf Blatt 14[r] beginnt der *Liber tertius Algebrae.* Dafür hat aber unsere Handschrift dasselbe Fragment eines vierten Buches erhalten, das auch *C. 405* aufbewahrt hat. Im

Ganzen umfasst sie 66 in den untern rechten Ecken mit Bleistift gezählte Folioblätter in Papier. Zwischen Blatt 29 u. 30 liegt ein Konvolut Zettel, auf denen hier und da ein paar Zahlen geschrieben sind. Blatt 64 und 65 sind leer, auf Blatt 66 finden sich ein paar geometrisch-algebraische Konstruktionen. Es werden nämlich das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 4 und 8 und das Rechteck mit den Seiten 8 und 12 durch Vermittelung eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 6 und 12 sind, in ein Rechteck zusammengezogen mit den Seiten $\sqrt{80}$ und $\sqrt{180}$, den Hypotenusen der beiden benutzten rechtwinkligen Dreiecke. Darüber steht:

„$\sqrt{14400} = 120$, *tantumdem de* $\begin{array}{r} 96 \\ 24 \\ \hline 120. \end{array}$“

Die vorliegende Arbeit hat bis jetzt die Aufmerksamkeit der Geschichtsforscher der Mathematik nur insofern erregt, als in derselben die wundersamsten Kombinationen und Verwechslungen von Persönlichkeiten vorkommen, und man mit einigen von ihnen überhaupt nichts anzufangen wusste. Wer sich aber die Mühe giebt den nachfolgenden Abdruck wirklich durchzulesen, wird dagegen über die Kenntnis unseres Autors in der Algebra erstaunt sein, und nur bedauern, dass nicht auch die versprochenen Bücher 4—8, beziehungsweise 9, sich erhalten haben. Nach Andeutungen im Texte der erhaltenen Bücher müssen die verloren gegangenen auch *Gleichungen des dritten Grades* behandelt haben. Dass unser Buch nicht auf Muhamed ben Mûsâ Alchwarîzmî zurückgeht, ist klar, obwohl der deutsche Bearbeiter diesen wohl kennt, aber ihn mit dem Propheten Muhamed verwechselt. Ob das Werk überhaupt in seinem lateinischen Texte wirklich einen Araber zum Verfasser hat, oder ob der deutsche Kommentator sich einen solchen fingiert, lasse ich dahin gestellt. Trotz der Willkür, mit welcher Zeit- und Personenfragen behandelt werden, sind doch manche Bemerkungen, die von guter Geschichtskenntnis zeugen. So wird z. B. den Indern nachgerühmt, dass sie hervorragende Rechenmeister gewesen seien; auf sie wird mit Recht die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades zurückgeführt, die sogenannte *Regula virginum*. Da auch die Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung behandelt wird, so würde, wenn der lateinische Text wirklich eine Übersetzung aus dem Arabischen darstellt, die Bekanntschaft mit dieser Regel auch den Arabern zugestanden werden müssen.

Wenden wir uns jetzt zur Feststellung des als Yles bezeichneten Geometers, über den ich hoffe, volle Klarheit geben zu können. Die von dem angeblichen Verfasser unserer Algebra, soweit sie lateinischen Text besitzt, dem Yles zugeeigneten Lehrsätze sind nichts weiter als die ersten



sechs Lehrsätze des 2. Buches der Geometrie EUKLID'S, so dass die Wahrscheinlichkeit vorliegt, EUKLIDES sei mit YLES gemeint, was ja nach CANTOR dadurch fast zur Gewissheit würde, als YLES sich mit einem arabischen Worte decken soll, das EUKLID als *Stoicheiotes* bezeichnen würde. Das alles blieb aber nur Konjektur, besonders noch im Hinblick darauf, dass im deutschen Kommentare unserer Algebra selbst darauf hingewiesen wird, dass im 2. Buche EUKLID'S, der mit Namen genannt wird, dieselben Lehrsätze sich finden, welche INITIUS ALGEBRAS als dem *dritten* Buche der Geometrie des YLES entnommen angiebt. Was Letzteres, nämlich die Erwähnung eines dritten Buches, angeht, so ist das darauf zurückzuführen, dass man die Erklärungen, Petitionen und Axiome des ersten Buches EUKLID'S als ein selbständiges Buch annahm, dann die Lehrsätze des ersten als das zweite und folgerichtig das zweite als drittes bezeichnete. Nun hat mir aber das *Msc. Mathem. 8⁰. 8* der Landesbibliothek zu Kassel den Schlüssel geliefert, aus welchem die Identität zwischen YLES und EUKLIDES wohl sicher hervorgehen dürfte.[1] Diese Handschrift, ein Kommentar zu den acht ersten Büchern EUKLID'S, beginnt folgendermaassen:

„*Commentum in librum introductorium elementorum.*

Credimus suae quemque artis et auctorem et disputatorem optimum esse, quae etiam cogitatio tunc eruditissimum divi PLATONIS pectus attigit, dum conductores sacrae arae de modo et forma eius secum sermonem conferre conductos ad EUCLIDEM geometram ire iussit, scientiae eius cedens, immo professioni. Fuit enim EUCLIDES teste LAERTIO geometra Megarensis insignis, vel, ut alii dicunt, EUCLIDES non est proprium nomen, sed appellativum, id est *Ysagogicus,* ELIAS autem est eius proprium nomen, et dicunt, PLATONEM non remissise ad personam, sed ad librum, qui dicitur EUCLIDES, id est *Introductorius.* Non enim fuisse PLATONEM et huius libri auctorem contemporaneos horum opinio est. Non autem aestimandum, quod PLATO propterea, quia ignarus geometriae vel inferior cuiquam mortalium fuerit, arae sacrae conductores responso vacuos reiecerit; cessit enim non doctiori, sed professioni. PLATO enim philosophiam, EUCLIDES vero, vel secundum alios ELIAS, geometriam profitebatur. Haec de auctore libri sufficiant."

Hieraus geht unzweideutig hervor, dass im Mittelalter geglaubt wurde, der eigentliche Name des Verfassers der Elemente sei ELIAS, und EUKLIDES sei der Name seines Werkes. Dass ELIAS und YLES nur Formen ein und

1) Auch diese Handschrift habe ich in dem hiesigen städtischen Archive benutzen dürfen, was ich hier dankend anerkennen möchte.

desselben Wortes sind, ist augenfällig. Es ist hier also eine Verschiebung insofern eingetreten, als das Wort *Stoicheia*, das sich mit *Ysagogicus* dem Sinne nach deckt, für Übersetzung des Eigennamens EUCLIDES gehalten, und umgekehrt jene *Stoicheia* als der wirkliche Name EUKLID's mit ELIAS-YLES übersetzt wurden. Wenn wir heutigen Tages sagen: „Er kennt seinen EUKLID gut", so begehen wir damit eine ähnliche Verwechslung, da wir ja auch den Verfassernamen für sein Werk einschmuggeln.

Es ist wohl kaum zweifelhaft, dass auch die Form ELIAS für den Verfasser der Elemente auf arabische Tradition zurückgeht, und nur wegen des andern Übersetzers nicht die Form YLES gewählt ist. Dem deutschen Kommentator unserer Algebra aber, der im XVI. Jahrhundert von einem dritten Buche des YLES las, zugleich aber auch dieselben Sätze im zweiten Buche EUKLID's fand, ist die Identifikation beider nicht klar geworden. Auch im Kommentar des AN-NAIRIZI zum EUKLID ist der Theil, welcher sich mit den Erklärungen, Petitionen und Axiomen des ersten Buches befasst, vollständig in sich abgeschlossen und bildet einen Abschnitt für sich, so dass es gar nicht unwahrscheinlich ist, dass bei den Arabern wirklich eine andere Zählweise der Bücher beliebt worden ist, besonders bei kommentierten Ausgaben.

Die Arbeit selbst zerfällt von selbst in zwei Theile. Der erste umfasst die lateinische Abhandlung nebst der Übersetzung des deutschen Bearbeiters, der zweite dann dessen ausführlichen Kommentar. Wäre nur der lateinische Text nebst Übersetzung erhalten, so würde aus der ganzen Arbeit nicht viel zu machen sein, da erst der Kommentar zeigt, wie dieser oft sehr unklare Text aufgefasst werden muss. Liest man den Kommentar, so sieht man, dass in dem Texte wirklich das erkennbar enthalten ist, was darüber gesagt ist. Es würde aber ohne solche Beihilfe für einen erstmaligen Leser schwer fallen, alles das sofort in dem Texte zu erkennen. Der lateinische Text giebt sich als eine Übersetzung aus dem Arabischen aus, seine Form jedoch hat nichts von arabischen Texten an sich, wie sie in andern lateinischen Übersetzungen des Mittelalters uns erhalten sind, so dass man zweifelhaft sein könnte, ob die behauptete Abstammung Wirklichkeit ist, doch glaube ich trotz alledem sie aufrecht erhalten zu müssen. Die für die technischen Ausdrücke gebrauchten Zeichen aber sind die im XVI. Jahrhundert üblichen und stammen sicherlich nicht aus dem Arabischen, sondern sind aus Italien importiert, worauf schon die Multiplikation der Potenznamen, nicht die Addition derselben hinweist. Die Formen der Potenzen der Unbekannten sind der Reihe nach

	𝔑,	𝔯,	𝔷,	𝔠,	𝔷𝔷,	𝔰,	𝔷𝔠,	𝔟𝔰,	𝔷𝔷𝔷,	𝔠𝔠
für	x^0,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9

und werden gelesen: *Dragma, res* oder *radix, zensus, cubus, zensus de zensu, sursolidum, zensicubus, bissursolidum, zensus zensui de zensu, cubus de cubo,* Die Zeichen + und — sind hier nicht nur als Additions- und Subtraktionszeichen, sondern als wirkliche Vorzeichen gebraucht worden. Das benutzte Wurzelzeichen ist ein starker Punkt mit daranhängendem nach oben gezogenem Schwanze, also so: ∫. Ihm wird unmittelbar angehängt das Zeichen derjenigen Potenz, als deren Wurzel es gebracht werden soll; so ist ∫ʒ die Quadratwurzel, ∫cℓ die Kubikwurzel, ∫ccℓ die neunte Wurzel u. s. w. Im Codex *C. 8* ist diese Angabe nicht neben das Wurzelzeichen, sondern oben gleichsam als Exponent geschrieben. Sollen mehrere Grössen addiert und dann aus ihnen zusammen die Wurzel gezogen werden, so steht neben dem Wurzelzeichen nicht das Funktionszeichen, sondern die Abkürzung cs, d. h. *communis,* das Funktionszeichen aber hinter dem ganzen Ausdruck, der ausserdem noch in einem Winkelhaken (*Gnomon*) eingeschlossen ist. Z. B.

∫cs |8 + ∫22 ʒ, das ist $\sqrt{8+\sqrt{22}}$.

Dieser Gnomon hat dabei die Bedeutung, dass das von ihm Eingeschlossene keine Länge sondern eine Potenz bedeutet. So ist die einfache 8 eine Länge oder einfache Zahl, dagegen |8 ʒ ein Quadrat von acht Flächeneinheiten, dessen Längeneinheit ∫ʒ |8 ist. Ebenso wäre |8 cℓ ein Würfel von 8 Kubikeinheiten und ∫cℓ |8 die dazugehörige Kante u. s. w. Ein zweifacher Punkt mit dem Schwanze an dem letzten bedeutet stets die Wurzel aus der Wurzel. Z. B. ∫cℓ |88 würde heissen Kubikwurzel aus der Kubikwurzel von 88. Sie ist mit ∫ccℓ 88 identisch, wird aber nur benutzt, wenn der Radikand eine sogenannte Mediale im Euklidischen Sinne ist.

Nach einer kurzen Einleitung des deutschen Kommentators, die an Abenteuerlichkeit und Durcheinanderwerfung von Zeiten und Thatsachen ihres Gleichen sucht, folgt ein dem supponierten Verfasser, Initius Algebras, zugeschriebener Brief an seinen Lehrer Yles, der ihn gebeten haben soll, ihm zu erklären, wie aus den Sätzen seiner Geometrie die in der mittelalterlichen von den Arabern stammenden Algebra betrachteten sechs Unterfälle der Gleichungen des ersten und zweiten Grades gefolgert werden können. Darauf werden die ersten sechs Sätze des zweiten Buches Euklid's in der erwähnten Weise durchgenommen, und aus ihnen die gewöhnlichen Gleichungformen und Auflösungen bewiesen. Es sind das bekanntlich

$$ax = b;\ ax^2 = bx;\ ax^2 = b;\ ax^2 + bx = c;\ ax^2 + c = bx;\ ax^2 = bx + c.$$

Zu jeder wird ein abenteuerliches Beispiel, in welchem Männer der verschiedensten Zeiten in Beziehung mit einander gebracht werden, gestellt

und aufgelöst. Nun erst beginnt die eigentliche Algebra oder, wie unser Verfasser sie nennt, Gebra und Almuchabola, für ihn ist ja ALGEBRAS der Verfasser des Buches. Nach Besprechung der cossischen Zeichen ϑ𝒞, 𝓇, ʒ, 𝒸, ß u. s. w. werden dann die von unserem Verfasser beliebten acht Arten der Gleichungen behandelt, die sich bei weitem über das hinaus erstrecken, was in dem vorbereitenden Briefe auseinandergesetzt ist. In seine erste Gleichung sind alle Formen eingeschlossen, die aus $ax^n = bx^{n-1}$ entstehen, und obwohl er sie nur bis $n = 9$ ausdehnt, so ist doch durch die Bemerkung, dass es nicht üblich sei, weiter zu gehen, angedeutet, dass die Wirkungsweise auch auf die folgenden Potenzen sich erstreckt.

Ähnliches gilt von allen übrigen Gleichungsformen. So gehen die nächsten drei auf $ax^{n+m} = bx^n$ zurück, wo m höchstens gleich 4 genommen wird, weil man eben höhere Wurzeln als die vierte nicht auszuziehen gewohnt war. Da aber unser Bearbeiter die Wurzeln bis zur 9. Potenz auszuziehen lehrt, so ist für ihn eine Ausdehnung bis zu diesem Punkte nicht unwahrscheinlich. Alle übrigen Gleichungsformen kommen auf $ax^{n+2m} + bx^{n+m} = cx^n$ für $m = 1$ bis 4 zurück, auch hier diese Einschränkung nur der Gewohnheit des Rechnens verdankend.

Aus einer spätern Stelle geht übrigens hervor, dass der deutsche Bearbeiter in einem der nicht erhaltenen Bücher die Lösung der Gleichungen des dritten Grades zu geben verspricht. Da bei Abfassung der Arbeit die *Ars magna* CARDANO's noch nicht erschienen war, sie ging ja erst 1545 in Nürnberg aus der Presse hervor, so kann diese Wissenschaft doch nur aus anderer Quelle, die wohl eine arabische sein dürfte, geflossen sein. Der Verlust des Restes unserer Arbeit, Buch 4—8, wäre daher in geschichtlicher Hinsicht doppelt zu bedauren.

Das zweite Buch beschäftigt sich mit der Rechnung positiver und negativer Grössen, letztere wirklich als *negative* bezeichnet, während die positiven *affirmati* heissen, die negativen freilich hin und wieder auch *diminuti*. Es werden alle Rechnungsarten mit solchen Grössen dargelegt. Der Verfasser kennt sie alle, nur die Division mehrgliedriger Grössen durcheinander ist ihm eine unmögliche. Auch die Rechnungen mit allgemeinen Brüchen wird gelehrt, hierbei auch die Division solcher durcheinander. Die Zeichenregeln sind vollständig gegeben, wenn auch nicht so kurz und bündig, wie z. B. in der Wiener Algebra im *Codex Vindob. Palatinus 5277.*[1]) Dagegen ist in einer beigefügten Tafel mit doppeltem Eingang das Resultat der Multiplikation aller möglichen Zeichenkombinationen gegeben, wobei auch die rein negative Zahl sich findet in der Form: — ϑ𝒞.

1) Siehe CANTOR, Vorlesungen II², S. 425.

Das dritte Buch, das letzte vollständig und mit deutschem Kommentar erhaltene, ist in drei Traktate getheilt. Das ganze Buch handelt von Wurzeln und von Zahlentheorie. Im ersten Traktate lehrt der deutsche Bearbeiter das Ausziehen der Wurzeln und zwar für die ersten sechs Grade, während er für die 7. bis 9. Wurzel nur sagt, man solle das bisher Gesagte verallgemeinern. Der lateinische Text dieser ersten 9 Kapitel lehrt eigentlich nicht das Wurzelausziehen, sondern das Erheben einer zweitheiligen Grösse auf die ersten neun Potenzen. Da aber das folgende Kapitel angiebt, diese Potenzerhebung sei nur geschehen, um die Wurzelausziehung zu ermöglichen, so hat eben der deutsche Bearbeiter es vorgezogen, diese Wurzelbestimmungen schon in den vorhergehenden Kapiteln mit zu behandeln. Die Binomialkoeffizienten stellt er übersichtlich in der Art her, dass er die Zahl 10001 nach und nach auf die aufeinanderfolgenden Potenzen erhebt. Er erhält so folgende Formen:

1000900360084012601260084003600090001
10008002800560070005600280008 0001
1000700210035003500210007 0001
1000600150020001500060001
100050010001000050001
10004000600040001
1000300030001
100020001
10001

Auch eine Tafel der neun ersten Potenzen der neun Einer ist vorhanden, weil sie zur Ausziehung der betreffenden Wurzeln unumgänglich nöthig sei. Die Ausziehung der Wurzeln wird im übrigen *mutatis mutandis* genau so gelehrt, wie wir es heute bewirken würden, wenn wir nicht durch die Logarithmen einen leichteren Weg einschlagen könnten. Der Bearbeiter weist aber auch darauf hin, dass man bequemer statt der vierten oder sechsten, achten oder neunten Wurzel, die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel, dieselbe Wurzel aus der Kubikwurzel, dieselbe Wurzel aus der Quadratwurzel der Quadratwurzel, oder endlich die Kubikwurzel aus der Kubikwurzel benutzen könnte. Dieser erste Traktat erstreckt sich zunächst nur auf die Auffindung der betreffenden Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

Der zweite Traktat des dritten Buches ist fast vollständig zahlentheoretisch. Aufsuchen aller Divisoren einer Zahl, dabei also auch Bestimmung der Primzahlen, wobei Verfasser weiss, dass man die Unter-

suchung erst mit der grössten in der zu untersuchenden Zahl enthaltenen Quadratwurzel zu beginnen braucht, Bestimmung des grössten gemeinsamen Maasses zweier Zahlen sind die Themata der ersten drei Paragraphen. Das vierte Kapitel dagegen giebt die Lösung des sogenannten Restproblems, das als Regula Ta-yen bei den Chinesen schon um Christi Geburt bekannt war, das im Abendlande sich zuerst um 1228 bei Leonardo von Pisa hat finden lassen, das dann im Anfang des XV. Jahrhunderts in einer Zeitzer griechischen Handschrift angetroffen ist, das endlich um die Mitte des XV. Jahrhunderts einem gewissen Frater Fridericus des Kloster St. Emeram zu Regensburg und kurz darauf Regiomontan bekannt war. Auf den Inhalt will ich hier nicht eingehen, da ich in der Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel eine genaue Darstellung des Gedankenganges gegeben habe, ich möchte hier nur darauf aufmerksam machen, dass unser deutscher Bearbeiter auch die Erweiterung des Problemes auf nicht theilerfremde Divisoren, wie die ursprüngliche Aufgabe und auch der lateinische Text sie fordert, durchführt, und auch die Bedingung kennt, unter der im zweiten Falle die Aufgabe unmöglich wird. In moderner Form, die aber dem Wesen nach mit der hier auseinandergesetzten zusammenfällt, hat Gauss die Aufgabe in den *Disquisitiones arithmeticae* behandelt.

Die zwei folgenden Kapitel handeln von den vollkommenen, mangelhaften und überschiessenden Zahlen. Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der auf Yles-Euklides zurückgeführt wird, und des doppelten falschen Ansatzes, der auf die Araber zurückgehe und bei ihnen *Itata* heisse, ist der Inhalt der drei folgenden Kapitel. Hier wird darauf besonders Gewicht gelegt, dass durch beide Methoden nur solche Aufgaben gelöst werden können, die in Gleichungsform geschrieben auf Gleichungen des ersten Grades führen, und an einem bestimmten Beispiel, das eine rein quadratische Gleichung geben würde, gezeigt, dass nur die Lösung solcher Gleichungen zu einem richtigen Ergebnis führen könne, während sowohl der einfache wie der doppelte falsche Ansatz unmögliche Lösungen ergeben.

Das zehnte Kapitel, dessen Ursprung der deutsche Bearbeiter auf den Aliabras Indus, also überhaupt nach Indien verlegt, verlangt die Auflösung unbestimmter Aufgaben des ersten Grades durch ganze rationale Zahlen *(numeri rationales integri)*. Bis jetzt galt Bachet de Méziriac als erster, der in seiner Diophant-Ausgabe von 1621 diese Forderung der ganzzahligen Lösung gestellt habe. Da die älteste erhaltene Handschrift unserer Algebra aus 1545 stammt, das Original daher noch älter sein muss, so ist also diese Forderung schon mindestens 66 Jahre früher gestellt worden. Die hier gegebene Lösung ist keineswegs die Bachet's, sondern stimmt mit der jetzt gebräuchlichen überein. Für die Lösung sehe man

die Anmerkung zu dem betreffenden Kapitel. Mit diesem geschichtlich wichtigen Probleme schliesst der zweite Traktat.

Der dritte Traktat handelt endlich von den irrationalen Wurzeln und der Rechnung mit solchen. Zur Anwendung und Begründung kommen in moderner Art geschrieben folgende Formeln:

$$\sqrt[n]{a \cdot b^n} \pm \sqrt[n]{a \cdot c^n} = \sqrt[n]{a(b \pm c)^n};$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{(a+b) \pm \sqrt{4ab}};$$

$$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a+b) \pm \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27ab^2}};$$

u. s. w.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a^m \cdot b^n}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m \cdot b^n}};$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^n}}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a^m}{b^n}}};$$

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}}.$$

Die angenäherte Ausziehung der Wurzel wird durch die Formel bewirkt

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^n}.$$

Der Bearbeiter gebraucht für b stets eine Potenz von 10, speciell mit Vorliebe 100 und lässt zu einer noch weiteren Annäherung immer die Formel benutzen:

$$\sqrt[n]{a^n + b} = a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + n_3 a^{n-3} + \cdots + n_{n-1} a + 1},$$

das sind dieselben Formeln, welche nach Staigmüller der Tübinger Professor Scheubel zur selben Zeit gebrauchte. Den Nenner des Bruches nennt er dabei die Distanz zwischen den Potenzen a^n und $(a+1)^n$ und im Verhältnisse dieses Zuwachses der Potenz beim Wachsen der Wurzel um eins müsse auch der Zuwachs b der vorliegenden Zahl zu dem Zuwachs der um eins gewachsenen Zahl stehen. Die speziellen Fälle

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n + 1};$$

$$\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1} = a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}$$

werden an Beispielen gezeigt.

Über das Fragment eines vierten, eigentlich fünften Buches brauche ich hier mich nicht auszulassen.



| Prologus in ALGEBRAM.[1]) 3

Hie hebet sich an das Buch ALGEBRAE, des grossen Arismetristens, geschrieben zu den zeithen ALEXANDRI vnd NECTANEBI, des grossen Grecken vnnd Nigromantis, geschrieben zu YLEM, dem grossen Geometer jn Egypten, jn Arabischer Sprach genant *Gebra vnnd Almuchabola,* das dann bey vns wirdt genant *das Buch von dem Dinge der vnwissenden zall.* Vnd ist aus Arabischer Sprach jn kriechisch transferirt von ARCHIMEDE, vnnd aus kriechisch jn das Latein von APULEIO, vnd wird genandt bey den Welschen *das Buch de la cosa,* das dann aber wird gesprochen *das Buch von dem ding;* wann aus einem vnbekanten dinge findet man das wesen der zal vnd gantzen essentz, das dann gewesen ist die frage ze wissen. Vnnd aus disem Buch finden wir, das der MACHOMET[2]) in seinem Alkoran vermeldet von disen Regeln, vnnd nennet sie auch Gebram vnd Almuchabolam. Sie werden auch gebraucht von den Indiern, vnnd nennen sie *Aliabra vnd Aluoreth,* das ist das Buch, das ALIABRAS zu den zeiten ALEXANDRI aus Arabischer sprache jn jndische gesatzt hat, vnd wird bey jnen gesagtt *das Buch Aluoreth,* das ist von dem Dinge abermals, oder *das Buch der Coniecturation,* dann wir schatzen oder achten, die zal sej ein ding, vnd ist bej den Indischen ein Rechen vbung gewesen mehr dann bej allen andern volkern.[3]) Sie gaben auch das gemelte Buch | durch etliche grunde geleutert, als es ALGEBRAS gesagt hatt, vnnd ist geschrieben erstlichen von ALGEBRAS zu YLEM[4]), dem grofsen Geometer, der do was preceptor oder 3′

1) Das Wort ALGEBRAM bedeutet hier sicherlich nicht unsere heutige *Algebra,* sondern den angenommenen Verfasser INITIUS ALGEBRAS. Für unsern Kommentator, der diesen Prologus geschrieben hat, hat die Algebra den Namen *Gebra und Almuchabola.*

2) Das ist natürlich Verwechselung des MUHAMED BEN MÛSA ALCHWARÎZMÎ mit MUHAMED dem Propheten, wie ja auch im Vorhergehenden wunderlich genug mit Zeit und Thatsachen umgesprungen ist.

3) Der deutsche Kommentator weiss also, dass die Inder vorzugsweise im Rechnen ausgezeichnet waren. Er kommt mehrfach auf diese Eigenschaft zurück.

4) Über die Persönlichkeit des YLES und seine Beziehung zu EUKLIDES sehe man die Einleitung. Die Verwechselung zwischen EUKLID dem Geometer und EUKLID

vorfarn EUCLIDIS des fursten zu Megarien, mit grossem fleis vnnd leitung. Wann zu den gezeithen was ALGEBRAS der kostlichste vnd berümtist in der zal von PYTHAGORA her, vnnd furter nie kheiner gewest, der so grundliche ding von den zalen hett gesatzt. Wann pey PYTHAGORA bifs auf PLATONEM, vnd von PLATONE bifs auf ARISTOTELEM was gewenlich, das sie alle ding durch die zalen wolten demonstriren. Des wir dann noch finden in den Texualien ARISTOTELIS, das er viel ding demonstrirt durch Mathematicam, vnnd finden auch durch die Zalen als durch himlische Grunde die schetze der Natur. Wir finden auch noch bei vns, das do von allen Meistern ye bifs auf vnser zeitt nicht scherpfers in der zal ist funden worden, dann das do sein die zaln vnd das Buch ALGEBRAE, vnnd laut zu vnserm Teutschen mit seinen geclerten anhengen, jnmafsen hernach volgt, wann es an jme selbst schwer ist in Latein gesatzt, darumb zu cleren not ist.[1])

4 | *INITII ALGEBRAE Arabis, Viri Clarissimi, ad Summum Mathematicum eo tempore Geometren YLEM Prologus foeliciter incipit.*

Dein begern zu erfüllen, du liebhaber vnser zalen, des wir vns nicht wenig von dir verwundern, der du bist der gröste vnter den vnsern, ein vnüberwindlicher Geometer, der ich dich meiner zal ergrundung thun soll, vnd deine kunst die meine beweist, binn ich nicht gesinnet, der zusetzen werden vber dich newes gefunden habe, sonder aber, als du mutest ze wissen meine wis vnd form der Linien Bipartiten vnnd Tripartitis, das ist der Linien Natur in zwei vnd drei getheilt, bin ich vngezweifelt, deine grofsmutigkeit werden clein achten mein selbst vorgenomene weise, wiewol

---

von Megara, der hier sogar ein Fürst von Megarien wird, ist ja seit DIOGENES LAERTIOS eine ganz gewöhnliche.

1) In der Dresdner Handschrift *C. 405* ist hier folgende Inhaltsanzeige des ganzen Werkes eingefügt:

Primus liber: de octo aequationibus et demonstrationibus earundem.

Secundus liber: de quantitatibus additis et diminutis sive pregnantibus.

Tertius liber: de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum.

Quartus liber: de proportionibus tam rationalibus quam irrationalibus, proportionalitatibus et medietatibus.

Quintus liber: de binomiis et de coniunctibus eorum secundum 13 numeros irrationales.

Sextus liber: de clavibus numerorum coniecturis propositionum sive questionum.

Septimus liber: de areis datis corporum atque superficierum perquirendis.

Octavus liber: de datis absolutis numerorum secundum claves examinatorum.

Nonus liber: compilatio super Algebram tam latina quam theutunica.

vorhin jn der zal nie angetast vnd gehört. Yedoch, so dein gemute mich wirdet vornemen, wirstu mich defs mit deinen demonstrationibus vnd beweisungen bezeugenn, vnd dir bald zu gedechtnus fallen mein cleine erfindung. Bitt dich fleifsiger aufmerkhung, ansehung, was vbung ich habe deiner zwigespalte vnd drigespalte Linien, vnd die in die zal gebrachtt nicht wenig zu verwundern hast, das ich aus deiner werden kunst solle saugen, das du von mir begerst zu wissen. | Verwundert mich, aus was 4′ Ohren dir solch mein zal vorkhomen sei, als du schreibst von ZITHEO, dem Singer, vnd LAMENO[1]), dem Arismetico, die mir bekant sein. Bin ich nicht wissens fragen, das ich mich des hette vormessen, von deiner Achtparkeit bey jnen zu berhumen, sondern aus jren fragstuck meiner gefunden Art gebraucht, die du jnen mit vil hubscher beweisung deiner Geometrei aufgelost hast, sind sie fort zu mir, deinen vnwirdigen jungen, khumen, aus deiner Anwejsung jnen ettwas derhalben arithmetice zu ostendiren, das dir dozumal vnbedacht gewest, das sich solchs zu der zal sollte gemefsen haben. Vnd fragst gros verwundern deiner partiten vnd tripartiten linien, die do nest angesehen vnd daraus gezogen die Gebra vnd Almuchabola, das also bei vns wol ze verwundern, die zal so weit vmb sich zu begreifen. Vnter andern meldestu, das noch kheiner vber mich der zaln sei erfunden von vnsern vatter PYTHAGORA her, des du mich vnwirdigen lobest, dann alle mein erfindung aus deinen bipartitis vnd tripartitis linien gezogen ist, vnd grofsmutigkt mich, das ich meine sect mit deiner werden kunst mag bewisen. Dein vorbild, dein augen nie abgebrechen, werde ich dir solchs vorwerfen vnd sehen lassen, was | newes sey, das dein vrsach 5 nicht vorgangen sey in deinem Buch von der linien bipartitis gesaget, des ich dich erinnern würde, hastu forpas meinen fleis zuvormerken deiner lehr mir gethan. Aper meldestu, dich nicht vorsehen hettest meiner vbung, des mir deine harpfe wortt gesaget von der Linien Bipartitis vnd Tripartitis einfürung gegeben haben, auch kaum, das ich solches so weit habe bracht in Gebram vnd Almuchabolam, das ich mag finden aus deinen Linien eine bekhante Zal des vnbekhanten vnd fragenden dings. Vnd wiewol solchs noch gleicherwis bei vns vnmöglich ist den vnvorständigen, will ich deiner liebe solche mein cleine gefundene seckt vnuorholen haben bei dir pleibenden, auf das nicht gemeiner man spreche, gewachsen sein vber dich, das dir dann vorkleinung brechtt. Vnd wie wol dein werde kunst meine sect beweist, wirdt sie dennoch schwerlich hieher aufszudrucken, wol ermessen hast, meine arbeit gethan deiner erclerten proposition auslegung

1) Diese Namen sind wohl fingiert; ich konnte wenigstens keinen derselben in mir zugänglichen Werken auffinden.

eraigen werden, vnd wie ich aber bei mir Gebram vnd Almuchabolam aus deinen linien erfunden habe, will ich setzen zum ersten von deiner bipartitis linien, die du auch zu schetzen der zal hast zugeaignet, vnd als-
5 dann | von den tripartitis, wie die soll in die Bipartitis reducirt werden, das man ernstlich muge haben den eingang jn Gebram vnd Almuchabolam, aus was Grunde sie anfengklich entspreufst. Wenn die gemeldte Gebra vnd Almuchabola neher kheinen anfang khan schöpfen, dann aus den gemelten Linien, die du dann aus kunstlichen propositionen hast gesatzt vngezweifelt deiner Geometrej clerlich aufsgedruckt, vnd jtzlicher Geometer vnd fleifsiger der kunst in gedechtnus fueren, vff das er besser möge ergrunden vnser Gebram vnd Almuchabolam. Vnd volgett hernach von der gemelten Linien Bipartitis Ylis das erst Capitel.

Capitulum primum de linea bipartita Ylis *Geometris (!).*

Du sagest in deinem dritten Buch von der Natur der Linien, nachdem vns ein ytzlich linien vnzerthailt genandt wirdt ein *Continuum*, das do an im selbst vnzerthailt gesprochen, vnd khan auch erstlich ein ytzlichs continuum anderst nicht gethailt werden, dann jn zway thail. Vnd wie wol wir sprechen, sie moge in funfe, sechs oder mehr thail gethailt wer-
6 den, | so ist doch nach dem vorstande der Natur ein ytzliche thailung erstlich gespalten vnd khan auch in mehr tail nicht gethailt werden, dann in zwei thail, vnd dasselbige wider in zwei, das gegen der gantzen Linien vorpas zu viel thailen gezalt wirdtt. Sam also, wir wollen setzen, die Linien ab sey gethailt in 7 thail vorstentlich, vnd sey das erste bc. Sprich ich, das ab in zwei gethailt ist in puncten c. Setzen wir d den andern

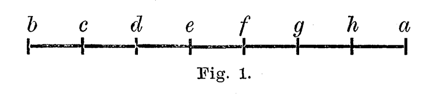


Fig. 1.

punct. Also sprich ich, das ac gethailt ist in zwai thail gegen den punct d, vnd also wirdtt gegen der gantzen Linien gesaget in drei thaile, vnd doch ein ytzliches Continuum wirdt gesprochen in zwei thail erstlich zu thailen. Vnd hierumb sagstu nit vnbilligen, von der zweigespaltenen Linien habe ich gedachtt in meiner Gebra vnd Almuchabola von dem dinge gesprochen, die weil die Linien vnzerthailt ein Continuum ist, das do gantz ist und kheine vorstentliche dissection an jme selbst nit hatt, so mag ich sie wol nennen ein ding, das noch vnzertailt ist vnd gantz gerechennt gegen der zal, die do noch kheinen namen jn die gesatzt hatt, das ist das
6′ Continuum. So aber der gantzen Linien zehen die zal eroffnet ist | vnd dergleich gesatztt ist, vnd vor zehen gerechent, vnd soll alsdann gethailt werden in dem Sinne gegen dem dinge in zwei thail, sprechen wir, das

das ein thail continuum ist ein ding, vnd das andere zehen an der zal minus ein ding, vnd das zusamen gesetzt ist zehen, das was die gantze Linien. Also wird gesagt ein ding Gebra, vnd 10 minus ein ding Almuchabola[1]), vnd ist vnser erster eingang zu sagen von dem dinge, das dann in Gebra vnd Almuchabola vor ein Radicem vnd wurtzel genomen wirdt, wann alle ding mögen hieraus entspringen. Es ist auch die gantze Gebra vnd Almuchabola auf die Bipartiten Linien gegrundt. Gleicherweis ein ytzlichs continuum erstlich zu thailen nicht mehr thaile khan an sich nemen dann zwei, also vermag auch ein gemelte Linien nicht mehr dann aus ir selbst beschreiben ein superficien, der dann nicht mehr dann zwo dimensiones vormag, darumb werden die Gebra vnd Almuchabola allein den planitien zugeaignet. Aber als tripartita linea sich etwas weiter erstrecket, wollen wir seiner zeitt genugsam volg thun. Wie nun dein linea bipartita sol gewerificirt werden, | neme ich vor deine sechs gesatzte pro- 7 positiones des dritt Buchs von den bipartiten Linien vnd jrer naturenn, vnnd wie ich aus den gezogen habe gebram, das ding, vnd Almuchabolam, die zal minder dasselbigen dings. Nach welcher naturen dann ein jtzliche Linien erstlich gethailt wirdtt, setze ich dein erste proposition, vnd ereugen dir die also lautende:

Capitulum secundum de prima propositione Ylis *lineae bipartita eiusque natura et essentia.*

Linea bipartita ducta per aliam id potentialiter efficiet, quod tota in quamlibet eius partem producit, et si expletum una earum coniunctum dividit, reliquam quantitatem renasci necesse est.[2])

Vnd laut zu vnserm deutschen also:

Ein jtzliche zerthailte Lini in etzliche thail so die durch ein andere gefurth wirdt, so schreibt sie mit jrer machtt, das dann aus der gantzen jn jtzlich thail der zuthailen zusamen entspreufst. So dann solches entsprofsen durch der Linien eine gethailt wirdtt, so erheischt not, die andere werde wider gros geboren zu werden. | 7′

1) Dieser Unterschied zwischen Gebra und Almuchabola dürfte sich wohl nur an dieser Stelle finden. Später kennt aber der Kommentator sehr gut auch den Begriff *restauratio*.

2) Euclides II, 1 (ed. Ratdolt 1492): Si fuerint due linee, quarum una in quodlibet partes dividitur, illud, quod ex ductu alterius in alteram fit, equum erit his, que ex ductu linee indivise in unam quamque partem linee particulatim divise rectangula producentur. Das Korollarium von *et si* an ist bei Euklid nicht vorhanden.

Da wir aber vnser Gebram vnd Almuchabolam aus deinen Continuis gezogen vnnd pracht habenn in den vorstande der zalen, so wisse, das wir jnn negsten Capitel gesetzt haben, das ein Continuum vnzerthailt gedachtt wirdtt vor ein ding, das kheinen namen der zaln hat, alſs dann ein vngethailte Linien ist. Aber die gethailte Linien, gesprochen partita, wirdet nit der zal gemeſs, wann sie vorstentliche thaile jn jr hatt, vnnd werden genandt vnitates gebrae, das sind vnitates des dings in potentia vnd auch der quotient des Almuchabola, den man tailet in der Equation. Dann also offte vnitas ist in dem ding, das ist in gebra, so offte ist der quotient in Almuchabola, vnd also offte vnitas in dem quotient, so offt ist das ding in Almuchabola. Das seind vier proportionalisch zal gesatzt, daraus wir vnser Regeln gesatzt vnd transponirt haben.

Setzen wir lineam partitam *ab* (Fig. 2) getailt in vorstentliche thail, *ac* die linien vngethailt vnd gantz, jn massen die proposition cleret, vnd setzen den gantzen Superficien *ab* in *ac* sei 60 an der zaln. Nun sprechen wir, nach der proposition, das *ac* in *ab* gemultiplicirt beschreibe den gantzen superficien

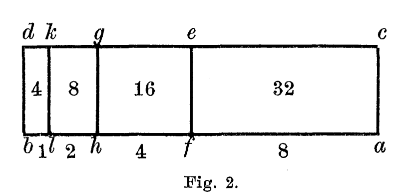


Fig. 2.

Prima aequatio.

8 *acdb*, das seind | 60, so mus von noth *ac* sein ein einig ding, das in vnitates *ab* wirdt gefurt vnd 60 machen in potentia, darumb mus *ab* der quotient sein des superficies, das seind vnitates des dings Gebrae *ac* in potentia. So nun *ab* der quotient ist, so thailen wir 60, Almuchabolam, durch 15, Gebram, das seind durch vnitates *ab*, kombt 4. Also sprechen wir, das das *ac* sey 4 aus der zal, das was das ding, die gantze vnzerthailte Linien. Nun ist das ding 4 vnitates werdt gewest in longitudine; darumb seind vnitates gebrae auch worden 4 in potentia, wann 8 in potentia vermag 32, vnnd 4 in potentia 16, vnd 2 vermag 8, vnnd 1 vermag 4. Vnd solchs zubeweisen vnd menschlich vernunfft einzubilden vornemlichen, wollen wir den text figurlich zusetzen ein Beispil, auf das der text clerlicher zu vernemen sey mit leichter anweisung.

Es sitzen bey einander vier philosophi, nemlich Plato, Euclides, Pythagoras vnd Aristoteles. Werden zureden mit Algebrae dem groſsen 8′ Arismetro in einer | collation sprechende: Liber Algebras, wir vnthereinander wollen gern wissen, wie alt ein yeder in sonderheit sey, dann wir alle vier seind 1455 jhar altt; vnd Euclides ist noch so alt als Aristoteles, vnd Plato noch so altt als Euclides, so ist Pythagoras noch so alt als Plato. Nun mach vns das durch dein Gebram vnd Almuchabolam,

vns zubeweisen dein erste gesatzte Regel gezogen aus der partita linea Ylis des grofsen Geometers. Anttwort Algebras: Ich setze jr seit alle alt das gantzen superficie *ac* in *ab*, das ist 1455, nach eurer sage, das nenne ich Almuchabolam, das ist die zal, deme das ding *ac* Gebrae gleichen mus mit allen rectangeln, wann die proposition sagett, das *ac* in ytzlich thail *ab* aller Rectangeln macht gleich als *ac* in *ab*. Nun ist *hl*, Euclides, noch so alt als *lb*, Aristoteles, so ist *fh* Plato noch so alt als *lh* dann Euclides. Auch so ist *af*, Pythagoras, noch so alt als Plato, so erheischt not, das das erste 1 in der zal, das ander 2, das dritt 4 vnd das viert 8. Vnd so diese 15 vnitates gefurth werden durch *ac*, ein ding, das dann Continuum ist vnd khein discretion der zal hatt, so khomet der superficies: also werden die 15 vnitates in potentia gleich dem superficie 1455. | So dann die gemelten 15 vnitates sein der quotient des dings continui *ac* gegen den superficien, so thailen wir den superficien durch 15, khombt nach der proposition die zal des dings *ac* continui 97. Wann eine Lini jn die ander gemultiplicirt erwechst der superficies, darumb von not wider gethailt den superficiem durch der Linien eine, geporn wirdt die andere der proposition. Noch so alt ist Aristoteles 97 jar, vnd ist der Rectangel *kdlb* jn potentia, vnd sein vnitas jn der lenge 1. Nun multiplicir wider *ac* in *hl*, khombt 194, so alt ist Euclides, vnd ist das andere rectangulum, das aus der vnzerthailten Linien jn die gethailten erwechst. Als dann die proposition auswist, multiplicir 97 in 4, khombt 388, so alt ist Plato, vnd ist das dritt Rectangulum, vnd sein vnitates in der lenge sein 4, vnd ytzlich in potentia ist 97, darumb heisen sie vnitates Gebrae in potentia. Nun multiplicir 97 mit 8, khomen 776; so alt ist Pythagoras. Solche Rectangel alle zusamen geben den gantzen superficiem nach aller Form vnd weise gesatzter proportion der Linien partita vnd inpartita, das ist der zerthailten vnd unzerthailten linien. Nun volget das dritt Capitel von der andern Linien partita Ylis, | des geometers. 9

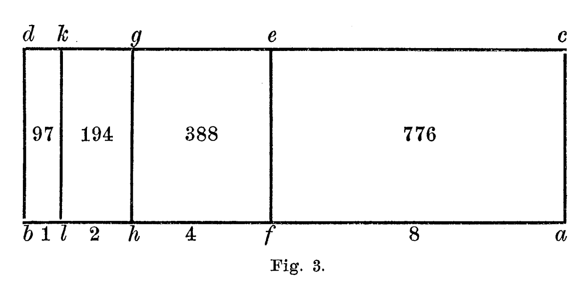


Fig. 3.

Aristoteles	97
Euclides	194
Plato	388
Pythagoras	776
Summa	1455

Capitulum tertium de linea partita Ylis, *eiusque essentia ac natura propositio secunda.*

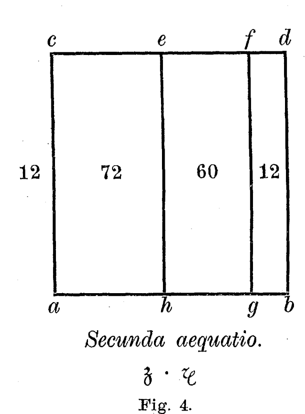
Partita linea in se ipsam ducta, descriptum aequum est indivisae eiusdem in omnes suas partes divisas.[1])

Vnd laut zu vnserm teutschen also:

Die zerthailte Linien, so sie in sich selbst gefurt wirdt, so beschreibt sie den gleich, so dieselbige in alle jre thail gefurt wirdt.

Vnd die proposition sampt der vorigen werden auch gesatzt von Euclide im andern Buche an der ersten vnd andern proposition, wann er was ein junger Ylis des grosen Geometers.

Von diser proposition einzufueren vnter andern Regeln Gebrae et Almuchabolae, so nennen wir vor, inmassen vorgesagt, zu setzen die ungethailte Lini vor ein ding, so die in sich selbst gefurt wirdt, beschreibt 10 vns ein quadrat, des Radix ist die lini continua, vnd | vnwissent der zaln gesatzt. So dann die gethailt wirdt in vorstentliche thaile der zal gemes, so erwechst aus den tailen jn die gantzen linien gleich dem vorigen quadratt. Setzen wir (Fig. 4), die zerthailten Linien *ab* sey vnitas, *gh* vnd *ah*, vnd *ac* ist vnwissent, so setzen wir ein ding als vnwissent. Also nach der ersten proposition *ac* in *ab* macht 144, Almuchabolam, darumb ist *ab* aber der quotient. Thailen wir 144 in *ab* 12, so khumen 12; also ist ein ding *ac* in longitudine 12, vnd der erste Rectangel in potentia ist 12, der ander 60, der dritt 72, vnd jre vnitates in der lenge seind in potentia jr jtzlich 12, vnd solche Rectangel machen auch 144 gleich dem quadrat. Vnd diese gemelte proposition Ylis setzen die Indij nicht, vnd sagen, es sey genugsam in der ersten proposition ausgedruckt, dann wo *ab* in so vil thail partirt wirdt oder ist, das ist in vnitates, souil dann das ding werden wirdt, so ist es superficialiter gemultiplicirt, als die erste clerlich aufsgedrucket hatt. Ist dann die Linj jn souil thail gethailt, so vil das ding werth ist, so ist nit noth das ding zu suchen, sonder es ist bekant, vnd 10′ hierumb weistu in | nachuolgenden bericht, warumb dise gesatzte proposition von den Indiern nicht gesatzt ist, vnd wie sie den Text Algebrae



Secunda aequatio.

ʒ · ℭ

Fig. 4.

1) Euclides II, 2: Si fuerit linea in partes divisa, illud, quod ex ductu totius linea in se ipsam fit, equum erit his, que ex ductu eiusdem in omnes suas partes.

gescherpft haben, ist noch zur zeitt nichtt vorstentlich zu wissen, sondern dem text ALGEBRAE gemes zu sagen.[1]) Vnd solche proposition leicht einzubilden, wollen wir abermals dem Text ein vornemlich Exempel addirn also lautende leichter begreifung zu dem Eingang dis Buchs.

LAMENO, der grofse Arismetist, fraget ALGEBRAM in einem fragstucke, wie der grosse ALEXANDER hette geben dem PLATONI, ARISTOTELI vnd auch dem PYTHAGORA etzlich marck golds zu verzern zu Athenis vff der hohen schule, die hetten sie vorkaufft ye 1 mk so theuer, souil der marck gewesen waren, vnd doch hatte PYTHAGORAS 6 mal alsouil zu verzern als ARISTOTELES, so hatte PLATO auch funfmal alsouil sam ARISTOTELES, vnd des goldes was in der summa 8649. Nun wolte ich gern wissen, wie theuer eine Marckh geben worden were, vnd wieuil geldes yeder zu vorzern hette.

Setzen wir ac sey ein ding des geldes, cd gleicherleng des geldes. Nun ac in cd macht ein quadrat, pey vns gesprochen ein ʒ, das ist 8649 gleich in der zal, den multiplicirn mit 1 ʒ, wirdt 8649 ʒ. Nun ist ein | itzlich latus radix des zensus, darumb radix von 8649 ist 93: souil Marck, vnd souil eine Marckh gegolten dc. Nun hat ARISTOTELES von dem ʒ 1, PYTHAGORAS 6, vnd PLATO 5 der linien cd von dem gelde, das sind 12 radices gleich dem zens in potentia. haben wir vorgesagt, das cd sey der quotient der superficie, darumb theile zens durch quotienten 12, khombt der Rectangel in potentia $bhdg$ ARISTOTELES, vnd den magstu auch in die zal fueren (Fig. 5).

11

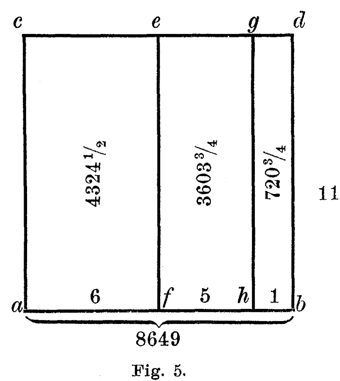


Fig. 5.

Capitulum quartum de linea bipartita YLIS *geometris eiusque natura et essentia.*

Bipartita linea ducta si fuerit in alterutrum eius partem, coaequum est, quod ex eadem fit in se ipsam, et alterius per alteram. | [2]) 11′

Vnd laut zum deutschen also:

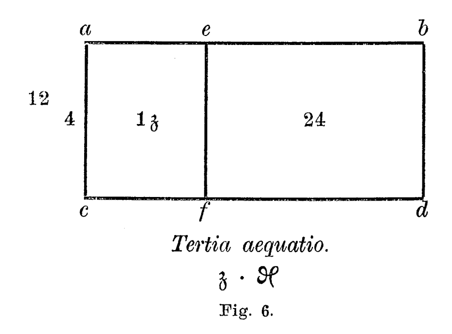
Ein ytzliche zwigespalten Linien so die wirdt gefurt jn

1) Wieder ein Beispiel für die Kenntnis des deutschen Bearbeiters, was indische Rechenkunst betrifft.

2) EUKLIDES II, 3: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in alterutram partem, equum erit his, que ex ductu eiusdem partis in se ipsam et alterius in alteram.

jrer thail eins, welches das sey, so ist das gleich deme, was aus dem selbigen thaile khombt jn sich selbst vnd aus dem selbigen gefurt in das ander.

Solche gesatzte proposition wird vns beschrieben in der dritten proposition Euclidis seins andern Buchs. Wie wir nun vnsere dritten Regel Gebrae et Almuchabolae aus diser proposition gezogen haben, setzen wir die bipartiten Linien *cd* sey eines thails vnwissent der zal *cf*, vnd das *df* sey aus der zal 24 inpotentia, vnd der gantze superficies *abcd* sey 40 in numeris. Nun zu ergrunden das eine thail vnser Bipartiten, die dann nach der gesatzten proposition beschreiben thut 1 ʒ der zal vnwissent gesatzt, so saget eigentlich die proposition, der gantze superficies erwachse aus der gantzen Linien *cd* gefurt in *cf*, oder aber aus *cf* in sich vnd *cf* in *df*. So nun *fd* ist wissent gesatzt 24 in potentia, so die gezogen werden von 40, Rest 16, das ist der zins des Radix *cf*, in longitudine vnd in numeris 4, also ist der quadrat 16 vnd | radix, das ist das ding, das vnwissent war in der lenge vnd potentia, was 4. So wir nun haben gefunden, das das aus der bipartiten Linien eines thails in sich entspringt in longitudine vnd potentia, vnd das ander thail *fd* wissent ist in potentia, so sollen wir auch ergrunden, was das in longitudine sey. Saget uns die proposition, das das eine thail in der lenge in sich vnd dasselbig in das ander beschreibt den gantzen superficiem *abcd*. Hierumb ist *cf* der quotient von 24 in potentia gegen *fd* in longitudine, wann aus *cf* in *fd* wirdt *ebfd*, das ist 24. Wann thaile 24 in 4, khumbt 6, das ist *fd*, also ist die gantze linien bipartita in longitudine 10, vnd das eine thail ist 4 in numeris, vnd das andere 6, vnd das ding, das vnwissend was in longitudine vnd potentia, was radix des zensus *aecf*. Vnd von solcher proposition haben gesatzt die Indij grosse heimlichkeit zu erfaren vnd auszugrunden die zalen[1]), jn massen wir dauon sagen werden, auf das wir aber angeregter Exempel vorgesatzt Ordnung hatten, wollen wir den Text cleren.



Tertia aequatio.
ʒ · 𝔑
Fig. 6.

2′ Hipocras gab auf ein zeit dem Galeno gellt, jme | zu kaufen des holtzes Aloes in der messe zu Athenis in die Apotecken gehorig. Nun aus vil warf Galenus das gelt in seinen Beutel vnter anders sein geltt, das jme vnwissent was, das er auch vorhin im beutel gehabt hette, doch

1) Auch hier wieder die Erwähnung der Inder als grosser Algebraiker.

merket er seine empfelhnis jme gethan: so theuer man gebe 1 ℔ aloes, souil ℔ sollt er bringen, vnd er hette jme darnach zalt. Also da er kame gen Athenis, da fand er 40 fl im beutel, die gab er den khaufman nach empfelnis Hypocratis, vnd sprach: gebt mir, als auch Hipocras geschrieben hatt, vnd sonderlich so gebt mir das ℔ auch jm gelde des holtzes Aloes, dann ich habe sunst mehr auszurichten, vnd fast mir es ein vnd verwart mirs. Also am widergang fraget er jn, ob er es jm aufsgericht hette; antwort jme der kaufmann: jr habet beide souil sich geburt, vnd jr habet besunder des vor 24 fl. Das zeiget Galenus an. Do in nun Hipocras auf dem widerkhomen ersahe, fraget er jnen, wie er die sachen hette aufsgericht. Antwort Galenus: Ich wais nicht, wieuil ich vorhin jm peutel gehabt habe, so habe ich nicht gefragt, wieuil | [13] 1 ℔ gestehe, sunder er saget, ich habt seiner vor 24 fl vnd wir baide vor 40 fl. Also werden sie der sachen vnwissent, vnd schicken nach dem Algebra, vnd baten jn nach ergangner sachen, solchs sie bede durch die Gebram vnnd Almuchabolam zu entscheiden. Algebra sprach: Wir setzen Hipocratis ℔ sein *cf*, ein vnwissent ding in longitudine vnd potentia, vnd Galeni ℔ sein *fd* in potentia 24 in numeris. Nun geldtt *cf* das ding souil als des ℔ sein. Nun das ist in longitudine ein ding, vnd gilt auch 1 mal ein in potentia den quadrat oder zensus. Nun aus der proposition, so ist der vnwissent zensus *aecf* mit 24 in numeris *edbf* gleich 40, dem gantz parallelogramum *cbad* in numeris. Zeuch ab *ebfd* vom gantz superficie, restant 16, der zensus *aecf*, des latus ist radix, das ist 4, nach der proposition in sich selbst. Also ist das ding 4 werdt in longitudine, das sind die ℔ Hipocratis, vnd ytzlichs hat gegolten 4 gulden, das ist 16, das was der zens in potentia. Nun ist 24 in numeris nach der proposition aus *cf* in *fd*, darumb thailen wir 24 mit 4, khomen 6 ℔, gehorn | [13'] Galeno, wann 4 der ist von 24 in potentia gegen *fd* in longitudine. Vnd so haben wir bewisenn vnser dritte Regel in vnser Gebra vnd Almuchabola. Nun folgett von dem funften Capitel die vierdte proposition Ylis des grossen geometris.

Capitulum quintum de quarta propositione Ylis lineae bipartitae eiusque natura et essentia.

Quod ex partita nostra in se ducta describitur, coaequabitur numero et mensura utraque parti in se et alterius per alteram bis. Patet omnia crescentia gnomone lineam bipartitam in infinitum quantitate describere.[1])

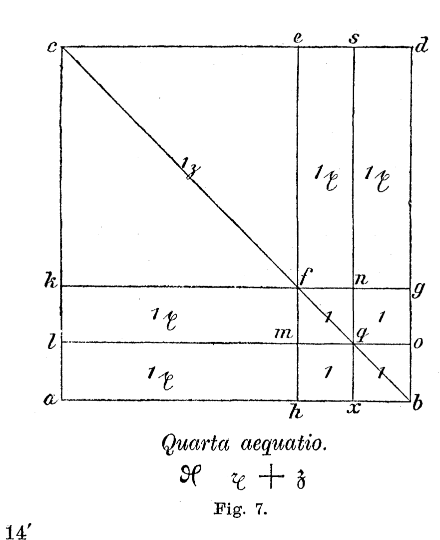
1) Euclides II, 4: Si fuerit linea in duas partes divisa, illud, quod fit ex ductu totius in se ipsam, equum est his, que ex ductu utriusque partis in se ipsam et alterius in alteram bis. Auch hier ist das Korollar: *Patet omnia* bei Euklid nicht vorhanden.



Vnd laut zu vnserm Teutschen also:

Das dann khomet aus vnser zwiegespalten Linien in sich gefurt, wirdt gleich an der zal vnd mensur einem itzlichen thaile der Bipartiten in sich gefurt vnd eines thails in das ander zwir. vnd herumb wirdt offenbar, das alle die quadrangel, die do wachsen sind bei dem diameter durch den Gnomon, das ist durch den Winckelhacken oder Radicem, beschreiben die linea
14 bipartita mit jrer quantitet zu wachsen on ende zu ergrunden. |

Vnd aus solcher haben wir gezogen vnser vierdte Regel Gebrae et Almuchabolae. Sie wirdt auch gesatzt in der vierdten proposition des andern Buchs Euclidis. Wir nennen Gnomonem oder die Supplemente vor die Radix, wann ein jtzlicher quadrat wechst mit zweien Radicibus vnd dem gnomo, den sie geben, zu erfüllung der quadratur. Darumb, soofft der circumscribirt wirdt, macht er mit den Supplementa den quadrat wachsent in vnitate, vnd macht in longitudine die linien bipartita. Als wir setzen *cekf* (Fig. 7) sollen wachsen vnitate mit den radicibus circumscribirt *klfm* das ist ein ℞, vnd *esfn* der ander Radix, vnnd pleibt vacuum, in das die quadratur nicht erfullett wirdt, vnnd ist gnomo genant. So dann der quadrat wirdt *fnmq*, so ist *fnmq*, der quadrat erfult, vnd *lq* die linien ist zerspalten worden in *m*. Also mogen wir furter das quadrat *clqs* auch circunscribirn, als jtzunden gethan wurde, *ab* gespalten in *x*. Das mochte geschehenn nach der proposition one ende. Wir nennen auch einen ytzlichen wachsenden quadrat circa dia-



Quarta aequatio.

Fig. 7.

14′ metrum | vor 1 ʒ, der in der lenge vnd potentia vnwissent ist. In der lenge ist sein zu der zal vnwissent, damitt er wechst, vnd in potentia hat er kheinen Namen, sonder aber die radices vnd der zens zusamen seind in numeris vorgelegt. Also wir setzen wollen *cekf*, der vnwissent ʒ, ist circumscribirt mit 4 radicibus *kflm* vnd *lmah* vnd *efsn* vnd *sdng*, die do auch vnwissent sein, dann allein, das sie den namen haben, das jr 4 sein. Nun sein der ʒ vnd 4 radices zusamen 45 in numeris vnd gezelte thaile in der zal oder vnitates in numeris der linien *ca* vnd *cd* ist *cagdsf*, vnd zu der Completur des quadrats ist gesprochen der gnomo *fmx*. Nun wollen wir setzen, der quadrat in der lenge *kf*

ist ein ding, das ist 𝓇, vnd so ich die linien kf, das ding, in sich füre oder radicem, wird ʒ oder quadrat, welcher mit abgemelten 4 radicibus ist 45 in numeris, was mögen die radices vnd der zensus sein in numeris gesondert von einander. So mercke, das wir haben eigentlich gesatzt, das dem quadrat gebrechen ist der gnomo fmh, so ich den quadrire, wird $fghb$ vnd erfult die gantz quadratnr $acdb$, welcher gnomo ist $fghb$ ist gesatzt von 4 distinguirten vnitaten in numeris, die do erwachsen aus dem halben thail der radices | in sich gefurt, wann yede seithen des Quadrats zwo 15 seithen circumscribirt ad crescentiam. So ich nun solche 4 unitates zu 45 thu, die dann jme gleich seind in der zal, wann es sein 4 vnitates von dem gantzen quadrat in numeris, so erwechst 49, das ist die gantze quadratur $cadb$, vnd radix 7 a durch b. So nun des gnomoni seiten fg von der bipartiten ab gezogen wirdt, das sind zwo vnitates xb in numeris, von 7, restant 5, das ist ah vel kf. Also sprechen wir, das ah der radix ist 5, vnd das in sich ist 25 in numeris, der ʒ, welcher mit seinen 4 radicibus 45 machtt, inmassen wir gesatzt. Vnd solchs zu vnterrichtung menschlichs sinnes vnd figurlich einzubildenn mit leichtem Exempeln, setzen wir dem Text zu mit verlaubung ALGEBRAE[1]) also:

SALOMON schickt ESOPUM gehn Damasco zu khaufen Samett vnnd Scharlach; gab jme 45 fl. Do er dohin kham, kaufet er ein Samett so theuer, souil er da elen nam, vnd 4 eln Scharlach so theuer die eln, sam des Sametts was, vnd als er vor konig SALOMON kam, fragt SALOMON, was das kostet. Antwort ESOPUS: Nun rath, Khonig, du gabst | mir 45 fl, 15′ dauon hab ich kaufft souil des sametts, so theuer man ein eln geben hatt, vnd 4 Eln Scharlach so theuer 1 eln sam des Samets ist: nun sage mir khonig, was ein eln kost des Samets, wieuil der sein, vnd wieuil ich vor 1 eln scharlach geben hab. SALOMON entsatzte sich vnnd sandte nach ALGEBRAM, jm solchs durch Gebram vnnd Almuchabolam zumachen. Als das ALGEBRAS vernam, sprach er zum konig SALOMON: Durchlauchtiger konig, hastu doch selbst vil Regeln jn der zal gesatzt, die nach dir genandt sein, als regula SALOMONIS[2]), so man ordine converso practicirt regulam HALI HABENRIGEL, so man die zalen setzt in die vier proportionalische zaln der aufgab nach, als wir nachuolgend sagen werden. Verwundert mich, das ich dich solchs durch mein Gebram vnnd Almuchabolam berichten soll. SALOMON antwort: Du berumbter Arismetrist ALGEBRA, deine Regeln straffen

---

1) Hieraus ist klar, dass alle diese wunderbaren Aufgaben dnrch den deutschen Bearbeiter hinzugefügt sind.

2) Hier wird also die *Regula Salomonis,* d. h. das sogenannte Rückwärtsrechnen, auch *regula sermonis* genannt, dem Könige SALOMON zugewiesen. Siehe CANTOR, Vorlesungen II², 247.

die meinen, denn mir noch nie kundig gewest, was durch die surdischen vnnd jrrationalischen zaln solle volfurt werden, vnnd sage mich mit andern, so sich nennen Arithmeticos, zu jrren schwerlichen, vnnd gebe dir preis vor 16 allen | vnter der sonnen erbeitten in der zal, vnnd wollest mich solchs deiner Gebra vnnd Almuchabola thun berichten, welcher Gebra vnnd Almuchabola zu demonstriren jn zal, jn mas vnnd jn gewichtte geschaffen, jnmassen ich gesatzt hab Sapientiae undecimo, nichts von ist, es wirdt aufgelest vnd soluirt. Algebras antwort: So setzen wir des Samets eln sey *kf*, ein ding in longitudine. Nun kosten die ein ding 1 mal eins, das ist der vnwissent ȝ *kfce*, vnd ist das gelt des samts, bei vns gesagt ziens oder tribut, in potentia des dings in longitudine. Nun sind des scharlachs 4 vnitates in numeris, kost eine, souil des dings *kf* ist in longitudine, das was ein ding *kf*. So mus der scharlach kostenn in potentia, die wir supplementum oder paralellogramum nennen. Also waren 4 radices der zens oder die 4 supplementa in potentia mit dem ziens *kfce* 45 in numeris gleich, inmassen vorgesagett. Nun so wir die 4 Supplementa mediren, das ist mit dem gnomone circumscribiren auf bede seiten, so durch die bipar- 16′ titen Linien erwechst ad crescentiam des ziens bey | diameter, so gebricht zu der Quadratur der vorgemelte Gnomo, welcher, so er quadrirt wirdt, durch sein circumscribirt des Supplements vnitates, der dann zwo in numeris sein, wirdt 4. So die zu 45 addirt werden, wirdt 49, das ist die gantze bipartita in sich; *ab* 7, der radix in numeris, von welchen abgezogen die zwo Seithen Gnomonis restant 5, vnd das was das ding in longitudine *kf*, die eln des sammets, vnd das ziens, tribut, ȝ oder geldt 25, das ist der eln. Nun hat etzliche eln des Scharlachs souil golten, sam des Samts gewesen ist in longitudine, das was 5; nun 4 mal 5 macht 20, das sind die vier supplementa in potentia vnd das geltt des Scharlachs. Also haben wir bewisen vnsere vierdte Regel Gebrae vnd Almuchabolae. Nun folget von dem sechsten Capitell die funffte proposition Ylis des groſsen Geometris.

Capitulum sextum de quinta propositione Ylis *lineae tripartitae eiusque natura et essentia.*

Aequale quidem est contentum sub aequalium medietate in se sectionum tripartitae lineae, quod sub inaequalibus cum tetragonismo inter utrasque 17 *complectitur.* | [1])

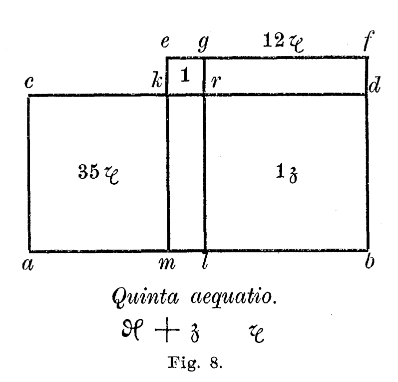
1) Euklides II, 5: Si linea recta per duo equalia duoque inequalia secetur, quod sub inequalibus totius sectionis rectangulum continetur, cum eo quadrato, quod ab ea, que inter utrasque est sectiones, describitur, equum est ei quadrato, quod a dimidio totius linee in se ducto describitur.

Vnd laut zum deutschen also:

Es ist gleich, das do ist vnter den gleichen sectionibus oder halben thailen jn sich gefurt der tripartiten Linien dem, das gehalten oder beschriben wirdtt aus den vngleichen thailen gemelter linien, mit sampt dem quadrat der zwischen beiden sectionibus der gleichen vnd vngleichen thailen erfullet wirdt.

Von diser proposition zu reden vnd einzufueren vnser funfte Regel Gebre vnd Almuchabole, welche auch Euclides an seiner funften proposition seines andern Buchs ercleret, sollen wir eigentlich aufmerkhung haben mehr dann mit vorgesatzten propositionibus, wann sie etwas dapfer vnd schwerer ist, dann die vorgesatzten. Zum ersten vnd eingang diser proposition nennen wir (Fig. 8) die Linien ab vor den radicem des gantzen parallelogrami ad, wann wir wissen, so bd in ab gefürt ist, das ab radices seindt, jnmaſsen wir vormals gesatzt haben, das eine jtzliche Linien des superficies ist sein radix: die setzen wir ex numeris ist 12. Nun bd ist radix des ziens vnwiſsent ex numeris, vnd ar das parallelogramum ist ex numeris 35, solchs zusamen, der vnwissende census vnd 35 ex numeris, ist ad das gantz parallelogramum, welchen dann gleich sein die 12 radices ab in die seithen bd gefurt des vnwissenden zens. | Nun stehet die frage, was der vnwissende zensus sei, vnd was ein jtzliche section der Linien sey in potentia ab vnd longitudine, das ist, was das gantze parallelogramum sei jn Numeris ad, das alsouiel mach als die radices ab in bd, die seithen des ziens der vnwissent was. Saget vns klerlich die proposition: vnd das halbthail der Linien tripartitis in sich gefurt es sei gleich dem parallelogramo ar in numeris, das dann entspringet aus den inequalen sectionen mit sampt dem quadrat kg, das dann zwischen den zweyen sectionen geformirt wirdt. Nun ist das halbtheil der radices in sich 36, wenn die gantze radices 12 sein, dauon das halbe thail 6 mus sein in numeris in longitudine, das ist in potentia 36. Das were das halbe thail der radicis in numeris potentie. Davon zeuch das parallelogramum ar dragmarum in numeris, so bleibt kg das quadrat, als dann gesagt ist, das medietas radicum mehr vormag in sich dann ar, das quadrat zwischen zweien sectionen, vnd restat vnitas, wann ar in numeris ist 35, vnd mf das halbe thail in sich ist 36, vnd also ist des kg quadrats radix vnitas in der lenge ml. So die von der medietet radicum

17′



Quinta aequatio.
ℵ + ʒ ℞
Fig. 8.

18 *mb*, die 6 was, wirdt gezogen | restat *lb* 5 in numeris, das was der radix des ziens oder tributs, dann wir nennen den zens. So aber der zu der medietet gethan wirdt, erwechst *al*, die ander section inequalis. Also ist eins *al* 7 in numeris, die ander *lb* 5, das sein die 12 radices, welche dann in potentia der ersten section inaequalibus *al* in *db* ist 35, das parallelogramum *ar*, die ander *lb* 25, der vnwissent ziens, macht in numeris 60, das ist auch *ab* 12 radix in potentia in *db* das jm 5 gleich.

Das aber vornemblich sei, nach deme die materien an jr selbst schwer ist, sagen wir also figurlich.

Algus der philosophus schickt aus Esopum gein Paris Saffran zu kaufen die kuchen zu bestellen. Esopus kauft souil lott, so theuer man 1 lot gab, behilt 35 ₰. Vnterwegen ward er mit dem hunger begriffen, hette nichts, damit er sich gesettigen mochte, begegnet jm also Zuterich der Koch mit haisen fladen vnnd Butterwecken sprechende: wann her 18′ Esope? Esopus antwortt: Lieber, mein herr | Algus hatt mich vmb saffran geschickt, die kuchen zu bestellen, des hab ich kaufft souil loth, so theuer man es gab, vnd habe mich mit essen nicht versorgett. Dieweil du ein koch bist, vnd des Saffrans auch bedarffest, bit ich dich, du wollest mit mir beuthenn, wollest mir deine 12 stuck fladen vnd puterwecken vor meinen saffran geben; welcher geringer ist, soll dem andern zugeben. Zuterich gieng das ein. Also satzten sie sich vnnd rechneten, das die 12 stuckh Zuterichs 35 ₰ besser waren dann der saffran. Also gab Esopus die 35 ₰ zu, as vnterwegen alsouil fladen souil es mehr waren dann der wecken, die vbrigen pracht er seinem philosopho dem Algo, vnnd sagt jm, wie es ergangen, sprechende: Souil der fladen mehr wahren dann der wecken, souil hab ich jr gessen, vnd kostet doch jtzlichs stuckh souil sam des saffrans was. Nun rath wieuil hab ich fladen geessen, wie theuer hab ich das loth kaufft, vnd wieuil ist sein gewesen. Algus entsatzte sich vnd schalt Esopum. Er antwortet jme vnnd saget: Hastu doch grosse ding jn der zal geschrieben, den Algorismum de integris, de fractis etc^a.[1]), kanstu 19 das nicht machen | durch deine neben gesatzten Regeln, dauon viel wirdt gehalten? Algus antwortt: Du hast in allen dingen behende anschlege, wir wollen senden nach dem Algebra. Also khame Algebras. Nach Gelegenheit der sachen sprach er: Wir setzen, Esopum gekaufft haben 1 lot umb 1 ding *lb* in longitudine. Nun sind des auch gewesen 1 ding, das ist in sich der ʒ *lbrd*. Nun hat er Zuterich gegeben 35 ₰ in numeris *ar*,

1) Das bezieht sich natürlich auf den *Algorismus de integris* des Sacrobosco, der ja vielfach einem Philosophen Algus zugeschrieben wird. Der *Algorismus de fractis* dürfte dagegen der des Iohannes de Lineriis sein sollen.



das parallelogramum. Soliches 1 ʒ *ld* vnd *ar* seind gleich dem gantz parallelogramo *ad*, ist der Safran 1 ʒ vnd 35 in numeris. Nun kosten die 12 stucke auch souil, vnd doch jedes jn sunderheit kost souil, als des saffrans gewesen ist, das was *lb* vel *db* geführt in *ab*, macht 12 radices oder ding, wann *bd* ist gesetzt ein ding. Nun ist *ab* 12 mal ein ding, macht 12 radices, die halb seind 6, ist *mb* in longitudine, die in sich selbst, wird *mf*. Dauon zieh die 35, jnmassen oben gesagt, das das halbe thail nach der proposition tripartite mehr vermag in sich dann *ar* ex numeris in dem quadrat *kg*, vnd restat 1 in numeris, des radix ist *lm*, gezogen von 6, *mb*, restat 5, souil des Saffrans lot gewesen, vnd auch die | wecke 19' haben kost itzlichs *ld* 25 ₰. *mb* 6 zu *lm* wird 7, souil ist der fladen gewesen, haben kost 35 ₰: solchs zusamen macht 60 ₰. Nun die 12 stuckh kost ye eins souil ₰ als der loth gewesen, der was 5 loth *bd*, die seithen des quadrats, in *ab* 12 facit auch 60. Vnnd hat geessen 2 fladen, wann jr zween mehr seind dann der wecke, vnd also haben wir figurlich bewisen vnsere funfte Regel Gebre vnnd Almuchabole.

Nun volget von der sechsten Regel der linea tripartita Ylis des grossen Geometris.

Capitulum septimum de sexta propositione Ylis lineae bipartitae et tripartitae eiusdemque natura et essentia.

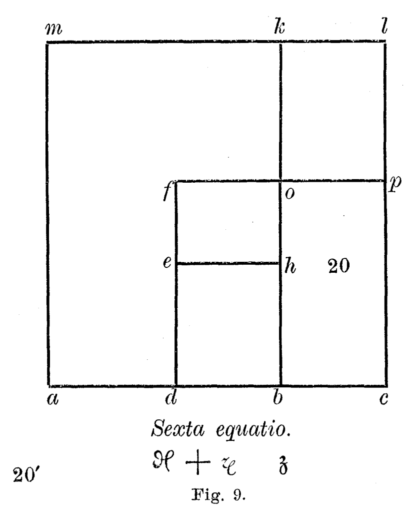
Quod ex bipartita equali in se producitur cum eo, quod ex adiecta in totam tripartitam fit, aequum est ei, quod constat ex adiecta et aequali in se.[1])

Vnnd laut zum teutschen also:

Das dann aus der gleichen gespalten Linien bipartita khomendt mit dem, das aus der Linien hinzugesatzt in die gantze tripartita erwechst, ist gleich deme, das dann geschehet aus der hinzugeworffen vnnd gleichen bipartita in sich gefurt. | 20

Aus diser sechsten proposition haben wir genomen vnser sechste Regel Gebre vnnd Almuchabole. Wir nemen *al* vor einem vnwissenden ziens jn longitudine vnd potentia (Fig. 9), vnd doch wissen wir, das parallelogramum *bl* ist ex numeris 20, und *ak* seind 8 radices in potentia des ziensus. Nun wolten wir gern wissen, was der ziens in numeris were, vnd was seine seithen *ac* in longitudine. Saget vns die proposition, das die bipartita gleich gethailt *ab* sein 8 in numeris, wann *ak* sein 8 radices

1) Euklides II, 6: Si recta linea in duo equalia dividatur, alia vero ei linea in longum addatur, quod ex ductu totius iam composite in eam, que iam adiecta est, cum eo, quod ex ductu dimidie in se ipsam, equum est ei quadrato, quod ab ea, que constat ex adiecta et dimidia in se ipsam ducta describitur.



Sexta equatio.

20′

Fig. 9.

des ziens in potentia: darumb mueſſen *ab* 8 sein jn longitudine. Nun war *db*, das halbe tail, 4: saget die proposition, das *db* in sich gefurt mit sampt *bl* 20, das dann 36 macht, sey gleich *de* in sich gefurt. Nun radix von 36, das war *dc* 6 in numeris, so ist *db* 4 gesatzt, wann *ab* waren 8 radices, seind gleich gethailt in *db*. Also so *dc* 6 ist vnd *db* 4, so ist *bc* 2 ex numeris, vnd also were *ad* auch 4, wann ime *db* gleich ist, wann *ad* ist der Linien halbthail mit dem *db* der radix. Nun haben wir *dc* 6 ex numeris, so *ad* der halbe | thail, 4 hinzukhumbt, ist *ac* die gantze Linie in longitudine 10: sprechen wir, der zens ist in longitudine 10 radicum vnd in potentia 100, vnd *ak* seind 80, das sein 8 radices in potentia, vnd *bl* ist 20, das macht 100, vnd *bc* ist 2 jn longitudine, die adiecta, macht 20 in die gantze tripartita *ac*. Vnd also fueget sich wol, solchs auch figurlich einzubilden.

Nichomachus der groſs Arismetrist hatte etzliche Bucher jn Mathematica, die wolten kaufen Aristeus vnnd Apolonius, die zwei grosen Mathematici. Nun bot Nichomachus ein Buch so theuer, souil er der hette. Aristeus sprach: ich hab 20 fl, so hat mein geselle 8 Bucher auch ydes so theuer sam du eins gibst. Wir setzen wahr vmb wahr vnd lassen es 21 gleicher seithen gleich sein. Nun 20 fl, die mein seind, vnd die acht Bucher meines gesellen jn arithmetica, so ist der stich gleich, jnmassen du begerest. Nichomachus der war des zufrede, vnd also khamen sie zu Boetio, dem grosen jnterpreten, der fraget, was sie vmb die bucher geben hetten. Appolonius antwortt: Ich hette 8 Bucher, die stach ich daran, so gab mein Gesell Aristeus 20 fl, vnd souil der Bucher Nichomachj gewesen, so theuer sind die Bucher baider seits eins am stich gegeben, vnnd rath Boetius, was die Bucher gestanden haben, die Nichomachi gewesen seind, vnd wie theuer jtzlichs am stich gegeben worden sej beide seits, vnd wieuil Aristeus vor die 20 fl Bucher nemen soll. Aristeus sprach: Lieber Boetius, du hast nun die maisten Thail in Arithmetica getransferirt, bericht vns, wann ich vnd Appolonius sein zween Geometrici vnd der zaln so grundtlich nicht erfaren, damit mir vmb meine 20 fl recht geschehe. Boetius entsetzte sich vor der Sachen also sagende: Ich bin solcher fragstuckh nicht gegrundt, auch so wiest es mein Arithmetica nicht aus. Jr solt euch Nichomachum haben lassen machen, der do gefunden

hat falsi coniecturae propositionem oder Regula lancis genant.[1]) Also besante ARISTEUS | NICHOMACHUM. Antwortet er: Jch khan vormerken, das 21′ solche frage durch die Errores genant nicht aufgelost mogen werden, vnnd gab jme anweisung an ALGEBRAM. Also sprach ALGEBRAS: Mich befrembt ARISTEUS vnd APPOLONI von euch grosſen geometris, vnd von BOETIO vnd NICHOMACHO, die do weit jn den zaln bekant sein vnd geschrieben haben, das jr kunst do wendet, vnnd soll euch solchs durch mein Gebram vnd Almuchabolam berichten, vnnd doch viel seind, die sich nennen Arithmeticos, zuvormuten die vnd dergleichen frage durch Regulam lancis zu machen NICHOMACHI, durch Ligar, durch Pagamenti vnd durch ander dergleichen noch von jnen gesatzt vnd schwerer hergehenden, vnd sprach: jr saget eigentlich, das NICHOMACHUS hab gepott vnd am stich geben ein Buch so theuer, so uil der gewesen sein. Setzen wir *ac* (Fig. 9) sein die Bucher ein ding, costen *al* den zens in sich, vnnd souil machen auch 20 fl ARISTENJ vnd die acht Bucher APPOLONJ. Nu ist das parallelogramum *bl* 20, vnd souil costen dj Bucher ARISTEI, vnd die zal derselben ist vnwissent in longitudine *bc*. Nun die Bucher APPOLONJ seind 8 jn longitudine *ab*, bipartita linea in equalia gethailt, vnd kosten das parallelo|gramum *ak*, 22 vnd ye eins ist so theuer angeschlagen, alsuil NICHOMACHI Bucher waren, der dann waren *ac*, das was gesatzt ein ding, das waren 8 ding oder Radices, die dann erfullen mit den 20 fl den gantzen zens, dem sie gleich gesatzt sein am stich. Nun saget die proposition, das die 8 radices halb *db* 16 thun in numeris mit *bl* 36 machen gleich *dc* in sich, also ist *dc* radix 6, vnd das ander halbe thail der Radix *ad* darzu ist 10 in numeris. Also waren der Bucher *ac* NICHOMACHI 10, die kosten in potentia 100, den ʒ; die 8 Bucher APPOLONJ *ab* kosten 80 fl, dann jtzlichs cost 10. So nun die gantzen Linien *ac* ist 10 Bucher, vnd APPOLONIUS hat 8, so mus *bc* 2 sein in numeris. Also, freundlicher ARISTENE, due nimbst 2 Bucher vor deine 20 fl, der jtzlichs gleich kost dem stich nach.

Vnd also haben wir bewisen vnser sechste Regel Gebre vnd Almuchabole.

Nun volgen die Propositiones ALGEBRAE Arabis seiner Gebra vnd Almuchabola, die er aus den gesatzten propositionibus Ylis, seines Praeceptoris, gezogen hat, vnd laut die erst also: | 22′

---

1) Hier wird also NIKOMACHUS als Erfinder der *regula falsi* bezeichnet, die später als Erfindung der Araber hingestellt wird, und von ihnen *Itata* genannt sei.

Capitulum octauum de prima propositione Algebrae *in sua Gebra et Almuchabola ex digestis propositionibus* Ylis *enucleata.*

Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola, earum, quae fiunt potentia in numeris, unitates rei in longitudine.[1])

Hie hebet sich an das Buch vnd die erste proposition Algebre seins ersten Buchs von seiner Gebra vnd Almuchabola, die er dann anfenglichen hat gezogen aus den gemelten vnnd gesatzten propositionibus Ylis, seines meisters des grossen Geometers, welcher text Algebre zumal schwer ist gesatzt anfenklich berurt, der dann von Aliabra, den jndischen maister gebessert ist worden[2]), jnmassen wir den jm teutschen auch einziehen wollen, vnd zu seiner zeit lateinisch nach dem deutschen setzen, das man Algebram teutsch vnd lateinisch haben mag, durch seine propositiones, vnd Aljabram seiner spros von jme gesatzt lateinisch, derhalben wir gruntlich der Gebra vnnd Almuchabola gegrundet mogen werden, vnd laut solche gemelte proposition Algebre zu Deutsch also:

Es sind die ding, die do jn der kunst Gebra vnd Almuchabola sind, vnitates des dings, welcher ding, die do seind | jn der lenge der linien vnd jrer macht jn den zalen absolutis, das ist offenbar gesagt vnd gesatzt.

23

Von dieser proposition einzufueren sollen wir mercken, das Algebras hat genomen die vnitates des dings in Gebra vor radices, vnd des dings potentz vor ein zensum, vnd solchs ding vnd zensus seind vrsache der, die jn numeris absolutis gesatzt. Sam also ein jtzliche Lini definite quantitatis in der lenge, die do hat kheinen namen der zalen, vnd doch jre potentz in der zalen ist 25, sprechen wir, das ab die linien ist ein vnitas vnd ein ding oder figur der zufindenden zalen; so ich sie in sich fuere, macht ein quadrat, das ist gesprochen bei vns ein zensus, der dann auch vnwissent ist, das ist der tribut von dem ding, das seind 25 jn numeris. Also ist die figur in Gebra der linien ab, die do jn der lenge 5 was in numeris vnd in potentia 25 auch in numeris. Vnd hierumb setzen wir jn Gebra allweg ein ding, das ist ein figur der zalen in der lenge, vnnd ein zens, das ist ein figur in potentia der zalen, vnd also sprechen wir, das in Gebra die zal sey absoluta, das ist, das dann offenbar ist der zens vnd

1) Im *Codex Gottingensis Philos. 30* ist durch Überschreiben von Zahlen dieser Satz so umgemodelt: „Sunt autem ea, quae sunt in Gebra et Almuchabola unitates rei, earum, quae in longitudine fiunt, potentia in numeris.“ Alle Handschriften stimmen aber in der Fassung überein, die wir aufgenommen haben.

2) Auch hier wieder der Hinweis auf die Verbesserung der Algebra durch die Inder.

radix. Von diesen dreien stucken saget vns die gemelte proposition, das alle stuck in Gebra vnnd Almuchabola seind vnitates des dings, welcher | ding, die do seind in der lenge in der zal vnd jrer potentz in den zalen, 23′ sie vrsach sein, das ist radix vnd ʒ, die do sind vrsach der offenen zal. Also cleret vns die gemelte proposition ALGEBRE der ding, so in der kunst Gebra vnd Almuchabola gebraucht werden, so, in dem so er spricht: unitates rei, das sein vnitates des dings. Als wir vor gesagt haben, das die gemelt linien *ab* was 5 in numeris, vnd doch anfenglich was gesetzt ein ding, also was die erste vnitas *ab* continua eine figur vnd form des dings, das wir wissen wolten in der leng, das was 5, das ding in numeris, vnd 25 in potentia was der zensus *ab* sein form, vnd also haben wir gefunden, das vns not ist, weither zuwissen der ding notturft jn Gebra, das ist des Radix, zensus vnd der zaln der forme, dann radix jn longitudine ist 1, vnd ʒ in potentia. Und nachdem aber die Gebra auf der zalen gegrundt ist, volget von der zaln erstlich das Neundt Capitel.

Capitulum nonum de secunda propositione ALGEBRAE Arabis in sua Gebra et Almuchabola eiusque expositio.

Dragma est unitas actualis absoluta, qua numerus collectione in cumulum multitudinis crescit, quae quidem in Gebra et Almuchabola quantitates numerorum vocentur. | ♈ 24

Hie saget vns ALGEBRAS von dem ersten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, vnd laut zum teutschen also:

Dragma, das ist ein bekant gewichte der zaln, das dann genenndt, gezellt vnd gewogen wirdt, in der zaln ist ein vnitas, die so gegenwertig vnbeschwert ist von allen vnbekanten dingen, sonder plos vnd lauter wissent gezelt, genendt vnd geponderirt ist in der zal, damit dann die zal anfenglich erwechst in den Hauffen zusamen gelesen jn die manigfaltigkeit. Welche dragma dann in Gebra vnd Almuchabola werden gesprochen die quantitates der zaln.

Von dem dragma zu reden, jnmassen vns die proposition clertt, nennen wir dragmam vor ein jtzliche wissende zal die do kheine beschwerung hett, das ist das sie weder grosser noch cleiner moge werden. Wann 4, 5 oder 7 oder aber ein andere zal khunen an jr substantz pleiben, des namen khein andern form noch augment noch decrement an sich nemen, als dann radix thun mag. Als ich spreche 4 radices, die mogen jres pleibenden namens quaternarii verendern werden. Wann 4 radices von 144 dem quadrat grosser sein an der zaln, wann von 64, vnd dan noch 4 radices allenthalben genent

werden, vnd hierumb werden gesagt, das Radices numeri respectivi seind,
24′ | jnmassen hernach volgt. Aber dragma sein an jm selbst plosse zaln gesprochen in Gebra vnd Almuchabola, vnd darumb die Arabi dragmam setzen, das dann ein pondus ist, als man noch in den Apotecken gebraucht, was gewonheit bey jnen zu der zeiten, das sie alle jre tribut, zins vnd geldt durch gewicht in bezalunge namen, vnd was dragma bei jnen das gewonlichste gewichte der zalen vnter dem Volke. Hierumb noch gebraucht werden in den Apoteck, wann zu den zeithen Galeni vnd Hipocratis was khein gewenlicher gewicht bei den Arabis dann dragma, das dann mit seiner besondern figuren hernach volgent wird bezeichent also 𝔇𝔣.[1] Es sprechen bei vns etzliche, dragma werde genomen vor eine gemeine muntze der moneten, als guldenn, pfennig. Sagen wir auch nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das Dragma billicher hie werde genomen vor ein pondus, dann vor eine moneten. Vrsach ist die: wann eine jtzliche monet mag geheisen werden mit mehr vnitatibus dem Radix gleich, wann ein gulden ist ein monet, vnd gulde dragma der gilt mer groschen dann eine silberne vnd dragma pfennig geltt, vnd werden doch beide dragma genent. Das ist dragma nicht der apotecker oder Arabischen, dann sie nennen dragma das pondus nach gemeinen lauf in der zaln der granen, die dann gewenlichen
25 bei allen volckern ein gewicht, ein zal | vnd ein schwer haben, vnd hierumb hat Algebras gesagt dragmam, das dann ein vnveringklich pondus ist, wann 1 c𝔣, 1 ℔, 1 lot vnd dergleichen sind bei allen Nationibus nicht in gleichen brauch oder pondus. Alsdann ist dragma, das dann vnverruckt bei allen nationibus gebraucht wurdet, wann es nach den granen genomen vnd abgeponderirt wirdet, damit die Regel sanative der Medici in einer form gehalten mogen werden, inmassen die von Auicenna, Galeno, Hypocrate, die alle Arabes gewest seind, beschrieben sind. Vnd der vrsach, das khein zal mocht besser gesprochen werden jn pleibenden wesen, dann durch dragma, hat sie Algebras angenomen mit den Arabischen Ertzten gleichmessig jn seiner Gebra vnd Almuchabola zu gebrauchen, vnd haben wir also geclert das erst gebrauchendt stuckh jn Gebra, das ist dragma. Nun volget von dem ding, das wir radicem nennen, das zehente Capitel.

Capitulum decimum de tertia propositione Algebrae Arabis in Gebra et Almuchabola eiusque expositio.

𝔯𝔢 *Res est substantia numeri impregnata unitatibus longitudine, qua census in potentia crescit. ipse namque et causae in coniecturationibus*

1) Das Zeichen 𝔇𝔣 für Dragma wird in den Dresdner Handschriften Φ geschrieben.



quaestionum radices quedam nomine totius numerorum geniturae appellare ceperunt.[1] | 25′

Hie saget ALGEBRAS von dem andern stuck seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem ding oder ꝛc, vnd laut zum Deutschen also:

Das ding ist ein substantz, die do geschwengert ist mit den vniteten in der zal zu gebern durch die leng einer linien, welcher linien lenge der ʒ mit macht erwechst, vnd solche gesatzten ding jn unser Gebra vnd Almuchabola seind vrsach der zal zu finden in den fragstucken. vnd sie haben genomen den namen radix, das wir rem nennen, radicem, das ist eine seiten oder leng des quadrats, die do vnwissent genandt ein ding ist, vnd solcher ding gemelter Gebra vnd Almuchabola seind erstlich vrsach aller geberenden zalen durch die leng der Linien.

Von diser proposition ALGEBRE zu nemen einen schrifftlichen sin, so haben wir vormals gesagt, das ein ding mag grosser vnd cleiner genomen werden vnvorrucktes namens. Als wir setzen 4 radices, das sein 4 ding, in der leng von 144, die seind grosser dann 4 radices von 64, vnd seind doch in longitudine, das ist in der seithen des quadraten, ytzliche vor ein ding gerechent, vnd wie wol die vier ding von 144 in der leng geschwengert sein, wann jtzlich | ding hat zu gebern 12 vnitates in numeris, 26 also desgleichen von 64 sein 4 ding ytzlichs 8 vnitates zu gepern. Vnnd hierumb nennet ALGEBRAS rem ein geschwengerte substantz der zalen, die do geschwengert ist mit unitates in der lenge in numeris gegen den zensus zurechnen in numeris. Vnd hierumb mogen wir setzen ein ding, das zu gepern hat vnitates jn der zalen, vnd das nennen wir radicem oder rem, von welchem dann zu gebern muglich ist alleine zaln, jnmassen wir dann angezaigt haben. Welchs dann mit besondern zaichen wirdt figurirt jn nachvolgenden Capitel. Wann vrsprunglich der grundt zu fassen, es were ein quadrat vnwissent gesatzt $abcd$ (Fig. 10), das sein, ab wer vnwissent. Nun nach vnser Gebra vnd nach rechten verstandt, so wirdt genandt ab eine Lini schwanger, ein ding, das do tragen mag alle zalen, wann dem ʒ ist noch kheine aufgelegt, vnd gleicherwis das ab, das einige ding in der leng geschickt zu gepern ein

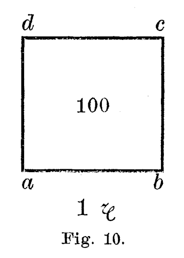


Fig. 10.

1) In der Handschrift *C. 8* ist der Wortlaut dieses Paragraphen durch übergeschriebene Zahlen in folgender Weise berichtigt: „Res est substantia numeri impregnata unitatibus, qua census longitudine crescit in potentiam. Ipse namque est causa totius geniturae numerorum in coniecturationibus numerorum. Nomine quidem radicem appellare ceperunt.“ Das stimmt auch mit der deutschen Übersetzung besser überein.

jtzliche zal, also ist auch der tribut des dings zu wagen in pecunia eine jtzliche zal, die jme aufgelegt ist oder wurde. Nun legen wir auf den 26′ zens | 100 dragmas argenti, so were *ab* das ding in longitudine, beschwerdt mit 10 vnitatibus in numeris. Legen wir dann auf der Linien 9 in numeris, so ist der tribut 81 dragmas, also were das ding in longitudine 9 in numeris vnd 81 in potentia. Vnd solchs ist der vorstandt in vnser Gebra, das wir nennen cosam, das ist ein radix oder res gesaget. Nun folgett das eilfte Capitel von dem dritten stuckh, das ist vom zenso.

Capitulum undecimum de quarta propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.*

ʒ *Zensus est potentia radicis in se descripta, qua res longitudine in superficiem ab aequalibus ad aequalia pariendum numerum denudanda crevit.*

Hie saget vns ALGEBRAS von dem dritten stuckh seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist von dem zens, vnd laut zum deutschen also:

Zensus ist ein Macht des radix in sich gefurt, welcher macht das ding in der lenge gesatzt in einem superficiem von gleich zu gleich ist gewachsen, vff das do wurde entplöst die geberende 27 zal, von der wegen dann das ding gesatzt was. |

Diser proposition einen vorstentlichen schriftlichen sin einzufueren, so gibt vns die proposition zu verstehen, was ʒ sey in vnser Gebra vnnd Almuchabola, saget, das zensus sey, dadurch das ding oder den radix in den superficiem quadrieren in sich gefurt etlicher weyse. do ein ding, das do einig ist, so dasselbig gesatzet oder geschatzet wird in dem werdt, oder jm selbst gleich, so ist das sein zins oder tribut, vnd wird bey vns genandt gleicher weis als ein geldt des dings, wann ein jtzlich ding in der weltt nicht hoher khan gewirdigt werden oder verkaufft, dann alsuil als an jm selbst geachtt. Also wird ʒ pej vns genandt als ein Tribut des dings, wann ein mas verschlossen jn einem vaſs zuverkauf wird geacht als ein vnwissent ding. Nun solchs am einem valorem vnd werdt anzuschlagen, das es werdt were, antworten wir nach vnser Gebra vnd Almuchabola, das es nit hoher khan verkaufft werden, dann vmb sich selbst, dann ein jtzlich ding ist sein selbst werdt, vnd also ist derselbig werdt bei vns gesatzt ein ʒ, das ist ein guldt oder valor des dings. Dann ein ding, das do vnbekannt ist, khan keiner zal zugeeigent werden der guldung dann das ding selbst. Nemen wir vor, solchs besser zu bedeuten, damit wir 27′ grundtlich bericht werden, | was der ʒ in vnser Gebra sey: Es kauft einer vom andern ein buch umb ein gelt zu bezalen vff etlich zeitt. So die verscheintt, hat er des gelts nicht, damit er bezalen mag, wirdt jn allem rechten ertheilt, die weil das Buch nicht geergert worden ist, das er sich

mit seinem gut mus wider bezalen lassen. Also solche Bezalunge wirdt bej vns gesprochen ein ziens, das Buch mag 1000 fl haben golten, vier oder funf, noch dennoch ist der ziens oder bezalung recht wider mit dem ding, vnd also hastu vorstentlich, das do erstmal seinen vniteten nach wirdet das ding in longitudine gesatzt, vnd alsdann sein valor, das ist in potentia, angeschlagen so hoch, als es an jm selbst ist. Wir mogen auch den gemelten zensum nennen ein quadrat, der do von gleicher lenge zu gleicher lenge ist erwachsen, jnmassen vns die proposition weyset. Aber so verstentlich zu begreifen, ist es schlechten menschen zu dunckel, vnd hierumb nennet es ALGEBRAS zensum. Vnd also haben wir clerlichen, das do radix gepirdt zensum, vnd die zwey geberen vnitates in numeris. Nun volget von der eigenschafft diser dreier stuckh, dragma, radix, zensus das 12 capitel.

Capitulum duodecimum de quinta propositione ALGEBRAE *eiusque expositio.* | 28

His itaque dispositis, in Gebra ordine, quo sibi succedunt signis non numero, omnis superficierum et solidorum series inseritur, atque cuilibet proportionati continue inmutabiliter communicet.

Nach gemelten dreien stuckhen saget vns ALGEBRAS von diser proposition, vnd laut zum deutschen also:

Die do sind in Gebra also geordnet der ordnung, als sie nacheinander volgendt der zaichen nit mit der zal, in solcher ordnung wird angezaigt die nacheinander volgung thun alle zalen der superficien vnd solidorum, auch welche Ordnung einer yeden proportionalitet vnverruckt gemeine ist.

Inmassen wir die cleren wollen, zum ersten sagt die proposition: so die gemelten drei stuckh werden gesatzt in der ordnung, der sie dann nacheinander volgendtt mit den zeichen, sagen wir, das zum ersten ist gesatzt dragma, die wir bei vns figurlich schreiben 𝔇𝔣, ∅, welcher dann in der ordnung vorbeschrieben volgt der Radix, den wir figurlich signiren 𝔯[1]), solchen volget nach der 𝔷, von welchem wir gesaget haben, der do entspreufst aus den 𝔯 in sich gefurt. So nun solche drei zaichen 𝔇𝔣, 𝔯, 𝔷 jener ordnung, wie dann angezaigt, gesatzt, | so entspringen aus jnen alle 28′ andere nachvolgende zaichen, nicht der offen zal not zu sein, wann sie allein proportionaliter dinet jn der zaln. Wann wir wissen, das jn dreyen zaln die extremi quadrati sein vnd im vierten cubi, jm funften 𝔷 de zenso,

1) Das Zeichen für *res* also 𝔯 ist in der Göttinger Handschrift geradezu ein geschriebenes deutsches x (𝔵), so dass also die Entstehung von x aus diesem Zeichen sehr wahrscheinlich ist. Das Zeichen für *census* ist ebenso ein deutsches 𝔷; es wird ja auch mit *zens* oder *ziens* identifiziert.

vnd so sie also fortpas gesatzt werden die obgemelten signa, so machen sie bedeutlich die natur aller proportionen. Also wir setzen wollen duplam proportionem continuam in numeris, sehen wir, das der dritt in der ordnung der proportionalitet continua ein quadrat ist, der viert ein cubus, der funfft ein zensus de zens. Aber die gesatzte proportion dupla dienet allein, soweit sich jr zal ausspannet. Aber die | proposition mit den signis gesatzt, die ist allein proportionaliter dienen, wann in einer ytzlichen proportionalitet continua werden die nomina der superficien zalen vnd solidorum vnuerruckt gehalten. Es ist auch in disen signis nicht anderst zu halten, dann wie es jn andern continuen proportionaliteten gehalten wirdt, also das die speties continua, disiuncta, eversa, permutata etc. gehalten werden. Wann gleicherleiweyse die proportion ℞ ist ad ʒ, defsgleichen ist ʒ ad cubum vnd ce ad ʒʒ; darumb auch ℞ ad ce sam ʒ ad ʒʒ, vnd dergleichen der andern signa, die wir dann darstellen haben in cce, vber den nicht not ist zugehen, jnmassen hernach die vrsach ereugen soll.

29

Dragma	φ	1
Radix	℞	2
Zensus	ʒ	4
Cubus	ce	8
Zensus de zenso	ʒʒ	16
Sursolidum	ß	32
Zensi cubus	ʒce	64
Bissursolidum	bß	128
Zensus zensui de zenso	ʒʒʒ	256
Cubus de cubo	cce	512

Ist auch von Algebra weither nicht gesetzt dann durch diese drei Zeichenn φ, ℞, ʒ, die dann continue proportionales sein, vnnd aus jn entspringen alle nachvolgende signa mit jren caractern geschrieben, jnmassen bei vns gewonheit ist vnnd angezaigt. Bin auch guter zuversicht, ein yeder fleissiger schuler, ehe vnd er auch anheb vnsere Gebra, jm sollent vorhin bekant sein die proportiones, proportionalitates vnd medietates numerorum. Wann vns 29' die ding alle einzufueren wurde sehr weitleufig, | vnd darumb allein einzufueren, was vns in Gebra vnd Almuchabola not ist, setzen wir bedeutlich caracteres gemes den superficien vnd corporibus, vnd, wie die erwachsen angezaigter continua proportionalitate, wollen wir satzen vnnd aufsdrucken jn nachuolgendem Capittel.

Capitulum tredecimum de sexta propositione Algebrae *eiusque expositio.*

ce *Cubum, quem primum radix in censum produxit, ipse quidem ab aequalibus per aequalia ad aequalia soliditetur et in altitudinem crescit, regularissimum omnium corporum, quo solo et tetragono superficie vel planitie eius cuncta metiri habent.*

In hienachgemelten stuck saget ALGEBRAS, was cꝰ [1]) sey, vnd laut zum deutschen also:

Cubus, den do erstlich pflantzet radix durch den zensus, der erwechst von gleicher leng durch gleich gleichlich in die hohe, vnd ist das aller richtigte corpus vnter allen andern corpora, mit welchen allein vnd dem quadrat, der sein planum ist, damit er wechset, alle corpora gemessen werden. | 30

Sollen wir wissen vnd aufmerkung haben, das der cubus wirdt gebraucht in Gebra gleichmessig erstlich durch den ꝝ gesatzt ein ding, welchs so das in sich gefurt wirdt, erwachst der zens, so dann der noch einmal in den zens gefurt wirdt, erwechst cubus, darumb mus man hier hinen gebrauchen das ꝝ cubice, jnmassen dann hernachmals volgen wirdtt, dann er hie alleine mit seinem signo, vnd nicht mit wissender zaln, gleich wie der zens, gebraucht wirdt. Sie haben auch cꝰ vnd ʒ einen ꝝ, jnmassen die proposition sagett, das des cꝰ planicies sey der tetragonus, welcher seiner seithen in plano, der cꝰ in altitudine erwechst: Darumb spricht er: *ab aequalibus ad aequalia aequaliter soliditetur et in altitudinem crescit,* vnd dergleichen sein alle, die do wachsenn in gleicher proportion, wann Sꝰ ad cubum in gleicher proportion als cꝰ gegen ʒcꝰ, also auch ꝝ gegen ʒʒ, als ʒʒ ist gegen biß, und seind alle in den radix cubica, jnmassen dann die gesatzte figur der signa ausweist, die deme einem ytzlichen Sꝰ ist gemes, das du dann mit einer zal hast zu vorsuchen, die dann continua proportionalis ist, dabei du erkennen mogest die proportion der zalen gegen den signa. Vnd von dem cub wollen wir, zur zeit den Algorismus setzen, bas ercleren, wie er in der zal sol gebraucht werden. | 30′

Capitulum decimum quartum de septima propositione ALGEBRAE eiusque expositio.

Census de censo ipsum est quadratum quadrati, cuius radix contra cubum ducta, vel census in se, a solido in planitiem relabata quadratura. ʒʒ

Hie volget von dem ʒʒ, der dann erwechst von dem radix in den cꝰ gefurdt oder aus dem ʒ in sich selbst gefurt, vnd laut zu vnserm deutschen also.

Zensdezens, das ist ein quadrat von einem quadrat, des radix wirdt gefurt wider in den cꝰ, oder der zens in sich selber, vnd wirdt genant ein quadratura, die do khumbt von solido gefallen in die planitiem.

---

1) Das Zeichen für den *cubus* ist das Anfangs-*c* mit darangehängter Endsilbe *us* (9), die der Bequemlichkeit halber umgekehrt geschrieben ist (cꝰ).



Wann ein jtzlich corpus, so das in sein radicem gemultiplicirt wird, erwechst in den plan, vnd darumb kumbt ʒʒ von cℓ in seinen 𝓇 gefurt, oder aber aus dem quadrat in sich selbst gefurt, vnd wirdt genandt zensdezens regularis Gebrae. Wann gleicherweis ʒ radicem hat, also hat ʒʒ radicem radicis quadratam vnd wirdt von den superficien in plano gemelter proportion der signa gefunden. Deſsgleichen cubus de cubo wirdet regulare Gebre von den corporischen zalen, wann er radicem cubicam hatt. Von den zweien wir dann aus dem zenso die superficien vnd aus dem cubo die

31 corpora reguliren, darumb ist | ʒʒ regulatiuum der superficien aus ʒ, vnd ccℓ der corpora aus cℓ, vnd wirdt hie auch gebraucht mit den zaichen zu coniecturiren, jnmassen wir dann vormals rem oder radicem gesatzt haben. Denn, so wir setzen in vnser Gebra 1 ʒʒ, das ist, das zu viermalen jn die multiplication ist gegangen vnd von dem radix zum vierten mal prolongirt ist, dann 16 ʒʒ ist zu 2 mal 2 vnd zu 2 mal 2 von 2 dem radix wirdt geweitert werden, darumb heisen wir es quadratum de quadrato, des radix ist von dem 𝓇 radix. Als von 16 ist 4 radix, von welchen 4 ist radix 2, also ist radix des ʒʒ 16 in der zal 2, welches zensdezens, so wir erstlich ein radix gesetzt haben, das ist ein 𝓇 wer 2, valor des dings in numeris, vnd das ding wer 2 vnd sein ʒʒ wer in numeris 16. Vnd also ist auch jm cubo vorgesatzt, 𝓇 cubica ist das ding etc. vnd deſsgleichen auch in den nachuolgenden Signis als ß vnnd biß aigentlich auſsdruckt wirdt. Volget von dem sursolido vnd bissursolido das 15 Capitel.

Capitulum decimum quintum de octava propositione Algebrae *eiusque*

31′ *expositio.* |

ß, biß *Sursolidum simul et bissursolidum ductiones quedam radicum contra soliditatem, quae a corporeitate in planiciem et ab eadem in eandem irradicabilem recedunt. Ipse enim radicem gerunt non censicam, non cubicam, sed quo tunc loco ductione a radici alterari ceperunt.*

Hie saget Algebras von den sechsten vnd achtenn signo, das ist von dem sursolido vnd bissursolido, vnd laut zum deutschen also:

Sursolidum vnd bissursolidum seind fierung etlich der radix wider die soliditet, welche dann von den corporischen zalen in die plan, vnd von der plan wider die corporischen zalen vngeregulirt fallen oder wachsen, wiewol sie radices gepern vnd haben, haben aber nicht quadratam noch cubicam, sundern dann der fuerung jrer stadt, so weit sie dann von den 𝓇 erstlich sein ausgezogen oder gegangen.

Von disen signis sursolidi vnd bissursolidi laut der proposition werden

hiemassen gesatzt von ALGEBRA, sam die vorgemelten signa gesatzt seind worden zu coniecturirn in Gebra vnd Almuchabola, vnd wiewol sie kheinen radicem regulirn nicht haben, als cubicam oder tetragonicam, noch auch nicht radicem ʒʒ | doch so werden jre radices genant an der statt, so weit [32] die dann von dem ersten radicem gewandert haben, als sursolidam vnd bissursolidam, von welchen dann zu irer zeit zu extrahirn wir sagen werden in vnserm andern Buch, wann die zwei signa vnter allen signis exempt vnd ausgenommen seindt. Hierumb spricht die proposition: *irradicabilem,* id est, non regularem, wann alle andere signa mogen durch gesatzte extraction der radix volfurt werden, jnmassen durch maiores nostros vnd vnsere vorfarn gesatzt sein als radix ʒc𝔩, quasi ein c𝔩 des ʒ. Dann radix cubica von 64 ist 4, das ist der zens, des ist 2 sein radix. Gleich ist auch zugesprochen radix cc𝔩 von 512 ist 8, vnd radix von 8 ist 2, vnd also seind dise signa gegrundett auf die corpora vnd superficies, die da radicem haben, jre latera secundum proportionem duplicatam et triplicatam. Wann die superficienn haben die proportion gegen jren latera proportionem duplicatam, vnd die corpora triplicatam, aber die zwei signa supersolidum vnnd bissursolidum, als 32, das dann sursolidum ist, seind exempta, dann sie haben quintuplicatam vnd septuplicatam laterum vnd gleichwol 2 vor jren radicem, als 64 ʒc𝔩 oder 512 cc𝔩. Aber allein, das | der nicht ge- [32′] regulirt ist vnnd in vsu oder gewonheit der schlechten Arithmetic nicht ist, dann wir von disen radicibus sonderlich werden sagen, zuerfordern jre radices, als dann die proposition saget: *radicem gerunt* etc. Also nennen wir jre gemelten radices sursolidam vnnd bissursolidam, wann die durch funffte vnd sibende multiplication von dem radix aufsgewandert haben, jnmassen ʒʒ der vierten Multiplication extendirt ist von dem 𝔯. Auch soltu mercken, das die zwei signa werden hierumb genant sursolida, das ist surda solida, dann sie entspringen aus den corporibus vnd superficiebus zusamen gemultiplicirt an surdischen vnd irrationalischen section als an der funfften vnd siebenden stadt der Multiplication. Nemen wir 4, das ist ein quadrat vnnd superficies, vnd nemen 8 den c𝔩. So wir nun sprechen 4 mal 8 ist 32, das khan nicht haben 𝔯, dann proportio corporum ist sesquealterirt gegen den superficiem, wann duplicatum vnd triplicatum seind sesquialteri, welcher dann weder duplicata noch triplicata ist. Vnd desgleichen bissursolidum. Von 8 das dann ist c𝔩 vnd 16, | das dann ist ʒʒ, wirdt 128, das dann [33] auch kheinen regulirten radicem hatt, sondern sursolidam. vnnd von solchen ductionibus wirdt noch vil demonstrirt, indem man findet, das sie gleichermas 2 pro radici ß vnd biß haben, jnmassen die andern regularen signa in der figura gesatzt ʒc𝔩, ʒʒʒ, cc𝔩.

Capitulum decimum sextum de nona propositione Algebrae *eiusque expositio.*

ʒcℓ, ʒʒʒ, ccℓ

Caeterae namque ductiones regularem quandam compositionem superficierum duplicatae vel corporum triplicatae proportionis laterum habent mutuo (scilicet inter se corpus ad corpus, superficies ad superficiem), vero quemadmodum laterum atque superficierum aut corporum atque superficierum ad invicem constabit sesquialtera nota proportio.

Hie saget Algebras von den andern dreien seiner zal ʒcℓ, ʒʒʒ vnd ccℓ, vnd laut gemelter text zum Deutschen also:

Die andern signa vnd fuerung oder multiplicirung der zalen, die haben eine geregulirte satzung mit zwei lateribus als die superficien duplicata jrer latera, die corpora triplicata jrer laterum, aber so die vnnereinander jtzliche proportionirt wirdt 33' oder werden, als | latus gegen andere laterum, oder linien gegen linien, superficies gegen einem andern superficie oder Corpus gegen einem andern corpore, so ist ein Latus gegen einem andern latus als ein simpel linien gegen der andern. Aber ein superficies gegen dem andern ist als der latera duplicata, das ist in sich gemultiplicirt; der corpora proportio ist als der latera getriplicirt. Also ist zu concludiren, das ein corpus gegen den andern ist mit jren superficien in solido, als ire superficies der corpora gegeneinander in plano. Auch so ist ein superficies gegen den andern duplicata, in welcher dann die proportion der laterum gegeneinander ist in longitudine duplicata. Aber so man proportionirt ein corpus gegen einem superficien, das ist sesqualterirt. Wann duplicatum ist der superficien vnd triplicatum der corpora; so man nun

1 𝔑
2 · 3 𝔯
4 · 6 · 9 ʒ
8 · 12 · 18 · 27 cℓ
16 · 24 · 36 · 54 · 81 ʒʒ
32 · 48 · 72 · 108 · 162 · 243 ß
64 · 96 · 144 · 216 · 324 · 486 · 729 ʒcℓ
128 · 192 · 288 · 432 · 648 · 972 · 1458 · 2187 bß
256 · 384 · 576 · 864 · 1296 · 1944 · 2896 · 6374 · 6561 ʒʒʒ
512 · 768 · 1152 · 1728 · 2592 · 3888 · 5782 · 12748 · 12922 · 19683 ccℓ [1]

1) Unter diesem Dreieck steht in *C. 8* die Unterschrift: „Figura omnium ductionum, superficierum, solidorum et proportionalitatum.“ In den beiden andern Dresdner Handschriften fehlt die Zusammenstellung vollständig.

duplicatum vnnd triplicatum zusamen rechent in der proportion, so seind die sesqualterj, das seind sursolidi vnd biſsursolidi.

Von disen dreien signis den text gleichmessig dem vorstandt einzufuren, nemen wir vor vns ʒcℓ als 64, der dann ist ein zens des cℓ 8, welcher dann 8 hat vor sein latus rationale vnd wirdt geheiſsen ʒcℓ, wann sein duction an der sechst stat ist vnd hat gemeinschaft |[34] mit dem cubo vnd zens. Mit dem cubo 8 dann der cℓ 8 wirdt aus dreien duplen, so wirdt diser aus 2 mal 3 duplen. Also von wegen der drei duplat hat er gemeinschafft mit dem Cub von 8 des ꝛ ist 2, der hie mit 6 duplen geduplicirt wird, das ist 4, also ist ꝛ von 64 cubica 4, des vrsach ist 64 ein cℓ des ʒ 4. Es wirdt auch genandt cℓʒ, das ist cubizens von wegen der 6 dupla. Wann der ziens wirdt aus zweyen dupla, so ist das zu dreimal zwey. Also mit dreien duplen wer es 8, vnd aber mit zwir 8, das wer 8 mal 8, das wer 64, von wegen der 2, vnd also ist es regularis ductio, wann es hat duplicatam proportionem mit 8 superficien vnd mit 4 dricorpora, welcher radix cubica von 8 vnd zensica von 4 gleich sein in 2. Aber ʒʒʒ, die achtest duction aus von 2 dem radix, entspreuſst aus 8 duplen vnd hierumb, das ʒʒ mit 4 duplen erwechst, vnd diser mit 8, wird duplicatum, also ʒ de ʒʒ, 256, wann 256, das ist ʒʒ die achtest duction von 2 aus; des radix ist 16, das ist ʒʒ; des radix radicis 2, vnd hat also dise duction eine geregulirte proportion mit den superficien. Von dem letzten signo ccℓ das |[34′] ist cubus ab cubo, welcher dann die neundte auffurung ist von dem radice, wann der aus den neun duplen khumbt. Nun 9 duplum das ist triplum triplati, wenn aus drei duplen wirdt 8, aus den andern auch 8, aus den dritten auch acht, das ist 8 mal 8 zu 8 mal ist 512. Des Radix radices cubica ist 2, vnd das letzte signum in gemelter Gebra ist auch regulare mit den Corporen, vnter welchen alle signa ß vnnd biß khein regulirt convenientz nicht haben, dann sie quintuplicatam lateram haben vnd septuplicatam, welche proportion khein convenientz haben mit den corporibus, wann sie weder duplicata noch triplicata seint vnnd an surdischen stetten gesatzt werden, inmassen darnach jn vnserm dritten buch von jren radicibus gesagt wirdt.[1])

Nun volget das 17 capitel ALGEBRE von den vergleichungen, welche dann entspringen aus jetzt gesatzten Zeichen.

---

1) Die von unserm Verfasser angewendeten Zeichen sind also folgende:

	𝔑,	ꝛ,	ʒ,	cℓ,	ʒʒ,	ß,	ʒcℓ,	biß,	ʒʒʒ,	ccℓ,
das ist	x^0,	x^1,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9.

Capitulum decimum septimum de decima propositione Algebrae *eiusque expositio.*

35 *Omnium ductionum ordinis proportionalis descripti | octo aequationes Gebrae et Almuchabolae invenimus, quarum quaelibet signis ad duas aequales restaurando vel minuendo partes reducitur.*

Hie saget Algebras was vor Equationes entspringen aus vorgesatzten Signis vnd ductionibus, vnd lautet zum teutschen also:

Von allen fuerungen oder multiplicirungen der proportionalischen satzung der signa vorbeschrieben finden wir acht aequationes Gebre vnd Almuchabole, welcher equationes jr jtzliche mit vorgemelten signis zuthailen, das ist zu zweien gleichen thailen bracht wirdt mit gebung oder nemung der affirmirung vnd negirung, jnmassen hernach volgen wirdt zu seiner zeit der equationes demonstrationes einzufueren.

Welchs aber werden die gemelten equationes, wollen wir dir ordine setzen. [1])

φ		ꝛ
ꝛ		ʒ
cℓ		cℓ
ʒ		ʒʒ
ʒʒ	aequatur	ß
ß		ʒcℓ
ʒcℓ		biß
biß		ʒʒʒ
ʒʒʒ		ccℓ

Die erst equation der gemelten signa ist, wann zwei einander vergleicht werden, die nach ordnung der proportionalischen Satzung nacheinander volgen, vnnd khein Intermis gesetzt wirdt, vnnd seind hie gesatzt die signa diser equation. Wann jre proportion ist in- 35′ massen | φ vnd ꝛ gegen einander gesatzt, das wir vns dann haben zubewaysen jm 12. capitel, wann sie continui proportionales seind, hierumb mus sein φ gegen ꝛ als ꝛ gegen ʒ, vnnd hierumb wirdt die erste equation genant, wann ein signum dem negstvolgenden vergleicht wirdt.

---

1) Die von unserm Verfasser aufgestellten Gleichungen sind in neuerer Bezeichnung folgende:

I) $ax^n = bx^{n+1}$, $n = 0 \ldots 8$; II) $ax^n = bx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

III) $ax^n = bx^{n+3}$, $n = 0 \ldots 6$; IV) $ax^n = bx^{n+4}$, $n = 0 \ldots 5$;

V) $ax^n = bx^{n+1} + cx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

VI) $bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2}$, $n = 0 \ldots 7$;

VII) $cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1}$, $n = 0 \ldots 7$;

VIII) $\left.\begin{matrix} ax^n = bx^{n+2} + cx^{n+4} \\ bx^{n+2} = ax^n + cx^{n+4} \\ cx^{n+4} = ax^n + bx^{n+2} \end{matrix}\right\}, \ n = 0 \ldots 5;$ $\left.\begin{matrix} ax^n = bx^{n+3} + cx^{n+6} \\ bx^{n+3} = ax^n + cx^{n+6} \\ cx^{n+6} = ax^n + bx^{n+3} \end{matrix}\right\}, \ n = 0 \ldots 3;$

$$\left.\begin{matrix} ax^n = bx^{n+4} + cx^{n+8} \\ bx^{n+4} = ax^n + cx^{n+8} \\ cx^{n+8} = ax^n + bx^{n+4} \end{matrix}\right\}, \ n = 0, 1.$$

ϑ		ʒ
ꝛ		cℓ
ʒ		ʒʒ
cℓ	aequatur	ß
ʒʒ		ʒcℓ
ß		biß
ʒcℓ		ʒʒʒ
biß		ccℓ

Die ander vergleichung ist, wann zwei signa durch das mittel vbergangen einander werden vergleicht vnnd auch nach ordnung nacheinander volgenden egesatzten proportionalischen satzungen, welche satzung vorgleicht wirdt dem superficie. Wann die erst gesatzte regel vnd equation ist vorgemelt, hat die natur der linien, wann sie khein intervallum hat, das ist khein jntermission, sondern continue volgendt in forma der linien. Aber dise gesatzte hat ein Intervallum jn forma der Linien eins signums, welchs nach ordnung vbergangen wirdt, jnmafsen die figur clerlich aufsweist durch die signa.

Die dritt equation ist, wann do zwei signa vbergangen | werden 36 jn ehegemelter satzung oder proportionalischen ordnung. Solchs hat die

ϑ		cℓ
ꝛ		ʒʒ
ʒ		ß
cℓ	aequantur	ʒcℓ
ʒʒ		biß
ß		ʒʒʒ
ʒcℓ		ccℓ

natur der corpora, welche dann zwei jntervalla haben oder media proportionalia. Solchs wirdt dann durch den cℓ volfurt, als vnsere dritte equation verlautern wirdt, dann sie seind alle proportionalia. hierumb mus die proportion sein ϑ ad cℓ als ꝛ zu ʒʒ, zwischen welchen dann allemal zwei signa jntermis sein vnd alwegen proportion der corporen ist. Wann, so wir setzen ein comutabilen numerum der proportionen, jnmafsen wir jm 12 Capitel gesagt haben: So dragma, das ist ein vnitas actualis, wirdt vorgleicht 8 cℓ, wird von not corpus gegen corpus geproportionirt, darumb sein corpora, die proportion triplicata latera haben. hierumb radix cubica von 8 wirdt nach der equation werden valor. So wir nun ꝛ gegen ʒʒ proportioniren, das ist 2 gegen 16, wirdt aber die gemelte proportion gehalten, in welcher satzung vntermischt ist ʒ vnd cℓ, das der form der dritten equation, jnmafsen die figur aufsweist.

Die vierdt aequation wird vorstentlich aus disen signis gezogen, so dann drei signa werden intermittirth | jn gemelter ordnung der propor- 36′ tionalischen satzung, vnd diese aequation wirdt auch dem superficie vor-

ϑ		ʒʒ
ꝛ		ß
ʒ		ʒcℓ
cℓ	aequantur	biß
ʒʒ		ʒʒʒ
ß		ccℓ

gleicht; wann so ϑ wirdt vorgleicht ʒʒ, werden drei signa intermittirt, vnd radix radicis quadrata ist der valor. Vber disen saltum diser dreier signa ist nicht gewonheit, wann so mann transgressum hat vber 4 signa, so kheme radix vf sursolicam, der dann bei vnsern Arithmeticis jn gewonheit vnd brauch nicht ist. vnd wie wol wir von dem jn vnserm dritten buch sagen werden mitt einfurenden demonstrationibus, lassen wir das hie zur zeit pleiben vnd wollen transgressive hiemit eingezogen haben, die do durch ordnung der

ductiones vnd ordnung multiplicationis geschehen mögen. vnd so wir nun transgressum hetten mit sechsen signa, so erheischt nott, das 𝔑 mus sich vorgleichen 𝔟𝔦ß, welchs radix bisursolica ist valor, vnnd also dergleichen wollen wir hiemit eingebracht haben. Wie die signa gemelter equation stehen sollen weist aus die Figur.

37 Die funfft aequation wirdt vormerckt aus ge|melten signis, so drei signa nach einander volgent, vnd die letzten zwei werden vergleicht den ersten jn gemelter proportionalischer satzung, welche auch den superficiebus, jnmassen wir jn den sechst propositionen Ylis demonstrirt haben, vnnd diese satzung daraus gezogenn, welche dann nach ordnung der aequation also gesetzt werden wirdt.

𝔯	𝔷	aequantur	𝔑
𝔷	𝔠		𝔯
𝔠	𝔷𝔷		𝔷
𝔷𝔷	ß		𝔠
ß	𝔷𝔠		𝔷𝔷
𝔷𝔠	𝔟𝔦ß		ß
𝔟𝔦ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔠
𝔷𝔷𝔷	𝔠𝔠		𝔟𝔦ß

Die sechste Equation gemelter signa wird vormerckt in gedachter proportionalischen satzung, wann do drei signa nacheinander volgent, vnnd die ersten zwei werden vorgleicht dem dritten, welche aequation abermals den superficien wird zugeaignet, wann sie continue nacheinander volgent sein. vnd wie wol wir sprechen, das die ersten zwei dem letzten vorgleicht werden, so geschicht intermissis des mitteln, jn dem, das das erst dem 37′ letzten gleicht mit den mitteln, vnd stet in der figurn also mit jren | signis:

𝔑	𝔷	aequantur	𝔯
𝔯	𝔠		𝔷
𝔷	𝔷𝔷		𝔠
𝔠	ß		𝔷𝔷
𝔷𝔷	𝔷𝔠		ß
ß	𝔟𝔦ß		𝔷𝔠
𝔷𝔠	𝔷𝔷𝔷		𝔟𝔦ß
𝔟𝔦ß	𝔠𝔠		𝔷𝔷𝔷

Die siebende Equation vorberurter Signa angezaigter proportionalischer satzung oder ordnung ist von dreien signis, welche ohne mittel nacheinander volgenden, vnd das erst vnd letzt werden vergleicht dem mitteln, welche mit den negsten vorgesatzten zweien vorgleicht den superficien vnd

nicht den corporischen zaln, jnmassen die nachvolgende figur aufsweist, wie gesatzt:

𝔑	𝔯		𝔷
𝔯	𝔷		𝔠
𝔷	𝔠		𝔷𝔷
𝔠	𝔷𝔷		ß
𝔷𝔷	ß	aequantur	𝔷𝔠
ß	𝔷𝔠		𝔟ß
𝔷𝔠	𝔟ß		𝔷𝔷𝔷
𝔟ß	𝔷𝔷𝔷		𝔠𝔠

Die acht Aequation wird gesatzt von dreien signis nacheinander volgende in gemelter ordnung der proportionalischen satzungen, doch dermassen, das eine ordenliche saltirung geschehe, vnd alle wege zwei einem vergleicht oder equirt werden, vnnd wirdt vf egemelte siben regeln gegrundt; vnd hierumb wird sie nach den negsten dreien jn drei theil gespalten, vnd noch jeder aber in drej nach den ersten gesatzten. Zum ersten, wann do saltus geschicht eines signi, welchs alsdann soll werden vorgleicht auf das letzt den ersten zweien, | aber das erst den letzten zweien, 38 aber das erst und letzt dem mitteln; vnd nach solchen radix tetragonica gibt valorem nach der andern Equation. Zum andern, so aber transgressus geschicht mit zweien signis gleichmäfsig der dritten Aequation vnd alfsdann saltum abermals, das erst vnd letzt dem mitteln, aber das erst vnd ander dem dritten, aber das letzt vnd mittel dem ersten, nach den negst dreien gesatzten aequationibus, vnd alfsdann radix cubica beweist den valorem. Zum dritten, so der saltus geschicht mit dreien signis gleich der vierdten gesatzten Equation vnd also die saltua abermals vorgleicht werden nach negst gesatzten dreien: das erst dem letzten vnd mitteln, aber das letzt dem ersten vnnd mitteln, aber das erst und letzt dem mitteln, vnd alfsdann radix radicis beweist valorem nach der vorgenanden vierden equation vnd wird mit jren signis dreifaltig also gesatzt in neun gespalten species.

Durch die funfft Equation zu machen alsdann durch die andere				Durch die sechste zu machen alsdann durch die andere			
𝔷	𝔷𝔷		𝔑	𝔑	𝔷𝔷		𝔷
𝔠	𝔯		𝔯	𝔯	ß		𝔠
𝔷𝔷	𝔷𝔠	aequantur	𝔷	𝔷	𝔷𝔠	aequantur	𝔷𝔷
ß	𝔟ß		𝔠	𝔠	𝔟ß		ß
𝔟ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔷	𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷		𝔷𝔠
𝔷𝔠	𝔠𝔠		ß	ß	𝔠𝔠		𝔟ß

Durch die siebende Equation
darnach durch die andere.

ϑ	𝔷	aequantur	𝔷𝔷
𝔯	𝔠		ß
𝔷	𝔷𝔷		𝔷𝔠
𝔠	ß		𝔟ß
𝔷𝔷	𝔷𝔠		𝔷𝔷𝔷
ß	𝔟ß		𝔠𝔠

38′

Durch die funfften darnach durch die dritten				Durch die sechsten darnach durch die dritten			
𝔠	𝔷𝔠	aequantur	ϑ	ϑ	𝔷𝔠	aequantur	𝔠
𝔷𝔷	𝔟ß		𝔯	𝔯	𝔟ß		𝔷𝔷
ß	𝔷𝔷𝔷		𝔷	𝔷	𝔷𝔷𝔷		ß
𝔷𝔠	𝔠𝔠		𝔠	𝔠	𝔠𝔠		𝔟ß

Durch die siebende alsdann
durch die dritten

ϑ	𝔠	aequantur	𝔷𝔠
𝔯	𝔷𝔷		𝔟ß
𝔷	ß		𝔷𝔷𝔷
𝔠	𝔷𝔠		𝔠𝔠

Durch die funfft alſsdann durch die vierdt.				Durch die sechst alsdann durch die vierdt.			
𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷	aequantur	ϑ	ϑ	𝔷𝔷𝔷	aequantur	𝔷𝔷
ß	𝔠𝔠		𝔯	𝔯	𝔠𝔠		ß

Durch die siebend darnach
durch die vierdt.

ϑ	𝔷𝔷	aequantur	𝔷𝔷𝔷
𝔯	ß		𝔠𝔠

Capitulum decimum octavum de prima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Primam aequationem dinoscimus duorum signorum sibi invicem mutuo sequentium esse aequipolentiam. Minus per maius omnium aequationum esse comittendum, ut multitudo in aequatione subsumpta unitatem signi aequipollentem accipiat, huius tum rei perquirendae primae aequationis solutam radicem expedivimus.

Hie saget Algebras von seiner ersten equation Gebrae et Almuchabole, vnd laut zum teutschen also: | 39

Die ersten Aequation erkennen wir zweier signa ein vorgleichung sein, die do nach einander volgent sein one Intermiss: also solle das minste signum durch das meiste am namen gethailt werden jn allen equationibus, vff das die manigfaltigkeit der zalen jn der Equation vfgenomen die vnitet ergreife des vorgleichendenn zeichens vnd darnach des fragenden dings der ersten equation haben wir aus verricht den vfgelosten radix.

Dise Equation durch einen schrifftlichen Sin den text gleichmessig zu jncorporiren, so laut die erste Equation also: Wann jn einer Coniecturation zwei signa aneinander volgendt werden vorgleicht, so solle allemal das cleinste am namen, das ist, das weniger ductiones hatt, durch das meiste gethailt werden, das ist, das do mehr ductiones hat, vnd was do kompt, beweist die frage. Vnd jn solcher Equation haben wir vorgesaget, das ϑ vd 𝔯 seind die ersten zwei signa, die einander vorgleicht werden, so soll das ϑ, das ist absolutus numerus, durch 𝔯 gethailt werden, das ist durch radicem, wann 𝔯 an des Bedeutung grosser dann Numerus ist, jnmassen wir vorgesatzt haben, das dem 𝔯 ein jtzliche zal moge vfgelegt werden, | 39′ vnd mit den ϑ, welche nicht grosser khonnen werden, dann sie an jn selber gesatzt sind, auch so wol 𝔯 an der ersten duction vnd nicht dragma. Vnd solche equation haben wir bewisen in vnserm andern capittel, sagende von der linien bipartita, daher sie dann vrsprunglich geschopfet wirdt, auch dopei mit einem Exempel eingefurt ist worden. Nun finden wir in gemelter proportionalischer satzunge, das dise gegenwertige Equation neun modos equandj heltt, jn den sie wirdt nach gemeinem Lauf der signa equirt.

Der erst modus equandi ist, wann ϑ wird vergleicht 𝔯. Als wir setzen 12 𝔯 gleich 84 ϑ, wirdt gefragt was 𝔯 werde sein. Saget die Equation, wir wollen thailen 84 ϑ in 12 𝔯, facit 7; also ist das Ding 7, wann 7 mal 12 macht 84, vnd ein 𝔯 ist 7.[1])

Der ander modus, wann do 𝔯 wirdt vorgleicht ʒ. Sam 4 ʒ gleich 20 𝔯. thailen wir 20 jn 4, khomen 5, das ist der 𝔯 werdt, wann 1 ʒ von 5 ist 25, das machen 4 in numeris 100. Nun 20 radices | von gemelten 1 ʒ 40 machen auch 100, wann 5 mal 20 ist auch 100.

Der dritte modus ist, wann ʒ vergleicht wirdt 𝔠. Sam also 40 ʒ gleich 4 𝔠. thailen wir ʒ in cubum, facit 10, vnd das ist ein radix werdt, wann 4 𝔠 ist signum equipolentis, vnd 40 ʒ die equiren jm. So wir nun thailen

1) Die allgemeine Lösung ist hier, wenn $ax^n = bx^{n+1}$, so ist $x = \frac{a}{b}$.



40 mit 4, so nimbt signum equipolentis 4 vnitates in sich, der dann jn Equatione subsumirt ist worden mit 4, vnd khumbt 10, das ist vnitas von 4 𝔠𝔢, vnd ist valor radicis. Wann 1 𝔠𝔢 von 10 ist 1000, vnd der 4 ist 4000. Nun 1 ʒ von 10 ist 100, vnd der 40 macht auch 4000.

Der vierdte modus diser equation ist, wann ʒʒ vergleicht werden 𝔠𝔢. Als 2 ʒʒ gleich 10 𝔠𝔢. Wir thailen 10 in 2, facit 5, das ist ein ℞ werdt von dem gemelten cubo vnd ʒʒ; wann 1 ʒʒ von 5 macht 625, vnd der zwene machen in numeris 1250. Nun 10 𝔠𝔢 von gemelten 5 seind auch 1250, wann 1 𝔠𝔢 ist 125, das 10 mal ist 1250.

Der funffte modus diser Equation ist, wann ʒʒ vergleicht wirdt ß. Sam 6 ʒʒ sind gleich 2 ß, tailen wir 6 jn 2, facit 3; das ist valor radicis. Wann 40′ 2 ß von 3 machen | 486, souil seind auch 6 ʒʒ von 3.

Der sechste modus, wann sursolidum vorgleicht wirdt ʒ𝔠𝔢, als 8 ß werden vorgleicht 2 ʒ𝔠𝔢, thailen wir 8 mit 2, facit 4, das ist ein radix werdt. Wann 8 ß von 4 machen 8192, souil machen auch 2 ʒ𝔠𝔢 von 4.

Der siebendt modus, wann ʒ𝔠𝔢 wirdt vorgleicht bß. Sam also 9 ʒ𝔠𝔢 seind gleich 3 bß, thailen wir 9 in 3, facit 3, das ist der ℞ werdt, dann ein bß von 3 macht 2187, der drei facit 6561, vnd 9 ʒ𝔠𝔢 von dreien machen auch souil, wann ein ʒ𝔠𝔢 von 3 macht 729, vnd der neun machen auch souil 6561.

Der acht modus diser Equation ist, wann ein bß vorgleicht wirdt ʒʒʒ. Sam also wir setzen wollen: 5 ʒʒʒ werden vorgleicht 10 bß, so thailen wir 10 mit 5, facit 2, das varirt valor ℞; wann 5 ʒʒʒ von 2 seind 1280 in numeris, souil machen auch 10 bß, wann ein bß ist 128 vnd das 10 mal macht auch 1280.

Der neundte modus diser ersten Equation ist, wenn c𝔠𝔢 vorgleicht wirdt ʒʒʒ, als 3 c𝔠𝔢 sind gleich 6 ʒʒʒ, thailen wir 6 mit 3, facit 2, das ist der radix werdt.

41 Difs seind erste fundamenten vnd fustapfen der Equation, | dapei man mag die zukunfftigen ercleren, die doch daraus gezogen vnd applicirt werden.

Capitulum decimum nonum Algebrae *de secunda aequatione Gebrae et Almuchabolae.*

Secundam aequationem notavimus duorum signorum interciso medio equipollentiam: minus per maius, ut diximus, esse committendum, huius producti latus tetragonicum valorem et quantitatem numeri radicis ostendit.

Hie cleret Algebras seine andere Equation, so erstlich demonstrirt ist worden jn der proposition Ylis, vnd laut zum teutschen also:

Wir haben die ander Equation vnser Gebra vormerckt ein

vorgliedrung zweier signa gemelter proportionalischer satzung, zwischen welchen ein Mittel vbergangen ist oder abgeschnitten: (als wir gesagt haben) solle das minste seines namens durch das meiste gethailt werden, vnd was aus solchem kumpt oder erwechst, desselbigen tetragonische oder gevierte seiten beweist den werdt des gesatzten 𝔯 oder dings in quantitate der zal, wie gros der sei. | [1]) 41′

Solche Equation zu jncorporiren nach dem text: wann so zwei signa gemelter satzung durch einen vberganghhen mittel vorgleicht werden, solle die minste benennung durch die meiste gethailt werden, vnd radix quadrata derselbigen beweist die 𝔯, jnmassen die figur der signa diser Equation aufsweist, der dann nach gemeinem lauf acht modi gesetzt sein.

Der erst modus diser Equation ist, wann φ vorgleicht wirdt den ʒ, zwischen welchen signis 𝔯 vbergangen wirdt. Sam also 7 ʒ gleich 252 φ. thaile φ in ʒ, facit 36, dauon radix quadrata ist 6, souil ist der 𝔯 werdt. thailen wir 252 φ mit 7 ʒ, das dann signum equipolentis vnd subsumirt ist mit 7 vnitatibus, so khumen 36 φ, das ist 1 ʒ vnd vnitet des zeichen equipolentis, jnmassen die erste Equation cleret, warum man das minste signum durch das maiste thailt. Nun radix quadrata von 36 ist 6, das ist die 𝔯 werdt, wann 1 ʒ macht 36, vnd der thail 7 thun 252, ist gleich 252 φ.

Der ander modus diser andern Equation ist, wann 𝔯 vorgleicht wirdt ce. Sam also wir setzen wollenn 5 ce gleich 45 𝔯. thailen wir 45 𝔯 in 5 ce, facit | 9, vnd radix von 9 ist 3, vnd souil ist werdt der 𝔯; wann 1 ce von 3 ist 27, vnd deren funfe faciunt 135 φ, souil sollen auch machen 45 𝔯. Nun ist 1 𝔯 3 vnd 45 mal 3 macht auch 135 φ: ist recht. 42

Der dritt modus diser Aequation ist, so ʒʒ vergleicht wird ʒ. Sam also wir setzen wollen 36 ʒ seind gleich 16 ʒʒ. thailen wir 36 ʒ mit 16 ʒʒ, facit $2\frac{1}{4}$, vnd radix von $2\frac{1}{4}$ facit $\frac{3}{2}$ oder $1\frac{1}{2}$, vnd das ist werdt der 𝔯. Wann 16 ʒʒ von $\frac{2}{3}$ seind 81, vnd 36 ʒ seind auch souil, wann 1 ʒ ist $2\frac{1}{4}$, vnd der 36 machen 81. vnd ist recht.

Der vierdte modus diser Exquation ist, wann ce vorgleicht wirdt ß. Als wir dann setzen wollen: 108 ce seind gleich 3 ß. Nun sagen wir, was der 𝔯 sei, thailen wir 108 mit 3, khomen 36, vnd radix ist 6, sovil ist werdt der 𝔯, wann 1 ß von 6 macht 7776 in φ. Nun das zu drei malen facit 23328 in Numeris. Nun 1 ce von 6 macht 216, das 108 mal facit auch 23328; ist recht.

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+2}$; $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.



Der funfft modus ist, wann ʒʒ wirdt vorgleicht ʒcℓ, zwischen welchen dann vbergangen wirdt ß. Sam also wir setzen wollen 7 ʒcℓ gleich 28 ʒʒ. Die 42′ frag, | was 1 𝔯 werdt sey. thailen wir 28 mit 7, facit 4, radix ist 2, das der 𝔯 werdt ist. Wann 1 ʒʒ von 2 ist 16, vnd der 28 faciunt 448 𝔑. Nun 1 ʒcℓ ist 64, vnd der 7 machen auch souil, vnnd ist recht.

Der sechste modus von diser Equation ist, wann ß wirdt vorgleicht biß. Sam also, wir setzen wollen; 75 ß seind gleich 3 biß. thailen wir 75 ß in 3 biß, khumen 25, davon ist 𝔯 5, das ist der werdt der radix, wann 3 biß von 5 sind 234375 𝔑, vnd 75 ß seind auch souil, wann 1 ß ist 3125, vnd deren 75 ist auch 234375 in numeris, vnnd ist recht.

Der siebende modus von diser Equation ist, wann ʒcℓ wirdt vorgleicht ʒʒʒ. Sam also, wir setzen 144 ʒcℓ seind gleich 9 ʒʒʒ. was mag werdt sein der 𝔯. thaile 144 mit 9, facit 16, vnd radix, als 4, ist valor. Wann 1 ʒʒʒ von 4 macht 65536 in numeris vnd das zu neun mal facit 589824. Nun 144 ʒcℓ machen auch souil, wann 1 ʒcℓ von 4 macht 4096 vnd das 144 mal macht gemelten Numerum, vnd ist recht.

Der achte modus und letzte diser andern equation ist, wann biß vorgleicht wird ccℓ nach gebrauch gewonlicher signa pey vns. Sam also, wir setzen 98 biß seind gleich 2 ccℓ. Wir thailen wie vor biß in ccℓ, khomen 43 49, dauon ist radix quadrata | 7, das dann valor des radix ist, und souil ist der 𝔯 werdt, wann 1 ccℓ von 7 macht 403933607, und das zweifach macht 807867214, vnd souil machen auch 98 biß von 7. Wann 1 biß macht 8243543, vnd das zu 98 mal macht 807867214, den obgeschrieben numerum zweyer ccℓ, vnd ist recht.

Warumb wir solche modus nach der lenge erzeln, wirdt zu seiner zeitt not sein, das wir die ersten fundamenta gemelter andern equation bedeut haben, vmd hierumb ist mit fleis zu vormerck, die wir erzelt haben.

Capitulum vicesimum Algebrae *de tertia equatione Gebrae et Almuchabolae.*

Tertiam aequationem proposuimus, cum duo signa ordine proportionali descripta transgressis duobus continuis mediis in coniecturis sibi ivicem aequivalent. Minus per maius committeretur, quotientis cubigonicum latus valorem rei numerabit.

Wir haben gesatzt von diser Equation anfengklich jrer signa; hie volget die aufsweisung derselben, vnnd laut zu teutschen also:

43′ Wir haben vorgelegt die dritten Equation, wann do | zwei signa nach der proportionalischen Satzung vnd Ordenung beschrieben zweier mittel vbergangen jn den coniecturen aneinander vorgleicht werden, solle das minst signum durch das meiste

getheilt werden, vnnd desselben quotienten cubische seiten oder radix cubica wirdet zelen den werdt des dings.[1])

Von diser Equation den text zu cleren, so ist der schriftlich sin dauon, so da zwei signa einander werden vorgleicht, welche jn gesatzter proportionalischer satzung oder ordnung volgendt durch zwei vbergangen werden, so solle das cleinste seiner bennenung durch das groste gethailt werden, vnd radix cubica des quotienten beweist die Frage der ꝛ oder das ding, vnnd solche gesatzte equation hat durch gesatzte signa sieben modus equandi pey vns gewonlich.

Der erste, so cꝭ vorgleicht wirdt ϑ. Sam also, wir setzen wollen 189 ϑ gleich 7 cꝭ. tailen wir ϑ in cꝭ, facit 27, vnd radix cubica dauon, als 3, beweist den werdt des ꝛ. Wann ein cꝭ von 3 macht 27, vnd der zu 7 mal facit 189 ϑ vnd ist recht. Die vrsache, das das minste gethailt soll werden, haben wir erstlich in derer ersten Equation thun vermelden, wann multiplicitas ist mit 7 subsumirt des zeichen equipolentis, | so wir dragmas thailen in 7 thail, so khumbt 1 cꝭ. Also hat an sich genomen das signum equipolentis vnitates vnd hierumb, so nun 27 ist 1 cꝭ, so ist auch gebrechent der cꝭ seiner radix cubica, vnd alſs dann derselbig beweist die frage, jnmassen dann die Equation ausweist. 44

Der ander modus diser Equation, wann do ꝛ vergleicht wirdt ʒʒ. Sam also, wir wollen setzen 3 ʒʒ seind gleich 375 ꝛ. thailen wir 375 ꝛ in 3 ʒʒ, khombt 125, vnd radix cubica, als 5, beweist die frag. wann 1 ʒʒ von 5 macht 625, vnd das dreimal macht 1875. Nun 375 ꝛ seind auch souil, vnd ist recht gemacht.

Der dritt modus diser dritten Equation ist, wann sich ʒ vorgleicht ß. sam also, wir setzen wollen 40 ʒ gleich 5 ß, theilen wir 40 in 5, khomen 8, dauon radix cubica ist 2, beweist den werdt des ꝛ. Wann 1 ß von 2 ist 32, so machen 5 sursolida 160, souil machen auch 40 ʒ.

Der vierdt modus diser Equation, wann der cꝭ wird vorgleicht ʒcꝭ. Sam also, wir setzen wollen, 7 ʒcꝭ seind gleich 448 cꝭ, thailen wir 448 cꝭ mit 7 ʒcꝭ, facit 64, dauon beweist radix cubica, als 4, den werdt des ꝛ, vnd deſsgleichen also mugen wir in andern signa thun. | 44′

Der funffte modus aequandi diser Equation, wann ʒʒ vnd biß einander werden vorgleicht. Sam also, wir setzen 243 ʒʒ vergleicht 9 biß, thailen wir eine in das ander, khomen 27, dauon radix cubica 3 vnd valor des ꝛ.

Der sechste modus equandi diser Equation, wann do ß wirdt vorgleicht

---

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+3}$; $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.



ʒʒʒ. Sam also, wir setzen wollen im forigen fall 9 ʒʒʒ vorgleicht 243 ß, gleichkombt aber in vorberurter, was 3 der ꝛc.

Der siebende modus. Wann do ʒc℮ vergleicht wird cc℮, mogen wir aber setzen in obgemelten fall.

Dapey zu erkhundigen ist, das alle modi equandi eines falls sind, dann es alle equa multiplicia sein ℨ℮ vnd c℮ der zweien signa, vnd werden dise modi allein declarirt, darumb das die ductiones so weit fallen, jnmassen man die jn den questionibus eigentlich vornemen wirdt; vnd die equation ist erstlich von ALGEBRAS nicht demonstrirt jn den proportionibus YLIS, dann sie alleine durch die plan Superficien gesatzt sein. Aber solche Equation 45 ist von ALIABRA, dem grossen Indischen | Maister demonstrirt aus der Linien solida, jnmassen wir jn den corporen zu seiner Zeit setzen werden, was vor Equationes ALIABRAS aus den Corporischen zalen gezogen hatt, die do jn die sechse jn kheiner Form noch modum equandi hat, noch gebracht khonnen werdenn; vnd wieuol sie von ALGEBRA gesagt ist vnd nach Ordnung der signa aus der proportionalischen satzung gezogen, vnd doch hat ALIABRAS jn den corporibus noch ettlich treffenliche Equationes addirt. Und die weil die vorgesatzten vnnd alle nachgesatzten, ansgenomen dise gegenwertige, durch die plana volfurdt, hat ALGEBRAS auch diese in ordnung der signa erzelt, die dann zu seiner zeit wider von ALGEBEA jn den corporibus repetirt wirdt mit andern Equationibus der soliden, die wir hieher nicht haben wollen vnter die plana einziehen, dann khein gemes mit dem nicht haben ist.[1]) Nun volget vnser vierdte Equation.

Capitulum vicesimum primum ALGEBRAE de quarta Equatione Gebrae et Almuchabolae.

Quartam aequationem assignamus demonstratione digesta eam esse duorum 45′ *signorum tribus ablatis mediis extremorum aequiparantiam. Minus per | maius pertinuit, huius quotientis radix radicis tetragonica valorem rei quaesitae explanat.*

Hie zeiget ALGEBRAS seine vierdte Equation sagende, vnd laut zum teutschen also:

Die vierdt Equation vornemen wir, sein vorhin angezaigt mit jrer demonstration jn den propositionen YLIS zweier signa durch drei vnterlassene mittel der letzten zweien eine vor-

1) Hieraus ist klar, dass der Bearbeiter, ob auch der lateinische Text ist fraglich, die Lösung der Gleichungen dritten Grades gekannt hat oder zu kennen glaubte. Er kommt an späterer Stelle nochmals darauf zurück. Sollte er CARDANO gekannt haben?

gleichung seïn. Das minste seiner Benennung thailen wir durch das groste, vnd desselbigen quotient radix des radicis quadratae ereuget den werdt des gesuchten dings.[1])

Also kurtzlich den vorstandt dieser Equation einzufuren, so ist der sin dauon, so zwei signa in vorgesatzter proportionalischer Satzung oder ordnung werden einander vorgleicht, zwischen welchen zwei signa nach proportionalischer satzung oder ordnung drei vbergangen werden, so solle das minste durch das meiste gethailt werden, vnd radix quadrata von den radix quadrate bericht die frage. Vnd dieser Equation seind gewonlich bey vns sechs modi Equandi wie volget.

Der erst modus. So dragma vorgleicht wirdt ʒʒ. Sam also, | wir 46 setzen wollen, 5 ʒʒ seind gleich 405 𝔑, thailen wir 𝔑 in ʒʒ, facit 81, dauon radix radicis, als 3, bericht die frage, vnd desgleichen magstu einfuren die andern vorangezaigte signa dieser Equation: sam 5 ß werden vorgleicht 405 ꝣ. Welche modi equandi zugleich wie oben 3 die ꝣ ist, vnnd also furter, dann es seind aequa multiplicia der ersten signa 𝔑 vnd ʒʒ diser Equation, als wir dann im 17. capitel angezaigt haben, was oder wieuil modus equandi ein jtzliche equation hat nach gemeinem lauf vnnd gebrauch jrer signa; vnnd vber diese Equation, das ist vber ʒʒ, seindt vnsere maiores nicht khomen. Wann, so wir 4 signa vberschreiten, khomet es auf 𝔑 vnd ß, jnmassen das 15. Capitel ausweist der dann weder radix quadrata noch cubica noch quadrati de quadrato ist, sondern ein sursolida radix, der mit seiner funften multiplication vorendert ist von dem ꝣ, wann jtzlicher weise ʒʒ durch 𝔑 vierdte multiplication verendert ist, welche multiplication ist zu quadriren, darumb sie an der vierdten stat dem quadrat gemes gesatzt ist. Aber ß stedt an der funfften stadt der multiplication, | 46′ welche funffte stadt khein gemes hat, weder mit den corporibus noch superficien, vnd hierumb haben vnsere maiores nicht wollen daruber procidiren, vnnd wie wol wir zu seiner zeit von dem ꝣ, ß vnd weiter biſs auf ccℓ sagen werden, wolten wir solches hie vormissen vnd zu seiner zeit durch Algebram einfuren, der dann dise gegenwertige Equation pis auf ccℓ ostendirt hat. Vnnd als wir angezaigt haben, so vier signa vbergangen werden, so khumbt es auf radix ß^{a}; so 5 vberschritten werden, vf ʒcℓ, das dann abermals radicabilis ist; so 6 vbergangen werden, so khumbt es auf radix biß^{a}, die stadt dann aber irradicabilis ist, vnd desgleichen fortbas. Der grosse Arismetrist Algebras cleret, als nachuolgent ereugen wirdt jn vnserm andern Buch, treffenlich dauon setzt vnd gebraucht in den demon-

---

1) Allgemeine Lösung: $ax^n = bx^{n+4}$; $x = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

strationibus der soliden. Vnnd solche viere jtzundt gesatzte Equationes seind genanndt simplices modos, wann allewegen zwei signa aneinander vorgleicht werden, vnnd nach disen vier Equationes wirdt dj coss ge-
47 funden | der achten Equation, wann sie werden soluirt durch die 3 negst volgenden modos compositos biſs auf dj vier equationes, die alſsdann ausdrucken den valorem des 𝔷. Wann sie also die acht Equation durchwandert alle equationes, darumb sie weit in die multiplication von dem 𝔷 auſsgewandert ist worden. Aber diese nachuolgenden modos werden genant compositi, darumb das do allewegen zwei signa werden einem vorgleicht, jnmassen dann nachuolgende begriffen ist. Aber unsers Algebrae seind allein die gegenwertige Equation vnd die acht radicabiles, wann diſs wirdt soluirt durch die andere gesatzte equation der ordnung, vnnd hierumb wirdt sie genandt 𝔷𝔷, das ist quadratum quadrati, wann radix radicis erweist dj 𝔷, das dann die ander der ordnung allein durch den quadratischen radicem hat soluirt, welche radix abermals quadrata ist, die 𝔷 gegenwertiger equation. Wie vnnd aber die achte sol reducirt werden, bezaiget sie genugsam mit jrem Capitel. Nun volgt von der funften Equation Algebrae.

47′ *Capitulum vicesimum secundum de quinta equatione Gebrae et Almuchabolae.* |

Quintae aequationis essentiam experire promisimus. Ipsa est enim, cum sibi invicem tria signa successiva, duoque postrema primo aequationi parantur: Primum quidem et medium per postremum maius comitantur, medietas medii tetragonisetur, et huius productum cum primo in unam congeriem coacerveturi latus inde tetragonicum minus medietate medii valorem radicis obtinebit.[1])

Hie ereugnet Algebras sein funffte Equation Gebre vnd Almuchabole, den ersten modum compositum, vnd laut zum deutschen also.

Wir haben verheisen die aigenschafft der funfften Equation zuergrunden vnd aufszulegen, die dann ist, so drei signa one mittel nach einander volgendt nach ordnung proportionalischer Satzung vnter einander werden vorgleicht, also die letzten zwej dem ersten: so soll alſsdann das erst vnd mittel durch das letzte gethailt werden, das ist durch das meiste am namen, vnnd das halbthail deſs mitteln, so das tetragonisirt, das ist quadrirt wirdt, vnd das selbig erwachsende mit dem ersten in ein samlung zusamengethun wirdt, alſsdann die quadratische seithen

1) Allgemeine Lösung:

$$ax^n = bx^{n+1} + cx^{n+2};\quad \frac{a}{c}x^n = \frac{b}{c}x^{n+1} + x^{n+2};\quad x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}} - \frac{b}{2c}.$$

solchs quadrirten minus | das halbthail des mitteln zeichens 48
wirdt halten den werdt des ꝶ.

Also zu einfuerung der begreifung diser equation sprechen wir, so 3 signa one mittel nacheinander der gesatzten proportionalischen satzung oder ordnung vorgleicht, also die letzten zwei signa dem ersten, sollen wir das erst vnd mittel signum durch das letzte vnd meist thailen, vnd sollen das mittel mediren, vnd dasselbig in sich multipliciren, was khumbt, zum ersten zaichen thun, vnd radix quadrata desselbigen minus der halbe thaile des mitteln zeichen, vnd ist, das wir quadrirt haben, bewist die coſs. Vnd die Equation hat nach gemeinem lauf acht modos equandi, vnter welchen dann der erst ist, so ꝶ vnd ʒ werden vorgleicht ϑ. Sam also, wir setzen wollen 1 ʒ vnd 8 ꝶ seind gleich 65 ϑ. theile ꝶ vnd ϑ mit ʒ: ist gethailt, mediren wir 8 ꝶ, facit 4, die multipliciren wir in sich, facit 16; die addiren wir zu 65 ϑ, facit 81, vnd radix dauon ist 9; dauon zichen wir den halben thail des ꝶ, als 4, pleiben 5, facit ist die ꝶ werdt. Das probir wir also. 1 ʒ macht 25, vnd 8 ꝶ machen 40, die zusamen, khomen 65 vnd ist recht. Deſsgleichen | helt sich solchs mit allen equa multi- 48′
plicia, wann alle andere modi equandi diser equation seind equa multiplicia diser signa ʒ ꝶ vnd ϑ. Das wollen wir beweisen in vorangezaigter coſs.

Wir setzen den andern modum equandi vnd sprechen: 6 ʒ vnd 2 cꝭ seind gleich 80 ꝶ. Solchs machen wir nach satzung der Equation: wir thailen ʒ vnd ꝶ mit cꝭ, facit 40 ꝶ 3 ʒ, mediren 3 ʒ, facit $\frac{3}{2}$; für solchs in sich, facit $\frac{9}{4}$; das addirn wir zu 40 ꝶ, facit $\frac{169}{4}$; dauon ist radix $\frac{13}{2}$; dauon der halben thail des zens, pleibt 5, souil ist die ꝶ werdt. Nun machen 80 ꝶ 400 in numeris, souil machen auch 6 ʒ vnnd 2 cꝭ, dann 1 cꝭ von 5 macht 125, der zwene sind 250; so machen 6 ʒ 150 ϑ; solchs zusamen macht auch 400, vnnd ist recht.

Wie wir aber sollen erkhennen, das alle andern modi seind equa multiplicia, so merck wir die vorigen ersten angezaigten ꝶ vnd jre signa, das ist den ersten modum equandi, der do waz 1 ʒ vnd 8 ꝶ gleich 65 ϑ, vnd der ander modus waz 6 ʒ 2 cꝭ gleich 80 ꝶ. Setzen wir den ersten deme andern gleich, also 80 ϑ gleich 2 ʒ vnd 6 ꝶ, also sprechen wir, das der ander gegen den ersten ist equa subsumirt mit 5, wann 2 ʒ seind 50 in ϑ und 6 ꝶ 30, machen zusamen 80, gleichett 80 ϑ. | Also ist es furt in 49
andern modis equandis diser vnd nachuolgenden equationen, das alle modi werden reducirt diser aequation in dise signa ꝶ ʒ vnd ϑ, die dann das erst fundament seind diser equation in dise signa vnd aller jrer modos equandi. Nun volget von der sechsten Equation.

Capitulum vicesimum tertium de sexta aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Sextam aequationem annectere. Eam esse trium signorum continuorum altrinsecorum duorum assimiliationem medio. Sed, ut diximus, per maius comitentur, medietas medii si creverit tetragonaliter et a producto primi sustulerimus, radix residui si colligetur medietate medii vel minuetur, querendam radicem rei propositae enucleabit.

Hie erzelt Algebras seine sechste Equation seiner Gebre vnnd Almuchabole, die dann jmassen die andern erstlich in den propositionen Ylis demonstrirt ist worden, vnnd laut zum teutschen also.

Die sechste Equation den andern anzuhangen, die dann ist dreyer zeichen aneinander volgendt eine vorgleichung dem mitteln gemelter proportionalischer satzung der eufsersten. Aber 49' als wir gesagt haben, durch das | gröste sollen die andern zwej gethailt werden, vnd das halbe thail des mitteln, so das erwechst tetragonisch, vnd von solchem erwachsen das erste abgetragen oder hinweg genomen wirdt, radix des bleibenden residui, so das zusamen geclaubt wirdt oder gelossen den halben thail des mitteln zeichens oder dauon gemindert, so wirdt solchs ereugenen den fragenden ℞ des furgelegten dings.[1])

Solche sechste Regel in bessern vorstandt zu geben vnnd zu scherpfen, sprechen wir, das die sechste Equation ist eine vorgleichung dreyer signa one mittel nacheinander volgendt, vnter welchen das erst vnd letzte werden vorgleicht dem mitteln. Saget der text, wir sollen die wenigsten zwei durch das letzte, das ist das grose, thailen, das mittel mediren; was khombt in sich fueren, vom product das erste zihen, vnd radix des vbrigen soll zu dem vorigen halben thail oder quadrirten gethan oder abgezogen werden, vnd alfsdann solchs wirdt beweisen die ℞.

Solcher equation finden wir gewenlich acht modos equandi, als dann das 17. capitel cleret. Vnnd solcher erster modus equandi ist, so ℞ vorgleicht wirdt ϑ vnd ʒ. ϑ vnd ʒ seind das erste vnd letzte, welch dann vorgleicht werden dem mitteln, als ℞, nach der vorgemelten proportionalischen satzung. Sam also, wir setzen wollen, | 18 ℞ seind gleich 28 ϑ vnd 2 ʒ. thailen wir ϑ vnd ℞ durch ʒ, facit 9 ℞ vnd 14 ϑ. Nun saget die Equation, das mittel sollen wir mediren; wir mediren ℞, facit $\frac{9}{2}$, füren solchs in sich, facit $\frac{81}{4}$; dauon zihen wir das erste, als 14, pleiben $\frac{25}{4}$; dauon nemen wir radicem, khomen $\frac{5}{2}$. Nun sollen wir den halbthail der ℞

[Randzahl: 50]

1) Allgemeine Lösung:

$$bx^{n+1} = ax^n + cx^{n+2};\quad \frac{b}{c}x^{n+1} = \frac{a}{c}x^n + x^{n+2};\quad x = \frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}}.$$

subtrahirn[1]), mugen nicht, deshalb addirn wir $\frac{9}{2}$, facit zusamen $\frac{14}{2}$, macht 7: souil ist 𝔯 werdt. Das wollen wir probirn: Wir haben gesatzt, 18 𝔯 seind gleich 28 ϑ vnd 2 ʒ. So nun valor der 𝔯 ist 7, so machen 2 ʒ 98 in numeris, dazu 23 ϑ, facit zusamen 126; souil machen auch 𝔯, als 18, dann 18 mal 7 ist auch 126, vnnd also finden wir ex numeris absolutis, das 18 𝔯 gleich souil machen, sam 28 ϑ vnd 2 ʒ, vnnd ist recht.

Desgleichen mugen wir fueren die andern modos equandi diser Equation, das wir dann nemen equa multiplicia, jnmassen wir in vorgesetzter Equation exemplificirt haben. Wir setzen 18 ʒ seind gleich 28 𝔯 vnd 2 cℓ. thailen wir solchs obgemelter massen, khumbt auch valor obgemelter form 7. Wann 18 ʒ von 7 seind 882 in numeris, souil sollen auch machen 28 𝔯 vnd 2 cℓ. Wann 2 cℓ von 7 seind 686, vnnd 28 𝔯 von 7 machen 196 in numeris. Nun solchs zusam facit auch 882, vnd ist recht. Also | sprechen 50′ wir, das 28 𝔯 vnd 2 cℓ vf einen thail, 18 ʒ vfm andern thail mit 7 subsumirt gleich seind gegen dem ersten modo equandi, vnnd desgleichen ist es auch in den andern modis equandis diser equation, die dann alle reducibiles seind in die ersten fundamenta ϑ vnd ʒ und 𝔯 diser equation pis ß in ccℓ, vnd so ferner man sie dann fueren will, vnnd von disem modo equandi wirdt verificirt in dem letzten Buch der demonstrationum. Nun volget von der sibenden Equation ALGEBRAE das 24 Capitel.

Capitulum vicesimum quartum de septima aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Septimam aequationem inserere precatum est. Cum enim tria signa sibi ordine continuo mutantia, primum et medium postremo in coniecturis coaequae comparationis fuerint, per postremum maius comitantur. Quod si medium medietate decreuerit, quantitasque huius tetragonizata in unum acervum quantitati cum primo recollecta fuerit, radice huius tetragonica adiuncta sibi quantitate medietatis medii valorem rei enucleabit.

Hie cleret ALGEBRAS die siebendt Equation seiner Gebra vnd Almuchabola. sagendt, textlich lautendt zum teutschen also. | 51

Dise siebende Equation zu inseriren ist vorberurt worden, so do drey signa nach anhengender ordnung one mittel der proportionalischen satzung nacheinander volgendt, das erst vnd das mittel dem letzten in den coniecturen oder schatzung der quaestionen einer gleichen proportionirung oder vorgleichung finden werden; durch das letzte, das ist durch das grose seiner

---

1) Hier hat der Bearbeiter seine eigenen Worte falsch verstanden. Er thut so, als ob die Lösung hiesse $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{a}{c}} \pm \frac{b}{2c}$.



benennung, sollen die andern gethailt werden. Sodann das mittel seines halben thails erwechst oder verkleinert wirdt, vnd solche quantitet tetragonirt oder quadrirt, so die wirdt in einen haufen einer quantitet mit dem ersten zeichen zusamen gelesenn, radix derselben mit hinzugethaner quantitet des halben vorigen thails des mitteln zeichens wirdet entplosen den werdt des dings.[1])

Solchen textlichen sin clerlichen in gebrauch der vernunfft einzufuren, sprechen wir: die siebende Equation ist, so drey signa einander werden vorgleicht, nemlich das erst vnd mittel dem letzten jn gemelter ordnung der proportionalischen satzung, so sollen wir das erste vnd mittel durch dj grose benenung thailen, das ist durch das letzte, das mitle zeichen sollen wir darnach mediren, den halben thail in sich multipliciren, was khumbt zu dem ersten zeichen addirn. Alſsdann radix desselbigen erwachsen soll 51′ gethan werden zu dem vorgemedirten | des mitteln zeichens, vnd was do khumbt, beweist den ꝛc. Solcher equation finden wir auch 8 modos equandi, als wir dann angezaigt haben vorhin jn vnserm 17. capitel, vnd solcher erster modus equandi ist, so φ vnd ꝛc werden vorgleicht ʒ. Sam also, wir setzen wollen, 32 φ vnd 20 ꝛc seind gleich 3 ʒ. Wir thailen φ vnd ꝛc in ʒ, facit $\frac{32}{3}$ φ vnd $\frac{20}{3}$ ꝛc. Wir mediren ꝛc, facit $\frac{20}{6}$, das multiplicirn wir in sich, facit $\frac{400}{36}$; das thun wir zu dem ersten zeichen, das ist zu $\frac{32}{3}$, khomen $\frac{484}{36}$; von dem ist radix $\frac{28}{6}$; zu dem thun wir das halbe thail des mitteln zeichens, das was $\frac{20}{6}$, facit $\frac{48}{6}$ zusamen, macht 8, souil ist die ꝛc werdt. Das wollen wir probirn. Also wir haben gesatzt, das 3 ʒ seind gleich 32 φ vnd 20 ꝛc. So nun 8 ein ꝛc ist, so weren 20 ꝛc 160 in numeris; dazu thun wir 32 φ, wirdt 192: souil sollen auch 3 ʒ machen von 8. Nun ist 1 ʒ 64, das dreimal macht auch souil, vnd ist probirt, das die ꝛc 8 in numeris ist. Desgleichen mogen wir solchs beweisen, wie in vorgethaner Equation ist bewisen, durch die andern modos equandi, das wir nemen equa multiplica subsumpta; als wir setzen wollen, vff das wir anfengklich den grundt der ꝛc lernen vnnd scherffen mogen, wir setzen das 52 vnd sprechen: 32 ꝛc vnd 20 ʒ | seind gleich 3 cꝭ. Wir thailen abermals wie oben durch cꝭ, die grost benennung, nach dem text, vnd khombt nach der equation 8 der valor der ꝛc, wie vormals. Wann 3 cꝭ vnd 8 ꝛc seind 1536 in numeris, das sollen auch sein 32 ꝛc vnnd 20 ʒ. Nun 32 ꝛc von 8 seind 256 in numeris, vnd 20 ʒ von 8 seind 1280 in numeris; das thun wir zusamen, macht auch souil, vnnd ist recht. Also sprechen wir, das

1) Allgemeine Lösung:

$$cx^{n+2} = ax^n + bx^{n+1}; \quad x^{n+2} = \frac{a}{c}x^n + \frac{b}{c}x^{n+1}; \quad x = \frac{b}{2c} + \sqrt{\left(\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{a}{c}}.$$

20 ʒ vnd 32 ꝛ gleich seind 3 cℓ mit 8 subsumirt gegen den ersten modo equandi, der do was 32 ϑℓ vnd 20 ꝛ gleich 3 ʒ, vnd also seind fort oder dritt gegen den andern auch mit 8 subsumirt pifs auf ccℓ, vnnd weither findestu equa multiplicia des ersten modi equandi, der do was ꝛ vnd ϑℓ zu vorgleichen ʒ, welche signa gedachts modi seind fundamenta diser equation, darin alle andern reducirt werden.

Mun volget von der achten vnd letzten Equation ALGEBRAE, welche dann durch die drei modos compositos soluirt wirdt erstlich, vnd alfsdann entlich durch erstliche drei modos simplices.

Capitulum vicesimum quintum de octaua aequatione Gebrae et Almuchabolae.

Octavam aequationem perscribendam illis digestis expedimus. Est namque trium signorum, quemadmodum priorum, non tamen successivorum aequipollentia, secundum | quod prius aut posterius alterum altero sit salto ordine 52′ *signorum, eoque trium fit his proximis, quod vero saltivorum primis simplicis aequationibus pollicemur exordia.*[1])

Hie vervolget ALGEBRAS die achte duction, das ist die achte Equation, vnnd laut nach jrem deutschen also:

Die achten Equation zu beschreiben, die rechnen vnd verordenen wir durch die vorgesetzte Equation, welche dann ist eine vorgleichung dreyer signa gleichmesig den nechsten dreyen gesatzten modis compositis, aber nicht angehender zeichen vnd one mittel nacheinander volgender signa der proportionalischen satzung, sonder nach dem als eins ehe dann das ander durch vberhupfung in ordnung ist gesatzt, in dem das die vergleichung ist dreyer signa, so gebrauchen wir diser nechst satzung dreyer modorum compositorum, aber in dem, das jntermiss vnd vberhupfung geschieht, so gebrauchen wir den Eingang der ersten dreyer modorum simplicium, welche dann beweisen den werdt der ꝛ.

Den vorstandt diser Equation einzufueren sagen wir kurtzlich, das die achte Equation ist eine vorgleichung dreyer signa, jnmassen die modi compositi seind, aber nicht on vnterlass nacheinander volgendt, sonder vberhupfung nacheinander vorgleicht werden nach form vnd weise der modorum compositorum, so drey signa werden vorgleicht | allwegen zwei dem dritten 53

1) Die Lösung besteht dem Wesen nach darin, dass man die Grössen x^2, x^3, x^4 als die zunächst zu suchenden Unbekannten betrachtet und darauf die resultierenden Gleichungen $\left.\begin{matrix} x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{matrix}\right\} = p$ nach früheren Regeln auflöst.

nach der modorum compositorum einem, so solle dann solche Equation nach form der modorum compositorum einer gemacht werden, nach dem das erst dem andern zweien, aber das erst vnd letzt dem mitteln, aber die ersten zweien dem letzten vorgleicht werden. Nachdem sie dann durch vberhupfung gesatzt seindt: wirdt die vbergehung oder vberhupfung dann zwischen den signis eines zeichens, soll das durch den andern modum simplicem volfurt werden. So sie dann geschicht zweier signa, durch den dritten simplicem. Geschicht dann vberhupfung dreyer signorum, solle das durch den vierten simplicem modum volfurt werden. Und also furter, welche dann den werdt der ꝛ beweisen.

Sam wir also wollen setzen exemplariter. wir finden auch, das dise Equation 36 modi equandi hellt, wie im 17 Capitel vormeldet. nach form der dreyer modorum compositorum, welche den valorem der equation nicht weiter strecken, dann in die proportion, das ist auf den valoren ꝛ, aber den quadrat, so ein signum vbergangen wirdt, aber des cℓ, so zwei vbergangen werden, aber des ʒʒ, so drey vbergangen werden etc, welchen valorem
53′ radicum dj ersten drei modi simplici soluiren in den | werdt der ꝛ. Sam also wir setzen wollen: 45 ϑ vnd 4 ʒ seind gleich 1 ʒʒ, sollen wir aigentlich mercken, das diser modus equandi diser equation geschicht durch form des dritten modus compositi, jndem das dj ersten zwei vorgleicht werden dem letzten, wann ϑ vnd ʒ nach ordnung proportionalischer Satzung vorgehen dem ʒʒ, vnnd ein ordentliche progression geschicht eines signi zwischen zweien. Sagt vns gemelter modus, das wir durch den ʒʒ sollen thailen. Nun thailen wir numerum vnd ziens, das ist 45 ϑ vnd 4 ʒ, mit 1 ʒʒ, ist gethailt; wir medirn ʒ, wirdt 2, furen das in sich, facit 4, das addirn wir zu ϑ, als 45, wirdt 49; dauon radix, als 7, sam der halbe thail des mitteln wirdt 9, die progression des andern modi simplici, wann radix von 49 ist 7, vnd das halbe thail was 2, vnd 7 zusamen machen 9; die relinquiren wir zum andern modo simplici. Darumb das hie durch angezaigten modum equandi allein ein signum vbergangen wirdt, sprechen wir nach dem andern modi simplici, das radix tetragonica von 9 beweist die ꝛ, das ist 3, der valor gemelts modi equandi diser equation. Das mugen wir probirn. Dann ein ʒʒ von 3 ist 81. Nun seindt 4 ʒ von 3 in numeris 36,
54 vnd 45 ϑ dazu seind auch 81: ist | recht. vnd desgleichen magstu die andern modos equandi diser Equation genuglich figurirt jm 17 Capitel nach form der ander modorum compositorum, vnd alſsdann valorem reliquiren zu den simplicibus modis, nachdem die progression geschicht, vnd solchen valorem dann den coſs entlich volfuren durch dieselben. Vnd also hastu grundtlich vnterrichtung der achten Equation vnd jrer modorum equandi, die wir dann jm 17 capittel nach ordnung erzelt haben.

Nun volget das ander Buch von dem Algorithmo, gehorig zu der Gebra vnd Almuchabola, vnd wie man den zu der Gebra gebrauchen soll, vnnd zum ersten de additis et diminutis signorum.

Explicit liber primus ALGEBRAE.

| *Secundus liber* INITII ALGEBRAE *Arabis, viri clarissimi, ad summum mathematicum eo tempore* YLEM *geometren foeliciter incipit.*[1]) 54′

Ad ea quae in Gebra et Almuchabola disseruimus de signis utilitatis atque commodi erunt quantitates additae ac diminutae et ea, quae circa easdem versari habent, quae quidem penes affirmationem et priuationem constituuntur.

Hie hebet ALGEBRAS an sein ander Buch der Gebra vnnd Almuchabola, vnnd ist, do er saget von den gebrauch der Algorithmorum gehorig zu gemelter Gebra, vnnd laut zum teutschen also:

Zu dem wir vorgemeldet haben jn Gebra vnd Almuchabola von den signis, werden nutz vnnd figurlich werden die quantitet genandt additae vnd diminutae vnd die dobej jnen verhandelt werden, welche quantitet addite vnd diminute werden mit der affirmirung vnd negirung bezeichent und beschrieben.

Von disen quantiteten vnd gemelten capiteln den schriftlichen sin vnd vorstandt des texts zu lautern, saget der text aigentlich: zu dem wir vorgesatzt haben in der Gebra von den signis, sollen wir mercken, das wir nemen solchen gebrauch der signorum | in Gebra Algorismum de additis et 55 diminutis signorum, der dann nicht allein in gebrauch der signa gehelt vnd gebraucht wirdt, sonder furter auch die binomia betreffent, wann solche signa noch anhangen der matri pregnanti, das ist, das sie noch nicht absolute in numeris seind. Wiewol das sie gleichmessig mit der affirmirung vnd negirung alſs die binomia vnd residua beschrieben werden, so seind sie doch vnterschiedlich, jndem, das die binomia absoluti numeri surdi sein, deſsgleichen jre residua, aber dise quantitet seind noch nicht so weit bracht, sonder in schwengernder mutter, wann sie noch kheiner Equation bracht seindt, vnd hierumb sagt der text, das sie nutze werden solche quantitet addite vnd diminute, das ist, zu dem wir gesatzt haben, das seind zu den

1) Hier haben die Handschriften C. 405 und C. 349 als Überschrift: *Initium secundi libri* ALGEBRAE . . . *incipit,* was nur aus Missverständnis enstanden sein kann. Dieses zweite Buch behandelt die Rechnung mit positiven und negativen Zahlen für ganze und gebrochene Ausdrücke. Der Bearbeiter spricht bald von affirmirten und negativen Zahlen, bald von numeris additis et diminutis. Er bedient sich der Zeichen + und —, die Dresdner Handschriften haben letzteres in der Form ÷

equationibus signorum, mit denen, die do pej jnen gehandelt werden. Das seind dann bedeutliche speties, wie man die jn addirung, subtrahirung, multiplicirung etc. gebrauchen soll, vnd werden solche quantitet eigentlich verzeichent mit der affirmirung vnd negirung, das ist mit dem signo minus vnd plus. Dann so einem zeichen wird zugesatzt das zeichen +, bedeut, das sie ist quantitas addita; wird aber dem signo zugeschrieben das zeichen 55′ —, bedeut, | das es ist quantitas diminuta, jnmassen das eigentlich jn den Tabeln ALGEBRAE gesatzt vnd angezeigt ist, vnd solcher Algorismus gehet aus vniuersaliter durch alle signa, das ist, das man einen proceſs hellt in additis vnd diminutis, es sein ꝯ, ʒ oder ʒʒ, das ist auch in den binomiis vnd residuis, wann radix quadrata nicht anders addirt wirdt den ꝯ der affirmirung oder negirung, vnd hierumb so ist diser algorismus nicht allein gegrundet auf die affirmirung vnd negirung, das ist auf die quantitet addita vnd diminuta signorum jn vniuersali der signorum in numeris respectiuis oder pregnantibus, sonder auch absolutis surdis. Darumb saget vnd setzet ALGEBRAS zwen Algorismi jn gebrauch seiner Gebra vnd Almuchabola, das ist Algorismum de additis et diminutis, der dann genandt numerorum respectiuorum oder pregnantium, den andern de binomiis et recisis genandt surdorum absolutorum.

Zum ersten volgt hernach das ander Capitel der ersten speties des algorismi de additis et diminutis, das ist Additio.

56 *Capitulum secundum de prima spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae acceruatio appellatur, eiusque expositio.* |

Signorum accervationem proponimus. Quae eiusdem nominis sunt, eandem invariabilem in aggregatione retinere quantitatis habitudinem; quod si alterum altera quantitate disparatum sit, colligendum potentior excessus, refecti positivus vel privativus unius ab alio inscribatur hoc, quod in denominatis respectivis et absolutis binomicis numerorum esse convenit proprium.

Hie cleret vns ALGEBRAS das ander capitel seines andern Buchs, vnnd drucket aus die erste spetiem, so bei den quantiteten addite vnd diminute wirdet gefunden, mit namen die zusammenfugung der signa mit obscribirten quantiteten der negation vnd affirmation, welche erste speties Additio genanndt, auch nachuolgendt die andern berurt hat kurzlich im ersten Capitel, da er spricht: *Et ea, quae circa easdem versari habent* etc., also finden wir, das erstlich bei den quantiteten addite vnd diminute vorhandelt wirdt vorneint vnd nachuolgendt, welchs dann zum teutschen lautet also:

Wir legen vor die Zusammenfugung der signorum. Die do seind eines namens von den zeichen zusammenhaltung jn der

addirung oder zusamengehauflichung eine vormerckhung nemen des signi mit der quantitet der affirmirung oder negirung; so aber vorruckte signa mit den quantitatibus denominatis eines namens werden zusamen wurden gegeben, so soll die angeschnitten | zal eine von der andern des zeichens der grossen vbertreffung der affirmirung vnd negirung beschrieben werden, vnnd solchs ist die aigenschafft mit den benenten zalen von den signis additis oder diminutis + vnd — auch in disen plossen vnnd absolutis surdis numeris a radice benent. 56

Solchen Text vorstentlich zu declariren, sprechen wir, so wir wollen addirn Signa, die eines namens seindt mit beigeschriebenen quantiteten denominirt der negation oder affirmation, so sollen wir mercken eben, ob die denominirt quantiteten beyde seind univoca oder disparata. Seind die quantitet denominate univoce, so bleiben sie vnvorruckt der affirmation affirmativa, vnd negation negativa. Seind sie aber disparata, so soll ein zal von der andern gezogen werden, vnnd was pleibt, soll mit der grosten vbertretung seiner quantitet der addita vnnd diminuta geschrieben werden. Sam also, wir exemplariter setzen wollen: Wir wollen addirn 6 𝔑 + 9 𝔵 zu 5 𝔑 + 12 𝔵. Sprechen wir erstlich, das beiderseit univoca seind, nemblich addita, vnnd hierumb addirn wir ytzliche signa eines namens mit vnverruckter quantitet addita. Wir addirn 5 vnd 6, werden 11 𝔑, vnd 9 + 12, werden 21 𝔵. Also sprechen wir, das tota addita seind 11 𝔑 vnd 21 𝔵. Stet also: | [1]) 57

6 𝔑 + 9 𝔵
5 𝔑 + 12 𝔵
11 𝔑 + 21 𝔵.

So wir aber negativa exemplificirn, sam also: 5 ʒ — 6 c𝔢 wollen wir addirn zu 9 ʒ — 4 c𝔢, sprechen wir, das die denominata aber vnivoca seind a negatione. Sprich 5 zu 9 werden 14 ʒ vnd 4 zu 6 werden 10 c𝔢. Also ist die gantze additio 14 ʒ — 10 c𝔢. Steet also: [2])

5 ʒ — 6 c𝔢
9 ʒ — 4 c𝔢
14 ʒ — 10 c𝔢.

So wir aber disparata setzen, also das excessus negativus ist potentior. sam also 7 𝔑 + 3 𝔵 wollen wir addirn zu 5 𝔑 — 12 𝔵, addirn wir 5 vnd 7, werden 12 𝔑. Nun sollen wir die disparata auch addirn, so ist

---

1) Das ist in moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 6 + 9x \\ 5 + 12x \\ \hline 11 + 21x. \end{array}$ 2) Ebenso: $\begin{array}{r} 5x^2 - 6x^3 \\ 9x^2 - 4x^3 \\ \hline 14x^2 - 10x^3. \end{array}$

negatiuum potentius, so ziehen wir ab nach laut des texts 3 von 12, restant 9 ꝛ𝔢, der mussen wir irer Beneuung der negation schreiben, also were die gantze addition 12 𝔑 — 9 ꝛ𝔢. Steet also[1]):

7 𝔑 + 3 ꝛ𝔢
5 𝔑 — 12 ꝛ𝔢
12 𝔑 — 9 ꝛ𝔢.

So wir aber setzen, affirmatiuum sei potentius. Sam also: 7 ʒ — 1 𝔠𝔢 wollen wir addirn zu 3 ʒ + 8 𝔠𝔢, Addirn wir addita, werden 10 ʒ, wir 57′ addirn auch | disparata, sagt der text, eins vom andern zu ziehen: nemen wir 1 von 8, pleiben 7 𝔠𝔢. Also soll potentior excessus seiner benenung der affirmation beschrieben werden, vnd wird tota additio 10 ʒ + 7 𝔠𝔢. Steet also[2]):

7 ʒ — 1 𝔠𝔢
3 ʒ + 8 𝔠𝔢
10 ʒ + 7 𝔠𝔢.

Solchs zu probirn, so nemen wir, das ꝛ𝔢 sei valor in numeris 6. Nun wern 7 ʒ von 6 in numeris 252, dauon sollen wir abziehen den 𝔠𝔢, dann wir haben gesatzt 7 ʒ minus 1 𝔠𝔢. Nun ist 1 𝔠𝔢 von 6 in numeris 216, die ziehen wir ab von 252, pleiben 36. Nun suchen wir, was 3 ʒ sein von 6, facit 108, vnd 8 𝔠𝔢 von 6 machen 1728, das addirn wir zu 108, facit 1836. Die addirn wir zu den ersten 36, khomen 1872, vnd souil sollen auch machen 10 z vnd 7 𝔠𝔢. Suchen wir 10 ʒ von 6, facit 360 in numeris. Nun 7 𝔠𝔢 von 6 machen 1512, addirn wir dazu 360, so khomen 1872, jnmassen wir oben gesatzt, vnnd ist recht. Desgleichenn magstu die andern auch probirn in gleicher form valorem zu nemen.[3])

58 Nun volget von der abzihung das dritte Capitel |

Capitulum tertium de secunda spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae detractio appellatur eiusque expositio.

Detractionem appellamus univocorum minoris potentiae a maiori separationem quandam servata quantitate ascripta. Eorum autem univocorum, quorum distrahendum potentioris fit excessus, una ab alia resecetur, quod relictum fuerit, disiuncta quantitate priori notetur. Si vero aequivocantur

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 7 + 3x \\ 5 - 12x \\ \hline 12 - 9x. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 7x^2 - x^3 \\ 3x^2 + 8x^3 \\ \hline 10x^2 + 7x^3. \end{array}$

3) Diese Art der Probe ist ja noch heute beim Schulunterrichte gebräuchlich.



habitudines, in unam congeriem coacerventur, productum, quod crescit distrahendo, contraria quantitate inficetur.

Hie volgendt leutert ALGEBRAS seine andere speties der quantitatum aditarum vnd diminutarum genandt die Abziehung, vnnd laut solch gemelt capitel also:

Die abziehung der signorum die seindt eines namens oder einer Benenung, die heisen wir eine absonderung der cleinern macht von der grossern, doch das do behalten werden die beschrieben quantitet der benenung. Sonder aber die do auch eins namens seind vnd einer Benennung, welcher dann das abzihende grofser excess ist, dann das von dem man abzeucht, so soll ein quantitet benent von der andern abgeschnitten werden, vnnd das pleibende soll mit verwandelter benenter quantitet der vordern vniuoca gezeichnet werden. So vnnd aber, das sie equiuocirt seind, das ist so eine addita vnnd die andere diminuta seind, sollen die jn ein samlung gelesen werden, vnd das erwachsende sol mit vorwandelter benenter quantitet gegen dem das alwegen sol werden bezeichent vnd beschrieben.

Solchs zu scherpfen vnd kurtzlich einzufuren, sprechen wir, so do beiderseits vniuoca seind eines namens, vnd das abzihende cleiner macht ist, dann von dem man zeucht, so soll eins vom andern mit vnverruckter benenung gezogen werden. Ist aber das grosser excess, das man abzihen soll, so soll eins vom andern gezogen werden, vnd das pleibendt solle mit voranderter benenung geschrieben werden. Seind sie aber equivocirt, das ist das einerseit ist addita vnd der andern diminuta, so sollen die zusamen gethun werden, vnd das erwachsende soll mit voranderter benenung geschrieben werden.

Als wir das exemplariter setzen wollen, zum ersten, wann beiderseit vniuoca affirmatiua seind numerorum excessus. Sam also wir setzen wollen exemplariter 3 𝒩 + 3 𝓇 sollen wir abziehen von 6 𝒩 + 12 𝓇. Wir nemen | [59] eins vom andern, restat 3 𝒩 + 9 𝓇, dann daruon man zichen soll, ist vbertreffendt, derhalben verwandelt sich nicht das zeichen, vnd steet also[1]):

6 𝒩 + 12 𝓇
3 𝒩 + 3 𝓇
3 𝒩 + 9 𝓇.

Zum andern setzen wir peiderseits vniuoca negatiua auch numerorum

1) In moderner Bezeichnung:
$$\begin{array}{r} 6 + 12x \\ 3 + 3x \\ \hline 3 + 9x. \end{array}$$

excessus des abzihenden. Also zihen wir 10 𝔯 — 3 𝔠𝔢 von 12 𝔯 — 8 𝔠𝔢, pleiben 2 𝔯 — 5 𝔠𝔢, vnd steet also wie hie[1]):

12 𝔯 — 8 𝔠𝔢
10 𝔯 — 3 𝔠𝔢
―――――――
2 𝔯 — 5 𝔠𝔢.

Zum dritten saget der text: Sondern aber der, die auch eines namens seind vnnd einer benenung, welcher dann das abzihende grosser excessus ist dann das, von dem man abzihet, soll eine benente quantitet von der andern abgezogen werden, vnd das bleibende sol jn voranderter benenter quantitet der vordern vniuoca vorzeichent werden. Sam also do vniuoca affirmatiua seind, wir wollen abzihen 5 ϑ + 9 𝔯 von 10 ϑ + 3 𝔯. Also zihen wir 5 von 10, pleiben 5 ϑ, vnd nemen 3 von 9 𝔯, pleiben 6 𝔯, vnd beschreiben 59′ sie mit dem signo —, also pleiben 5 ϑ — 6 𝔯: steet also[2]): |

10 ϑ + 3 𝔯
5 ϑ + 9 𝔯
―――――――
5 ϑ — 6 𝔯.

So aber vniuoca negatiua sein. Also wir wollen abzihen 10 𝔠𝔢 — 12 𝔷𝔷 von 12 𝔠𝔢 — 5 𝔷𝔷. Nun 10 𝔠𝔢 von 12 restant 2 𝔠𝔢, vnd 12 von 5 khonnen wir nicht nemen, derhalben zihen wir 5 von 12, pleiben 7, die affirmirn wir, vnd restat also 2 𝔠𝔢 + 7 𝔷𝔷. steet also[3]):

12 𝔠𝔢 — 5 𝔷𝔷
10 𝔠𝔢 — 12 𝔷𝔷
―――――――
2 𝔠𝔢 + 7 𝔷𝔷.

Zum vierdten saget der text: vnnd so aber die equiuocirt seind. Sam also, wir setzen wollen, wir ziehen ab 5 ϑ — 3 𝔯 von 7 ϑ + 8 𝔯. Nemen wir 5 von 7, restet 2 ϑ, vnd 3 von 8 seind disparate. Hierumb addirn wir 3 vnd 8, werden 11, vnd affirmirn das, wann die substraction oder das subtrahendem an jene selbst ist privatiuum, vnd so dann das vor priuatiue benent, machen die zwei priuatiua affirmatiuum, vnd steet also im restant 2 ϑ vnd 11 𝔯[4]):

7 ϑ + 8 𝔯
5 ϑ — 3 𝔯
―――――――
60 2 ϑ + 11 𝔯. |

―――――

1) In moderner Bezeichnung: $\begin{array}{r} 12x - 8x^3 \\ 10x - 3x^3 \\ \hline 2x - 5x^3. \end{array}$ 2) Desgleichen: $\begin{array}{r} 10 + 3x \\ 5 + 9x \\ \hline 5 - 6x. \end{array}$

3) Ebenso: $\begin{array}{r} 12x^3 - 5x^4 \\ 10x^3 - 12x^4 \\ \hline 2x^3 + 7x^4. \end{array}$ 4) Das ist: $\begin{array}{r} 7 + 8x \\ 5 - 3x \\ \hline 2 + 11x. \end{array}$

So wir aber distrahendo setzen: Sam wir wollen abzihen 2 ϑ + 3 ꝛ von 68 ϑ — 20 ꝛ, zihen wir 2 von 68 ϑ, plaiben 66, vnd 3 von 20 seind disparate. Hierumb addirn wir 20 vnd 3, werden 23 ꝛ, die negiren wir, wann wir haben gesatzt, das die subtraction an jr selbst priuatio ist. Nun ist das distrahendum affirmatiuum gesatzt, das dann aber an sich selbst priuirt das affirmatiuum, vnnd steet im Restant 66 ϑ ÷ 23 ꝛ. steet also[1]):

68 ϑ — 20 ꝛ
2 ϑ + 3 ꝛ
66 ϑ — 23 ꝛ.

Das wollen wir probirn. Setzen wir, der valor der ꝛ sei 2 jn numeris absolutis. Also werden 2 ϑ vnd 3 ꝛ vff einen thail 8, so were vffm andern 68 ϑ — 20 ꝛ, das were jn numeris 28. Nun ziehen wir 8 von 28 pleiben 20 ϑ. Souil sollen auch das restat machen. Als 66 ϑ — 23 ꝛ. wann 23 ꝛ seind 46 in numeris, die nemen wir von 66, pleiben auch 20 wie vor, desgleichen in andern.

Capitulum quartum de tertia spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae multiplicatio appellatur, eiusque tabellaris expositio. | 60

Numerorum Gebrae el Almuchabolae seriem proportionalem descripsimus, quo mutuo crescentiam signorum alterationes habent. Horum transverse unius in alterum ordine proportionali relinquantur restingui tabulare. Quod si univocum univoce ductum fuerit positivi, sin vero disparatae privationis inmutabiliter custodies quantitatem.

Hie saget Algebras von der dritten spetie der quantiteten additarum vnd diminutarum, Multiplicatio genandt, vnnd laut zum teutschen also:

Der zalen Gebrae vnd Almuchabolae proportionalischer Satzung oder ordnung haben wir vormalen beschrieben, durch welche sie haben die wachsung der vorenderung der zeichen, welcher zeichen furung eins in das ander vnd alſsdann transferse oder kreutzweis der gesatzten proportionalischen ordnung haben wir gelossen den fustapfen der verwandlung die tabellirung. Also die vniuoca mit einander multiplicirt werden, so wirstu verwandelt behalten die quantitet der affirmirung; so aber disparata eine in der ander gemultiplicirt werden, so erwechst allemal die privation, das ist negativum.

---

1) In moderner Bezeichnung:
$$\begin{array}{r} 68 - 20x \\ 2 + 3x \\ \hline 66 - 23x. \end{array}$$

Solchen text kurtzlich zu verstehen, sprechen wir: so do miteinander werden gemultiplicirt die quantiteten addite oder diminute, so sollen sie in 61 einander gefurth | werden jtzliche in jre correlativum oder beigesatzt zeichen vnd alſsdann creutzweis, vnd was dann daraus entspreusst durch verwandlung der signorum findestu in gemelten tafeln der signorum, was aber daraus khumbt respectu affirmationis ist negationis, findestu jn der andern tafel; wann, so vniuoca werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst affirmativum, wann aber disparata werden mit einander gemultiplicirt, so erwechst negativum.

Zum ersten wollen wir setzen exemplariter, wann vniuocum affirmatiuum ein ander affirmatiuum multiplicirt. Sam also 3 𝔑 + 2 ʒ wollen wir multiplicirn mit 5 𝔯 vnnd 8 ʒ. Setzen wir solchs correlatiue also:

3 𝔑 + 2 ʒ
5 𝔯 + 8 ʒ,

vnd multiplicirn 5 𝔯 in sein correlatiuum als 3 𝔑, werden 15 𝔯, wann wir finden, in den tafeln auch anfengklich demonstrirt ist, das 𝔑 in 𝔯 gefurtt 𝔯 generirt. Nun multiplicirn wir 8 ʒ in 2 ʒ, facit 16 ʒʒ, wann so ʒ multiplicirt ʒ, wirdt ʒʒ vormeldet auch in vestigio der tabellar gefunden. Darnach so multiplicirn wir transferse 5 𝔯 mit 2 ʒ, wirdt 10 c𝔢, vnd 3 𝔑 in 8 ʒ, 61′ facit 24 ʒ, vnd | steet die multiplication in forma 15 𝔯 + 16 ʒʒ + 10 c𝔢 + 24 ʒ. steet also wie hie[1]):

3 𝔑 + 2 ʒ
5 𝔯 + 8 ʒ
15 𝔯 + 16 ʒʒ + 10 c𝔢 + 24 ʒ.

Dann aber vniuocum negatiuum vniuocum negatiuum multiplicirt. Sam also, 2 𝔯 — 2 c𝔢 wollen wir multiplicirn mit 2 𝔑 — 5 𝔯. Setzen wir in forma priori, wie hie verzeichnet steet:

2 𝔯 — 2 c𝔢
2 𝔑 — 5 𝔯,

vnd sprechen: 2 mal 2 ist 4 𝔯, vnd 5 mal 2 seind 10 ʒʒ iuxta tabulam, wann negatiuum negatiuum multiplicirt. Nun sprich transferse: 2 mal 2 sein 4 c𝔢, vnd 2 mal 5 sein 10 ʒ, vnd stehen die Multiplication in forma 4 𝔯 + 10 ʒʒ — 4 c𝔢 — 10 ʒ, vnd steht also[2]):

1) In moderner Bezeichnung:

$$(3 + 2x^2)(5x + 8x^2) = 15x + 16x^4 + 10x^3 + 24x^2.$$

2) $$(2x - 2x^3)(2 - 5x) = 4x + 10x^4 - 4x^3 - 10x^2.$$

2 𝔯 — 2 cl
×
2 φ — 5 𝔯

---

4 𝔯 + 10 ʒʒ — 4 cl — 10 ʒ.

Wann wir aber disparata mit einander multiplicirn sollen. Sam also 5 φ + 7 cl mit 6 ʒ minus 8 ʒʒ. setzen wir das aber more correlatiuorum wie hie:

5 φ + 7 cl
6 ʒ — 8 ʒʒ,

vnd sprechen: 6 mal 5 seind 30 ʒ, vnd 7 mal 8 | seind 56 bß —. Nun solchs transferse, sprechen wir 6 mal 7 macht 42 ß, vnd 5 mal 8 seind 40 ʒʒ, vnd steen dise multiplication also: 30 ʒ — 56 bß — 40 ʒʒ + 42 ß, vnd steet also, wie hie[1]): 62

5 φ + 7 cl
×
6 ʒ — 8 ʒʒ

---

30 ʒ — 56 bß — 40 ʒʒ + 42 ß.

Solchs zu probirn, nemen wir valorem 𝔯 in numeris 3. Also sprechen wir 5 φ + 7 cl seind 194 in numeris. Nun 6 ʒ minus 8 ʒʒ seind negatiue in numerus 54 — 648. Das sollen wir multiplicirn mit 194, facit 10476 — 125712, vnd solchs solle die Multiplication 30 ʒ — 56 bß — 4 ʒʒ + 42 ß auch machen in numeris. Nemen wir 30 ʒ von 3 in numeris seind 270, vnd nemen 42 ß von 3 seind in numeris 10206; zu solchen addirn wir 270, wann unter der gantzen multiplication ist allein 30 ʒ vnd 42 ß affirmativum, vnd khomen 10476 in numeris affirmatiue. Nun suchen wir weither die negatiua: 56 bß von 3 seindt 122472 in numeris negatiue, vnnd 40 ʒʒ seind 3240; das addirn wir zusamen, facit 125712 negatiue: also wer die gantze Multiplication 10476 — 125712 wie oben, vnd ist recht. |

62′
Die Tafel.

| Nun wollen wir nemen affirmation, das erste gesatzte Exempel difs Capitels zu probirn. Wir nemen valorem 𝔯 5 in numeris, also weren 3 φ + 2 ʒ in numeris 53. Nun 5 𝔯 von 5 seindt 25, vnd 8 ʒ seindt 200, das weren in numeris zusamen 225, die sollen wir mit 53 multiplicirn, facit 11925: das were die gantze multiplication, vnd dasselbe sollen auch machen 15 𝔯 + 16 ʒʒ + 10 cl + 24 ʒ. Nun 15 𝔯 von 5 seind 75, vnnd 63′

1) In moderner Bezeichnung:

$$(5 + 7x^3)(6x^2 - 8x^4) = 30x^2 - 56x^7 - 40x^4 + 42x^5.$$

16 𝔷𝔷 seind 10000, vnd 10 𝔠𝔢 seind 1250, vnd 24 𝔷 seind 600. Solchs addirn wir zusam, facit 11925, jnmassen wie oben. Nun folgett hernach, wie man gemelte affirmation sol machen aus ehgerurten text der proportionalischen satzung:

62′ u. 63 | TABVLA PRIMA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1])

			1	2	3	4	5	6	7	8	9	Locus ductionum	
		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512		
		ϑ	𝔯	𝔷	𝔠𝔢	𝔷𝔷	ß	𝔷𝔠𝔢	biß	𝔷𝔷𝔷	𝔠𝔠𝔢		
1	ϑ	ϑ 1	𝔯 2	𝔷 4	𝔠𝔢 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	Locus ductionum	
2	𝔯	𝔯 2	𝔷 4	𝔠𝔢 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	10	das ist, wie weit der radix von seiner stadt ausgewandert ist.
4	𝔷	𝔷 4	𝔠𝔢 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	11	
8	𝔠𝔢	𝔠𝔢 8	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	12	
16	𝔷𝔷	𝔷𝔷 16	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	13	
32	ß	ß 32	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	14	
64	𝔷𝔠𝔢	𝔷𝔠𝔢 64	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠𝔢ß 32768	15	
128	biß	biß 128	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠𝔢ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	16	
256	𝔷𝔷𝔷	𝔷𝔷𝔷 256	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠𝔢ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	quintß 131072	17	
512	𝔠𝔠𝔢	𝔠𝔠𝔢 512	𝔷ß 1024	terß 2048	𝔷𝔷𝔠𝔢 4096	quadrß 8192	𝔷biß 16384	𝔠𝔢ß 32768	𝔷𝔷𝔷𝔷 65536	quintß 131072	𝔷𝔠𝔠𝔢 262144	18	

1) In dieser Tabelle sind die Potenzeichen der Algebra bis zu x^{18} fortgesetzt. Das Prinzip ist dabei stets das multiplikative der Exponenten. So ist z. B. $x^{18} = x^{2 \cdot 9}$. Sind die Exponenten Primzahlen, so entsteht stets ein neues *Sursolidum,* die hier bis zum quintß $= x^{17}$ fortgesetzt sind.

| Zum ersten der tabeln der signatorum so mercken wir nach der proportionalischen Satzung, vnd setzen nacheinander die signa biß in die 13. duction, vnd beschreiben die nach einem gnomonem. Vnd so dann solcher gnomo gemacht ist, so heben wir an die andere gnomon an den 𝔯, vnd finieren den mit ʒß, darnach machen wir den dritten, heben den an mit dem ʒ, vnd finiren den mit dem terß, vnd also furter; finden wir, das sie seind continua proportionalia, vnd in costirter Linien finden wir numeros ductionum, wie weit sie von den 𝔯 gewandert sein, von welchen | tafeln wir vrsprunglich sagen werden von den soliden. Hierumb gebrauchen wir der hierher nit weiter, dann das wir mogen wissen, so ein signum das ander multiplicirt, was daraus ist entsprießen. Wie wol sie ettwas von vmb sich begreifen vnd vmb sich helten, so ist vns dißmal nicht weither not zu declariren. 63′ wieder 64

| TABVLA SECVNDA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCABOLÆ MVLTIPLICATIONIS.[1]) 66

	Affirmatum + 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯
Affirmatum + 1 𝔑	Affirmatum + 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯
Negativum − 1 𝔑	Negativum − 1 𝔑	Affirmatum + 1 𝔑	Negat. Affirm. 1 𝔯 − 1 𝔑	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯
Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Negat. Affirm. 1 𝔯 − 1 𝔑	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Negat. 1 𝔑 + 1 𝔯
Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Neg. Neg. Neg. − 1 𝔑 − 1 ʒ − 2 𝔯
Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Affirm. Affirm. 1 𝔑 + 1 𝔯	Negat. Negat. − 1 𝔑 − 1 𝔯	Affirm. Negat. 1 𝔑 − 1 𝔯	Neg. Neg. Neg. − 1 𝔑 − 1 ʒ − 2 𝔯	Affir. Affir. Affir. 1 𝔑 + 1 ʒ + 2 𝔯

| Nun volget von der andern tafeln der Benenung, das ist von dem affirmativo vnd negativo. So mercken wir, das der text saget, so man vniuoca mit einander multiplicirt, das positiua quantitas entspringt, das ist quantitas addita; so aber priuatiua vnter einander werden multiplicirt, so 64 wieder

1) Bei dieser Tafel dürfte wohl zu beachten sein, dass das Minuszeichen *für sich allein* vorkommt als − 𝔑. Dass die Tafel nicht in allen Stücken richtig ist, sondern in mehreren Fächern dreitheilige Produkte stehen müssten, auch bei 1 𝔑 − 1 𝔯 mal 1 𝔑 + 1 𝔯 jedesmal 1 𝔑 − 1 ʒ als Produkt erscheinen sollte, ist klar. Ich hielt mich aber nicht befugt, hier eine Änderung oder Berichtigung eintreten zu lassen.

entspringt priuatiuum, vnd hierumb ist dise tafeln gesatzt oben an der ersten leng die benenunge nacheinander, der ersten latitudine auch. Dieselben, sind alſsdann more quatuor numerorum proportionalium jn einander gemultiplicirt, also das alle wege correlatiua eiusdem signi seind, alſsdann jn der proportionalischen ordnung ist, vnnd die zalen jn gemelter tafeln explicirn. Nun folget das funfft capitel von diuisio nach diser tafell.

64' | *Capitulum quintum de quarta spetie quantitatum additarum atque diminutarum, quae divisio appellatur, eiusque tabularis expositio.*

Prohibemur divisionem quantitatum additarum atque diminutarum numerorum Gebrae et Almuchabolae, donec ad opponendum restaurando vel diminuendo redactae fuerint in aequationem committendam. Sin vero dividantur, supponendum est, unitates in numeris esse aequales. addita addere licet diminuereque privata. divisoque producto per relictum vel euerse numero per numerum. Quibus mutuo detractis quotientis indiferentis secundari ad addita et diminuta generaliter excessus habetur.[1])

Hie saget ALGEBRAS von seiner vierdten speties gemelter quantiteten additarum vnnd diminutarum Gebre vnd Almuchabole division genandtt, vnd laut zum teutschen also:

Wir vorpieten die thailung benenter quantiteten der affirmirung vnd negirung, das ist der additen vnd diminuten Gebre vnd Almuchabole also lange, biſs sie gegeben werden vnd verendert jn die equationen zu thailen mit gegeneinandersatzung der vergleichuug zu restauriren der benennunge, alſs dann hernach volgen wirdt. So sie aber gethailt werden die additen vnd 65 diminuten quantiteten, so ist das vorzusetzen vnd | praesupponiren, das solche quantitet der affirmirung vnd negirung gleich seind den numeris absolutis, das ist, das sie nicht cleiner noch grosser jn jrer bedeutung seind, dann do seind vnitates in numeris absolutis. Alſsdann sollen die addita zu den numeris gethan werden, vnd die minuten abgezogen, vnd soll dann der dividendus gethailt werden durch den divisorem, das ist das product aus den additen vnd numeris, oder restant aus den diminuten vnd numeris oder e contrario, vnd alſsdann ein absolut

1) Unser Verfasser kennt also die Division ganzer Funktionen durch einander nicht. Das von ihm beschriebene umständliche Verfahren, um Ausdrücke wie $56 - 4$ und $20 + 4$ durch einander zu dividieren, hat nur den Zweck, den Quotienten auch in derselben Form und zwar so zu finden, dass der erste Theilquotient der der beiden ersten Zahlen, also hier $\frac{56}{20} = 2\frac{4}{5}$, wird.



numerus durch den andern solcher zweier quaniteten zal sol von einander gezogen werden, vnd die vbertreffung der quantiteten eins gegen dem andern, so wirdt solcher excess gemeinlich umb irrendes des andern quotienten beschreiben addite vnd diminute. Als so der principalen, das ist der numern quotient, seindt excedirt vom secundario, so soll solcher excess diminutae dem secundario zugesatzt werden; excedirt der principal den secundarium, so soll solcher excess additae dem secundario geschrieben werden, vnd also ist er generalis zu den additis vnd diminutis, vnd hierumb wirdt er genandt indifferens.

Sam also, wir setzen wollen exemplariter, vff das wir den text besser vorstehen mugen, wir wollen thailen 56 𝔛 — 4 durch 20 𝔛 vnd 4. Addirn wir addita, das ist | 4, facit 24, vnd remouiren diminuta, das ist 4 von 56, 65′ pleibt 52; das thailen wir nach dem text, den restanten durch das product, das ist 52 durch 24, facit $2\frac{1}{6}$, das ist der quotient principalis. Nun thailen wir die Numeros durch die numeros, als 56 mit 20, facit $2\frac{4}{5}$, das ist secundarius. Der principalen excedirt, herumb ziehen wir $2\frac{1}{6}$ von $2\frac{4}{5}$, pleiben $\frac{19}{30}$, das ist der excess des secundarij, vnd hierumb soll der diminute geschrieben werden gegen den secundarium, also were der quotient $2\frac{4}{5} - \frac{19}{30}$. Vnd solchs kurzlich zu probirn, setzen wir, so solchs der quotient ist, vnd 20 plus 4 der divisor, so wir dann multiplicirn quotienten in diuisorem, so khumbt vom product solcher multiplicirung dividendus, das ist die zal, welche gethailt soll werden wider. Sprich 20 mol $2\frac{4}{5}$ macht 56; nu sprich $\frac{19}{30}$ mal 4 macht $2\frac{16}{30}$ diminute, das zeuch von 56, rest $53\frac{14}{30}$. Nun multiplicir das transverse, sprich 4 mal $2\frac{4}{5}$ macht $11\frac{1}{5}$ addite, das addir zu $53\frac{14}{30}$, khumbt $64\frac{2}{3}$. Nun sprich $\frac{19}{30}$ mal 30 macht $12\frac{2}{3}$, von $64\frac{2}{3}$ bleiben 52, also khomen 56 𝔛 — 4, vnd ist recht.

So aber principalis quotiens excedirt secundarium: sam also, 10 𝔛 + 12 wollen wir thailen durch 6 𝔛 — 2, | | addirn wir 10 vnd 14, werden 24 66 66′ addita, vnd minuiren 2 von 6, pleiben 4. Nun thailen wir 24 mit 4, khomen 6, das ist der principalis quotiens. Nun thailen wir 10 𝔛 durch 6, khomen $1\frac{2}{3}$; das nemen wir von jme, pleiben $4\frac{1}{3}$. Also das wirdet additum, vnd khumbt $1\frac{2}{3} + 4\frac{1}{3}$. Das magstu probirn, wie oben vormeldet vnnd wie wol der text nicht vormeldt von gesetzter tafeln, so werden sie doch jm negsten Capitell eingezogen, do wir dann haben gesatzt eine von der Multiplicirung. Wann, so wir das product des Multiplicirn thailen durch den Multiplicanten, so khumpt wider Multiplicant. Also mogen wir heraus ermessen setzende, so wir multiplicirn cℭ in ʒʒ, so entspringen biß: so wir nun thailen biß mit cℭ, so mus von not wegen ʒʒ wider khomen, als dann dise tafeln anzeigt. Du findest hierjnn auch alle modos Equandi aller

equation, vnnd sondern die equationes Aliabre mit sampt den andern gesatzten. Sam also zweier signa ʒʒ ist gleich ʒc findestu jn dem funfften winkel der andern equation. So wir aber dreier signa eine vorgleichung machen, finden wir in dem erstenn triangel an der dritten 𝔯 die funffte
67 equation mit jren modis equandi. So wir aber wieder | steigen, ansehen aber den ersten, finden wir alle modos Equandi der sechsten Equation, vnd desgleichen jn den andern absteigenden triangeln etc., vnd defsgleichen viel andere mugen eingezogen werden in diser tafeln hierher nicht dienende.

TABVLA TERTIA NVMERORVM GEBRÆ ET ALMVCHABOLÆ DIVISIONIS.[1])

Locus omnium aequationum.

		1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
		ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß	ʒc	bß	ʒʒʒ	cc
1	ϑ	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß	ʒc	bß	ʒʒʒ	cc
2	𝔯	Primus modus	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß	ʒc	bß	ʒʒʒ
4	ʒ		Secundus	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß	ʒc	bß
8	c			Tertius	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß	ʒc
16	ʒʒ				Quartus modus	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ	ß
32	ß					Quintus	ϑ	𝔯	ʒ	c	ʒʒ
64	ʒc						Sextus	ϑ	𝔯	ʒ	c
128	bß							Septimus	ϑ	𝔯	ʒ
256	ʒʒʒ								Octavus	ϑ	𝔯
512	cc									Nonus	ϑ
		Quinta aequatio Algebrae	Quarta aequatio Algebrae	Tertia aequatio Algebrae	Secunda Algebrae aequatio	Prima aequatio Algebrae	Quarta	Tertia	Secunda	Prima equatio	

1) Dass in dieser Tafel die verschiedenen Formen der Gleichungen enthalten sein sollen, dürfte vielleicht so zu verstehen sein. In der am untern Rande mit *Secunda equatio* bezeichneten Spalte gehe man bis zu der Zeile hinauf, vor

Capitulum sextum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earundemque reductionibus.

Diversarum denominationum, si quae fuerint, quantitates additae atque diminutae ad idem genus transversae multiplicationis reducantur, unaque in aliam per quantitatem denominationis si ducta fuerit, numeratorem, exinde coacervatio vel detractio a denominatione producta univoce appellabitur.[1])

Nachdem ALGEBRAS hat gesatzt von den speciebus der quantiteten additarum vnd diminutarum, die dann gantz integra seindt gewest, vnd kheine benenung kheiner fract gehabt haben, will er hie nachuolgende sagen von gemelten quantiteten jn geprochen, vnd laut zum deutschen also:

So do seind die quantiteten addite vnd diminute zwispenniger vnd vngleicher denomination, das ist, das sie nicht eines namens seind, so sollen die in eine denomination | durch die Multiplicirung in Creutzweis gebrachtt werden, vnd alſsdann eine in die andere gefurt werden, die do seind die quantitet der denomination, das ist, ein nenner in den andern, vnnd so dann solchs geschicht, so man dann numeratores oder die zeler zusam geaddirt oder von einander zeuchett, desselbig pleibendt oder erwachsendt wirdt genenndt von dem, das aus den denominationibus ist erstanden zusam gemultiplicirt. 67′

Sam also, wir setzen wollen dem text gemes, wann sie coaceruirt oder addirt werden die quantiteten addite vnd diminute vngleicher denomination oder nenner, als wir wollen addiren:

$$\frac{2\,𝔯 - 2\,ϑ}{1\,ϑ + 1\,𝔯} \quad \text{zu} \quad \frac{3\,ϑ + 1\,𝔷}{1\,𝔯}$$

Setzen wir also:

$$\frac{2\,𝔯 - 2\,ϑ}{1\,ϑ + 1\,𝔯} \quad \frac{3\,ϑ + 1\,𝔷}{1\,𝔯}$$

vnd multiplicirn die creutzweis sprechende: 1 𝔯 furen wir jn 2 𝔯 — 2 ϑ, werden 2 𝔷 — 2 𝔯. Nun furen wir 1 ϑ + 1 𝔯 in 3 ϑ + 1 𝔷, facit 3 ϑ + 1 𝔠 + 1 𝔷 + 3 𝔯. Solchs addirn wir zu 2 𝔷 — 2 𝔯, facit 3 ϑ

welcher links 8 steht, das ist die fünfte, dann findet man dort am äussersten rechten Rande stehen 𝔷𝔷 · ß · 𝔷𝔠. Da bei der *Secunda aequatio* ein Zeichen ausgelassen werden soll, so hat man also hier die Gleichung 𝔷𝔷 = 𝔷𝔠. In der mit 4 anfangenden Zeile aber stehen die verschiedenen Formen der fünften Gleichung: ϑ, 𝔯, 𝔷; 𝔯, 𝔷, 𝔠, u. s. w. bis ß, 𝔷𝔠, biß, und wenn man noch die daran nach rechts oben sich anschliessenden hinzunimmt, auch noch 𝔷𝔠, biß, 𝔷𝔷𝔷 und biß, 𝔷𝔷𝔷, 𝔠𝔠.

1) Das ist Addition und Subtraktion von allgemeinen Brüchen.



$+ 1\,\text{𝔠} + 3\,\text{𝔷} + 1\,\text{℞}$; solchs ist der numerator. Nun multiplicirn wir denominatorem, das ist $1\,\text{φ} + 1\,\text{℞}$ mit $1\,\text{℞}$, facit $1\,\text{℞}$ vnd $1\,\text{𝔷}$, vnd solchs
68 ist der gemein Nenner des obgemelten zelers vnd stehet also wie hie: |

$$\frac{2\,\text{℞} - 2\,\text{φ}}{1\,\text{φ} + 1\,\text{℞}} \times \frac{3\,\text{φ} + 1\,\text{𝔷}}{1\,\text{℞}}$$

$$\frac{3\,\text{φ} + 1\,\text{𝔠} + 3\,\text{𝔷} + 1\,\text{℞}}{1\,\text{℞} + 1\,\text{𝔷}} \; ^{1)}$$

khumbt aus der multiplication jm Creutz gemelte Addition, wie hie verzeichent.

Das wollen wir probirn ex valore, vnd lasen valorem 3 sein in Numeris, vnnd suchen erstlich, was do sei der zeler des ersten buchs in numeris, der was $2\,\text{℞} - 2\,\text{φ}$, das ist 4 in numeris, wenn $2\,\text{℞}$ seind 6 in numeris, subtrahirn wir $2\,\text{φ}$, pleiben 4. Nun suchen wir, was sein nenner sey ex numeris, der ist $1\,\text{φ}$ vnd $1\,\text{℞}$, das ist auch 4. Nun thailen wir 4 durch 4, facit 1, also were der erste Bruch in Numeris 1. Nun suchen wir gleicherweis den andern Bruch, vnnd nemen zu dem ersten den zeler, der ist $3\,\text{φ}$ vnd $1\,\text{𝔷}$, das ist in numeris 12. Nun suchen wir seinen Nenner, der was $1\,\text{℞}$, das ist 3 in numeris: thailen wir 12 mit 3, facit 4, wann der Bruch ist auch gethailt. Also ist der andere Bruch 4 in numeris, den addirn wir zum ersten, der was 1 in numeris, vnnd khumbt 5 aus der gantzen addition, die was

$$\frac{3\,\text{φ} + 1\,\text{𝔠} + 3\,\text{𝔷} + 1\,\text{℞}}{1\,\text{℞} - 1\,\text{𝔷}}.$$

So es dann auch 5 in numeris macht, so ist es recht. Nun suchen wir im zeler, was do sei $1\,\text{𝔠}$ von 3, facit 27, dazu $3\,\text{φ}$, facit $30\,\text{φ}$, zu $3\,\text{𝔷}$, das ist 27, vnd $1\,\text{℞}$ khomen 60, souil macht der zeler in numeris. Die thailen wir durch $1\,\text{φ} + 1\,\text{𝔷}$, das ist 12, khomen auch 5, vnd ist recht ge-
68′ macht. |

Setzen wir den andern punct, als der text sagt, wann sie detrahirt werden, solle allermas volfurt werden wie vor, dann alleine, wo man vor het addirt, soll man jtzunder subtrahirn. Sam also, wir setzen wollen abzuzihen $\frac{1\,\text{φ} + 2\,\text{𝔷}}{1\,\text{℞}}$ von $\frac{2\,\text{𝔠} + 8\,\text{𝔷}}{7\,\text{φ}}$. Setzen wir die, wie vorgesazt, also:

$$\frac{1\,\text{φ} + 2\,\text{𝔷}}{1\,\text{℞}} \quad \frac{2\,\text{𝔠} + 8\,\text{𝔷}}{7\,\text{φ}}.$$

Multiplicirn die Creutzweis, jnmassen vorgethan, khumbt des ersten mit

1) In moderner Bezeichnung: $\frac{2x - 2}{1 + x} + \frac{3 + x^2}{x} = \frac{3 + x^3 + 3x^2 + x}{x + x^2}$.



$7\,\mathfrak{N}$ in $1\,\mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{z}$, $7\,\mathfrak{N} + 14\,\mathfrak{z}$, vnd des andern mals khumbt mit $1\,\mathfrak{r}$ in $2\,\mathfrak{c} + 8\,\mathfrak{z}$, $2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{c}$; die addirn wir nicht, sondern subtrahirn eins vom andern, pleiben $2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{c} - 7\,\mathfrak{N}$ vnd $14\,\mathfrak{z}$, das ist der zeler. Nun multiplicirn wir die nenner mit einander, als $1\,\mathfrak{r}$ mit $7\,\mathfrak{N}$, khomen $7\,\mathfrak{r}$, vnd stehet das Restat also wie hie oben:

$$\frac{1\,\mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}} \times \frac{2\,\mathfrak{c} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{N}}.$$

Multiplicirn wir die, vnd nemen eins vom andern nach laut des Texts, so pleiben:

$$\frac{2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{c} - 7\,\mathfrak{N} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{r}}.$$ [1])

Das wollen wir probirn ex numeris absolutis. Setzen wir, das $\mathfrak{r}$ sei 2 in numeris. Nun suchen wir den zeler des ersten Bruchs, dauon man nemen soll, als $\frac{2\,\mathfrak{c} + 8\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{N}}$, das seind 48; die thailen wir mit $7\,\mathfrak{N}$, facit $6\frac{6}{7}$, das ist der eine pruch. Nun suchen wir | auch den andern Bruch, den man abziehen soll, als $\frac{1\,\mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{r}}$, facit 9; den thailen wir in $1\,\mathfrak{r}$, als in 2, facit $4\frac{1}{2}$, den subtratrirn wir von $6\frac{6}{7}$, pleiben $2\frac{5}{14}$, vnd souil sollen auch machen der gemelte restat als 69

$$\frac{2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{c} - 7\,\mathfrak{N} - 14\,\mathfrak{z}}{7\,\mathfrak{r}}.$$

Suchen wir erstlich den zeler: $2\,\mathfrak{zz} + 8\,\mathfrak{c}$ von 2 seind 96. Nun sollen abgezogen werden $7\,\mathfrak{N}$ vnd $14\,\mathfrak{z}$, die machen 63; nemen wir sie, bleiben 33. Nun ist der nenner 14 von wegen $7\,\mathfrak{r}$: thailen wir sie, khomen $2\frac{5}{14}$, vnd ist recht. Defsgleichen magstu alle andere probirn. Nun volget das sibende Capitel.

Capitulum septimum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque multiplicationibus.

Numerorum pregnantium, quorum denominatio est divisa, numeratorum atque denominationum se mutuo fit multiplicatio. Quod si sit denominatorum denominationis denominatio, ad unam denominationem se invicem multiplicatium reducentur quantitantum.

---

1) In moderner Form: $\frac{2x^3 + 8x^2}{7} - \frac{x + 2x^2}{x} = \frac{2x^4 + 8x^3 - 7 - 14x^2}{7x}$.

Hie saget vns ALGEBRAS von der Multiplication der quantiteten additen vnd diminuten, vnd laut zum teutschen also:

Der geschwengerten quantiteten additen vnd diminuten, die do seind einer ungleichen benenung oder denomination, so sollen die numeratores besonder vnd die denominationes mit einander 69′ multiplcirt werden. So dann ist, | das die Nenner benennt seind, welche benenung dann aber ein denomination ist, das ist gesprochen, so ein nenner hat einen andern nenner, welchs dann nenners nenner hat, respectu eines numeratoris, so sollen die nenner in eine quantitet zusamen gemultiplicirt werden, die dann ist eine benenung oder denomination des ersten gesatzten zelers.

Solchen schriftlichen text zu leutern, wollen wir setzen exempla, vff den ersten punct des texts, als er sagt: So die quantiteten addite vnd diminute einer ytzlichen benenung seind, sam also wir setzen wollen zu multiplicirn:

$$\frac{2\ \vartheta + 1\ ʒ}{1\ ꝛ} \quad \text{mit} \quad \frac{5\ ꝛ + 2\ \vartheta}{1\ ʒ + 1\ ꝛ},$$

setzen wir correlatiue vnd multiplicirn einen zeler in den andern als 2 ϑ + 1 ʒ mit 5 ꝛ + 2 ϑ, facit 10 ꝛ + 2 ʒ + 5 ⅽ + 4 ϑ vor den zeler. Nun multiplicirn wir die nenner auch mit einander, khumbt 1 ⅽ + 1 ʒ, das wer der Nenner, vnd stehet dje multiplication also:

$$\frac{\dfrac{2\ \vartheta + 1\ ʒ}{1\ ꝛ} \text{——} \dfrac{5\ ꝛ + 2\ \vartheta}{1\ ʒ + 1\ ꝛ}}{\dfrac{10\ ꝛ + 2\ ʒ + 5\ ⅽ + 4\ \vartheta}{1\ ⅽ + 1\ ʒ}}.^{1)}$$

Das wollen wir probirn ex valore aus den absolutis numeris, so setzen wir, die ꝛ solle 4 sein in numeris. Nun suchen wir, was der zeler des ersten 70 | Bruchs sey, das ist 2 ϑ vnd 1 ʒ, facit in numeris 18, wann 1 ʒ ist 16 von 4, derzu 2 machen 18. Nun sein Nenner ist 1 ꝛ, das ist 4; thailen wir, facit $4\frac{1}{2}$. Nun suchen wir den andern bruch auch dermassen: 5 ꝛ seind 20, vnd 2 ϑ seind 22, pas ist der zeler des andern Bruchs, vnd sein Nenner ist 20. Thailen wir, facit $1\frac{1}{10}$. Nun wollen wir die zwei absoluten bruch mit einander multiplicirn jnmassen man pflegt in gebrochen zalen zu thun, das wir hie in den zalen ALGEBRE presupponiren, khombt 4 vnd $\frac{19}{20}$:

1) In modernen Zeichen:

$$\frac{2 + x^2}{x} \times \frac{5x + 2}{x^2 + x} = \frac{10x + 2x^2 + 5x^3 + 4}{x^3 + x^2}.$$

souil macht auch das product $\frac{10\,\text{𝔯} + 2\,\text{ʒ} + 5\,\text{cℓ} + 4\,\text{φ}}{1\,\text{cℓ} + 1\,\text{ʒ}}$. Suchen wir zum ersten den zeler in numeris. 10 𝔯 von 4 seind 40, 2 ʒ seindt 32, 5 cℓ seind 320 vnd 4 φ seind 4. Addirn solchs, facit 396. Das thailen wir mit 1 cℓ + 1 ʒ, als 80, vnnd khumbt recht $4\frac{19}{20}$.

Nun sagt der text, so ein Bruch khomet in der zalen Gebre, der do het Nenners nenner. Sam also, wir setzen wollen, vnd des vil khumbt in den coniecturationibus, das ist in den examinibus der proposition, wir wollen multiplicirn

$$\frac{\frac{10\,\text{φ} - 1\,\text{ʒ}}{1\,\text{𝔯} + 1\,\text{ʒ}}}{4\,\text{φ}} \quad \text{mit} \quad \frac{\frac{1\,\text{cℓ} + 1\,\text{ʒ}}{1\,\text{𝔯} + 1\,\text{φ}}}{1\,\text{ʒ}}.$$ [1])

Setzen wir die correlatiua, wie stedt, jnmassen wir vorgehalten haben. Sagt der text, es sollen die Nenner | zusamen gemultiplicirt werden eines 70′ ytzlichen pruchs. Sam also, 4 φ ist der letzte nenner des ersten Bruchs, die multiplicirn wir in 1 𝔯 + 1 ʒ, facit 4 𝔯 + 4 ʒ. Vnd das wer der Nenner des ersten Bruchs. Wir machen den andern auch also, khumbt 1 cℓ + 1 ʒ. Also weren gemelte Nenner reducirt. Die wollen wir nun mit einander multiplicirn, jnmassen wir den ersten pruch gethun haben, vnd khumbt aus der multiplication der zwir bruche:

$$\frac{10\,\text{cℓ} - 1\,\text{ʒʒ} + 10\,\text{ʒ} - 1\,\text{ß}}{8\,\text{ʒʒ} + 4\,\text{cℓ} + 4\,\text{ß}}.$$

Solchs wollen wir probirn. Wir nemen erst gesatzte pruch, die do noch nicht reducirt seind, vnd suchen valorem. Zum ersten den zeler des ersten Bruchs, vnd lassen valorem 𝔯 sein 2 in numeris. Also 10 φ — 1 ʒ macht 6, das gethailt mit 1 𝔯 + 1 ʒ, facit 1; das gethailt wider in 4 facit $\frac{1}{4}$: souil macht der erst Bruch in numeris absolutis. Desgleichen mache den andern. Besiche, was do sey 1 cℓ + 1 ʒ von 2, facit 12, gethailt in 1 𝔯 + 1 φ, in 3, facit 4, die gethailt in 1 ʒ, als in 4, facit 1 oder $\frac{4}{4}$. Die wollen wir mit einander multiplicirn, khumbt $\frac{1}{4}$ in numeris; das soll auch thun die obgemelte multiplication. Wir suchen zum ersten 10 cℓ von 2, macht 80, — 1 ʒʒ, als 16, bleiben 64, vnd 10 ʒ seind 40, — 1 ß, facit 32: zih ab, pleiben 8, zu 64 wird 72 in numeris der zeler. Nun | suchen wir den nenner: 8 ʒʒ seind 128, vnd 4 cℓ seind 32, vnd 4 ß 71

1) In moderner Bezeichnung:

$$\frac{\frac{10 - x^2}{x + x^2}}{4} \times \frac{\frac{x^3 + x^2}{x + 1}}{x^2} = \frac{10 - x^2}{4x + 4x^2} \times \frac{x^3 + x^2}{x^3 + x^2} = \frac{10x^3 - x^4 + 10x^2 - x^5}{8x^4 + 4x^3 + 4x^5}.$$

seind 128; das addirn wir zusam, facit 288, das ist der Nenner. also were der Bruch $\frac{72}{288}$ in numeris, macht $\frac{1}{4}$, vnd ist recht.

Capitulum octavum de diversis denominationibus quantitatum additarum atque diminutarum earumque divisionis diviso pregnata sive potentialis, non absoluta.

Divisionem absolutam signorum, ut diximus, refutamus. Earumque autem, quarum denominatio est coaptata per interiectionem virgularum in Gebram esse potentialiter divisa: unam vero per aliam committendam disparate habitudinis transversae ductionis divisionem in eandem essc reductam denominationem diminutio.

Hie saget Algebras von der division der quantiteten additarum vnd diminutarum, vnd laut der text zum teutschen also:

Die division gemelter zaln Gebre die absoluten, als wir gesagt haben, vorwerfen wir, sonder der, den dj denomination vnterschrieben ist durch die zwischen fugung der virgulen des Bruchs, sprechen wir, das dj gethailt ist oder sey jn Gebra 71' potentialiter. Aber eine benente | quantitet addita oder diminuta, so die sol gethailt werden durch eine andere, welche also vngleicher denomination sein, vorkunden wir, solche vormelte thailung gebracht werden jn eine denomination durch die transferse oder creutzformige multiplicirung.[1])

Sam also, wir setzen wollen zu thailen $\frac{5\,\varphi + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\varphi + 1\,\mathfrak{r}}$ mit $\frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{c}}{1\,\mathfrak{r}}$.

Setzen wir sie correlatiue wie die andern, sehen wir, das ein jtzlich quantitet mit einer virgulen vnterschrieben ist gegen jrer denomination, damit sie ist potentialiter gethailt, vnd nicht actu, als der text sagt. Aber eine durch die andere zu thailen, jnmassen wie hie, die do vngleicher denomination seindt, so multiplicirn wir Creutzweis nach vnterweisung des sechsten Capitels difs Buchs, als 1 $\mathfrak{r}$ mit 5 φ vnd 1 $\mathfrak{z}$, facit 5 $\mathfrak{r}$ vnd 1 $\mathfrak{c}$, das ist der zeler oder diuidendus; furn wir 1 φ + 2 $\mathfrak{r}$ in 2 $\mathfrak{z}$ vnd 2 $\mathfrak{c}$, facit 2 $\mathfrak{z}$ + 4 $\mathfrak{zz}$ + 6 $\mathfrak{c}$, vnd ist der Nenner. Stehet also jn seinem form wie hie

$$\frac{5\,\varphi + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\varphi + 2\,\mathfrak{r}} \times \frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{c}}{1\,\mathfrak{r}}.$$

So wir creutzweis multiplicirn, so khumbt der quotient als wie hie:

72 $$\frac{5\,\mathfrak{r} + 1\,\mathfrak{c}}{2\,\mathfrak{z} + 4\,\mathfrak{zz} + 6\,\mathfrak{c}}. \mid$$ [2])

1) Division allgemeiner Brüche ist also erlaubt.

2) In moderner Bezeichnung: $\frac{5+2x^2}{1+2x} : \frac{2x^2+2x^3}{x} = \frac{5x+x^3}{2x^2+4x^4+6x^3}$.

Das wollen wir probirn. Wir nemen valorem in numeris 2, also were der erste Bruch $\frac{5\,\mathfrak{R} + 1\,\mathfrak{z}}{1\,\mathfrak{R} + 2\,\mathfrak{z}}$ in numeris $\frac{9}{5}$, die sollen wir thailen mit dem andern, als $\frac{2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{C}}{1\,\mathfrak{C}}$, das ist $\frac{24}{2}$, also sollen wir thailen $\frac{9}{5}$ mit $\frac{24}{2}$, khumen $\frac{18}{120}$, so wir die lassen aufgehn jn geringer zaln, khomen $\frac{3}{20}$. Souil soll auch der quotient in numeris machen. Suchen wir gleicherweis den zeler vnd auch den Nenner, so finden wir $\frac{18}{120}$, jnmassen wie oben, vnd ist recht gemachtt.

Capitulum nonum de custodia vigilis adverso aequationis numero absoluto positus eiusque officio assimulationis.

Assimulatio est, qua coniecturatio proportionis ad duas aequales restaurando vel diminuendo partes numero absoluto examine vigilis ex adverso aequationis positus reducitur.

Hie saget ALGEBRAS von der Assimulation, nachdem gesagt ist von der eigenschaft der signa, durch welche man in die Equation khumbt, so khan die nicht volfurt werden, es geschehe dann ein vorgleichung zweier thailen, vnd laut zum teutschen also:

Die Assimulierung oder vorgleichung ist, durch welchs die coniecturation der propositionen geschehen durch das | Examen 72′ des wechters, welcher dann gesatzt ist in der Equation durch absolutos numeros, durch benenung oder gebung zu zweien gleichen thailen pracht wirdt.[1])

Diesem text einen vorstentlichen sin einzufuren, der etwas tief gegrundt, sagt er zum ersten von der vorgleichunge zweier thailen, die dann geschehen soll also: was ein thail zu wenig hat, soll jme restaurirt werden, vnd dem andern dasselbig; hat dann ein thail zuuil, soll jme genomen werden, desgleichen dem andern. Als wir setzen wollen, damit wir den text begreifen mögen, ein coniecturation ist geschehen, jnmassen der text lautet, durch das Examen des wechters oder hueters der Equation, also zu finden eine zal, wann ich daraus nim $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd addir 7 dragmas darzu, das 28 khumen. Sprechen wir, das 28 $\mathfrak{R}$ sey der vigil equationis oder der hueter, durch welchen dann geschieht das Examen der Aufgabe in den

1) Hier wird also gelehrt, wie die ursprüngliche Aufgabe durch Restauratio und Diminutio in eine der Formen gebracht werden kann, die oben als Normalformen der Gleichungen angegeben sind. Die in Ziffern gegebene Zahl wird dabei *Vigil,* d. h. Wächter genannt, weil durch sie die Richtigkeit der Übertragung der Aufgabe in eine Gleichung kontrolliert wird.



coniecturen des setzenden 𝔯; dann 28 vigiliren, das solchs Examen der gesatzten 𝔯 sol recht volfurt werden, vnd hierumb ist der wachsende vf einer seiten in absoluto numero vnd hutendt der Equation. So nun 1 𝔯 ist gesatzt vnd examinirt nach der Aufgab, khomen $\frac{7}{12}$ 𝔯 + 7 φ, die seind gleich 73 28 φ, den huter vnd vigil. Solche | zwei thail sollen wir dann vorgleichen. Saget der text, welchs thail zuuil hat, dem sole abgezogen werden, vnd dem andern auch souil. Nun hat die Coniecturation einer seit + 7 φ, die deliren wir vnd nemen dem vigil auch souil, pleiben 21 φ, vnd also ist vff beiden Seithen vorgleichnus geschehen, das ist, $\frac{7}{12}$ 𝔯 gleich seind 21 φ, dem vigil; vnd also ist zu vermercken aus dem text, das alle numeri absoluti in einer aufgabe, durch oder von welcher die coniecturation geschicht, werden geheisen wechter vnd vigiles, vnd die do werden coniecturirt von der 𝔯, heist die coniecturatio, durch welche dann die vorgleichung wirdt gefurt gegen gemelten vigilis, vnd jren anhengen, welches halben dann die coniecturation geschicht durch jre Examina der aufgab gemes. Sam also, eine coniecturation ist laut einer proposition oder Aufgabe gefurt, vnd khumbt des einem thail 157 φ — 2 𝔯 + 3 𝔷, vnd opposita parte khombt 1 φ + 7 𝔷 — 42 𝔯, die wir doch presupponiren einander gleich, verordent durch die examina vigilum jn die Equation zu vorgleichen. Nim einem thail 1 φ vnd nim 157 auch 1 φ, pleiben 156 φ. Nim einem thail 3 𝔷, vnd nim dem andern 7 𝔷 auch 3 𝔷, pleiben 4 𝔷; restaurir dem einen thail 2 𝔯, vnd gib dem andern auch 2 𝔯, pleiben 40 𝔯, 73' vnd sein in form | vorgleicht einem thail 156 vnd dem andern 4 𝔷 — 40 𝔯. Restaurir dem ein thail 40 𝔯 vnd dem andern auch 40 𝔯, pleiben vff einem thail 4 𝔷 vnd vfm andern 156 φ + 40 𝔯, vnd stedt jn der sibenden Equation.[1]) Nun mochte einer sprechen: so dann zwei thail gleich einander seind, was darfen wir dann der vorgleichung? Antworten wir, das ehegenamte vorgleichung seind allein von wegen der affirmirung vnd negirung, das ist von den quantiteten additen vnd diminuten, als dann in den coniecturationibus khumbt, das allerwegen zwei thail gleich werden. So dann von equalibus genomen wirdt oder restaurirt wirdet, so werden wider equalia, oder werden equalia auch der angenomen conception, machen aus

---

1) Dieses durchgeführte Beispiel ist in neuerer Bezeichnung folgendes:

$$157 - 2x + 3x^2 = 1 + 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x + 3x^2 = 7x^2 - 42x,$$
$$156 - 2x = 4x^2 - 42x,$$
$$156 = 4x^2 - 40x,$$
$$156 + 40x = 4x^2,$$

und es ist also auf die siebente Gleichungsform zurückgeführt.

ehegemelten vorgleichten thail. Durch die sibende Equation khumbt valor des 𝔠𝔢 in numeris 13. Nun haben wir gesatzt erstlich 1 𝔖𝔣 vnd 7 ʒ, das weren 1183 in numeris, vnd 1 𝔖𝔣 ist 1184, minus 42 𝔠𝔢 herabgezogen pleiben 638, vnd souil sollen sein 157 𝔖𝔣 — 2 𝔠𝔢 + 3 ʒ, wann sie seind presupponirt gleich erstlich gesatzt. Nun 157 𝔖𝔣, dauon ziehen wir 2 𝔠𝔢, pleiben 131, addirn wir 3 ʒ, khomen 638 wie oben, vnd ist recht.

Das wollen wir probirn. Wir haben obgemelte thail vorgleicht durch dj assimulation, vnd ist khumen einem thail 4 ʒ, dem andern 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢. Sprechen wir, | 4 ʒ von 13 seind 676, vnd des andern thails 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢 74 seind auch souil, also were gleich addirt worden 38 in numeris, wann auf yeden paiden ersten thailen was 638, so ist vff disen assimulirten 676, das ist 38 mehr, das dann hernachuolgendt besser gegrundt wirdt zu vorstehen.

Capitulum ultimum, quomodo numerus pregnans per aequationem deducatur in partum ad pariendum numerum absolutum rationalem sive surdum.

Absolutam divisionem numerorum pregnantium aequationi effectum deposcit, eaque numerum nudum rationalem pariet, expletum surdum vero naturae rationamento reliquit binomica normate docente.

Hie endet Algebras sein ander Buch der Gebra vnd Almuchabola vnd beschleußt entlich der signorum eigenschafft, vnd laut zum teutschen also:

Die equation begert vnd erfordert eine offene thailung der zalen, die do geschwengert werden in den signis den effect vnd darzu gebraucht sie entlich erfunden sein, welche equation geporn sein eine plosse vnvernunftige zal, eroffnet die natur aber surden oder irrationalen gesprochen, hatt verlassen die equation der natur zur geberung die Rationirung oder handlung, als dann die binomischen Regeln diss ercleren werden. | 74′

Solchen text begreiflich zu ergrunden, nemen wir für vns die negsten Capitel die ehegemelten vorgleichten zalen nach der assimulation, die do erstlich waren 1 𝔖𝔣 + 7 ʒ — 42 𝔠𝔢 waren gleich 157 𝔖𝔣 — 3 ʒ, welche dann geschwengerte zalen seind, vnd durch dj gemelte assimulation seind sie pracht jn die siebende Equation zu zweien gleichen thailen, die do waren 4 ʒ, wie vorsteht, vnd den andern 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢, so dann solchs durch dj equation gethailt wirdt, die dann ein offene thailung begert actu vnd nicht in potentia, wann zu der equation bracht werden, zu gebern dj offenbarlichen zal. Also thailen wir durch 4 ʒ, 156 𝔖𝔣 + 40 𝔠𝔢, jnmassen durch die Equation bericht hat, vnnd gebirt den valorem cosse 13 unitates absolutae in numeris, der dann rationalis explicite der natur erkennt-

lich mit seinen vnitaten geporn ist, den wir auch rationaliter mögen handeln durch die geschwengerte zal, darinn er ist verschlossen gewest. Also wir wollen exemplariter setzen erstlich rationaliter dem text gemes, vnd darnach jrrationaliter auf den andern punct, als der text sagt, wir wolten finden dj vernunftige zalen 13, die vns die Equation erfordert hat, durch die geschwengerte zaln der signorum, die do waren gleich peiderseits, als wir vorangezaigt haben, die wir wollen probiren, ob solche ein 75 rationalische | zal sey gewesen in der geschwengerten mutter der signorum. So eroffnen wir den ersten thail, der was 1 𝔑 + 7 ʒ — 42 ꝛ in den numeris absolutis aus 13, vnd steht also 1 𝔑 + 1183 𝔑 — 546 𝔑, wann 1183 seind 7 ʒ von 13, so seind 546 𝔑 42 ꝛ. Eroffnen wir den andern thail, der do was 157 𝔑 — 2 ꝛ + 3 ʒ, so wir beide seithenn gegeneinander ansehen, so finden wir, durch 13 𝔑 einander gleich sein gewest die signa, als dann ein schwanger Mutter der zaln 13, wann yeder seithen khomen 638. So wir sie dann vorgleichen mit den negationibus vnd affirmationibus, also das wir ab equalibus equalia nemen oder ad equalia addirn equalia, so khomen oder pleiben equalia. Addirn wir 26 𝔑 dem einen thail, der — 26 𝔑 hat, so bezalt er seine Negation, vnd geben dem andern thail auch 26. Wir nemen dem einen thail 507 𝔑, wann die affirmation vberflus hat, vnd nemen dem andern thail auch souil, wir geben auch dem ainen thail 546 𝔑, so bezalt er auch seine Negation, vnd geben dem andern thail auch souil; wir nemen 1 𝔑 von einem thail vnd nemen dem andern auch souil; also finden wir abermals peiderseitz gleich yder zal 676, der numerus, der dann was in schwangern vnd 4 ʒ eins thails 75′ vnd 156 𝔑 + 40 ꝛ anders thails. | Also ist die Assimulation geschehen, durch 38, die wir zu zweien gleichen thailen addirt haben, das ist zu 638, ist khumen beiderseitz in der vergleichung 676 vnd 676, vnd ist recht.

Aber den surdischen numerum, als der text sagt, der hat der Equation die natur verlassen die Rationirung durch nachuolgende Regel der Binomien vnsers dritten buchs, wann derselbig explicite nicht herauskhumbt, sonder beschlossen wirdt in taube vnvernunftige zaln. Als wir setzen wollen 320 𝔑 + 3 ʒ — 1 ꝛ ist gleich 149 𝔑 + 8 ʒ + 7 ꝛ; so wir das vorgleichen, khumbt einem thail 171 𝔑, dem andern 5 ʒ + 8 ꝛ, vnd steet in der funften Equation, durch welche, so die signa pregnantia gethailt werden, die vnvernunftige zal $\frac{871}{25}$, von welcher radix — $\frac{4}{5}$ ist die zal, die die Equation begert, vnd hierumb, so ist $\frac{871}{26}$ macht die zal irrationalis, wann wir sie nach gebrauch der vniteten in numeris nicht handeln khunen. Wann wir die handeln sollen, so ist radix von $\frac{871}{25}$ — $\frac{4}{5}$.[1]) Nun ist sie

1) Während die oben gefundene Gleichung $156 + 40x = 4x^2$ die rationale

surde, vnd herumb hat die Equation die natur verlassen das rationament durch binomische Regeln jn vnsern dritten Buch hernachuolgendt.

Explicit liber secundus ALGEBRAE. | 76

Incipit liber tertius ALGEBRAE *Arabis de numeris rationalibus communicantibus atque surdis trium tractatuum, qui ex matre pregnante per aequationes digestas nascebantur absolute.*

Tractatus primus tertii libri.[1])

Rationalis est numerus Gebrae, qui digestis aequationibus absolute unitatum complectitur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine radicem esse numeri sui potentionalis, rationalem numerum vero non omnem potentionalem esse radicis rationalem, sed potentiae tantum omnis rationatur unitatis planitie lineae rationalis datae in longitudine.

Hie saget ALGEBRAS in seinem dritten Buch zum ersten von den numeris rationalibus des ersten tractats, vnd laut zum teutschen also:

Das ist ein rationalisch zal des dings, die do khomet aus den eegemelten Equationibus offenbarlich jrer vniteten, damit sie dann gezelt werden, vnd hierumb ist wissentlich, ein jtzliche zal mag sein ein radix rationalis seiner quadratischen zalen, das ist in potentia, vnnd hierumb ist nicht zu vorwundern, das nicht ein yede zal in potentia seines radicis ist rationalis, sondern allein in der macht, das ist in potentia, wirdt ein ytzliche zal gebraucht rationalis der quadratischen vnitet, die dann in der lenge gegeben wird rationalis. | [2]) 76′

Wurzel $x = 13$ besitzt, hat die Gleichung $320 + 3x^2 - x = 148 + 8x^2 + 7x$, welche restaurando und diminuendo in $171 = 5x^2 + 8x$ übergeht, die Lösung $x = \sqrt{\frac{871}{25}} - \frac{4}{5}$, und ist also irrational. Sie hat die Form eines Recisum EUKLID's und lässt sich naturgemäss erst durch die im dritten Buche gelehrte Wurzelausziehung bestimmen.

1) Dieser erste Traktat des dritten Buches handelt von der Ausziehung der Wurzeln. Zunächst müsste man eigentlich sagen von der Erhebung eines Binoms auf die ersten neun Potenzen. Da aber im letzten Kapitel dieses Theiles gesagt wird, dass alles Vorhergehende nur auseinander gesetzt sei, um die Auffindung der Wurzeln zu ermöglichen, so hat der deutsche Bearbeiter die Wurzelausziehung schon in den einzelnen Paragraphen gelehrt. Die Ausziehung betrifft nur rationale Wurzeln aus vollständigen Potenzen.

2) Klarlegung des EUKLIDischen Begriffs: linearrational und in Potenz rational, aber unter Ausdehnung des Begriffs „in Potenz rational" auf alle nach irgend einer Wurzel irrationale Zahlen, so dass also z. B. 81 als fünfte Potenz angesehen nur in Potenz rational ist, dagegen als vierte Potenz betrachtet sowohl in der Potenz, als in der Länge rational ist. Hier tritt zuerst das Wurzelzeichen

Von solchen text einzufuren den schrifftlichen sin, so nemen wir einen jtzlichen radicem rationalem, der in der lenge, das ist in der vngemultiplicirten zal gesatzt wirdt, dann als Linea, die khein ander zufallen hat, dann longitudinem, also hat auch die zal kheinen andern namen gesatztt in der lenge dann allein, das sie wirdt genant ein radix rationalis einer potentionalischen zal, vnd also mag ein ytzliche zal gesatzt in der naturlichen profusion der lenge der zalen werden oder sein ein radix. Sam also 5 in der profusion der naturlichen zalen wirdt gesatzt in der lenge, wann sie khein andere beschwerung hat, dann das sie die stadt vertritt der naturlichen satzung, darin sie von jrer vnitet ausgangen ist, die dann mag sein der radix jrer potentionalischen zaln, das ist 25. Von gleicherweis die linien 5 in sich vormag potentionaliter den quadrat, das ist den superficien, also vormag 5 an der zal 25, den ʒ, vnd also wird 5 in der lenge rationirt mit 5 vniteten, vnd 25 mit 25 superficien, welche jtzlicher jrer lenge ist vnitas vnd in potentia vnitas, vnd das ist der erst punct vom text. Aber nicht wirdt gesagt, das ein jtzlich potentionalische zal sein rationalisch in der lenge, das ist jres radix, sondern allein in potentia. 77 Wann also wir nemen 7 oder 10 vor 1 ʒ, so wissen wir, | das 7 5 vniteten rationiren, die dann potentionaliter auch seind, nicht longitudine, vnd wiewol jr vnitas potentionalis hat eine rationalische lenge, dann sie gebieret den quadraten vnitatem potentionalem, damit sie 7 rationirt, so wirdt solche lenge nicht rationalisch gegen der leng 7 der potentz, wann die lenge von 7 oder radix ist ∫7, so ist die potentionalische vnitet 1 in der lenge rationalisch, die wirdt mit ∫7 nicht communicirt, vnd also sprechen wir, das ein jtzliche zal mag sein rationalis in potentia, aber nicht allwegen in potentia vnd longitudine, vnd also sagt der text erstlich vniuersaliter, das ein jtzliche zal mag longitudine werden potentionaliter rationalisch, aber nicht vmbgekert, dann ein jtzliche potentionalische zal mag werden longitudine nicht rationalisch, sonder allein in potentia wirdt vniuersaliter ein jtzlich zal rationalisch, das ist mit potentionalischen vniteten gemessen vnd gezelt. Damit man aber mag verstehen, jn welcher gestalt die potentionalischen zalen sollen mit den potentionalischen vniteten rationirt werden, so nemen wir 18 vor 1 ʒ, den wir mit 4 vniteten wollen rationiren. So wir jenen mit 4 vniteten rationirn jn longitudine, so khumbt $4\frac{1}{2}$, das weren auch vnitet der lenge. Nun ist 18 1 ʒ, der do 18 potentionalische vnitet hat, also mussen wir auch 4 potentioniren, werden 16, vnd also

auf, noch allein durch einen starken Punkt mit daran befindlichem längeren Zug ∫ bezeichnet. Wie später die Wurzeln mit verschiedenen Exponenten unterschieden werden, wird seiner Zeit auseinandergesetzt werden.

rationiren wir 18 mit 16, khumbt $1\frac{1}{8}$ potentz, das ist $1\frac{1}{8}$ ʒ, | vnd also ist 77′ zu vorstehen, das man lenge mit lenge, das ist radicem mit radice, vnd potentz mit potentz soll rationiren, vnd darumb so wirdt lenge gegen lenge potentionirt rationalisch, vnd potentz gegen potentz auch rationalisch rationirt.

Nun ist not zu wissen, das ein jtzlicher radix in longitudine wirdt rationalisch in potentia durch 8 ductiones pej vns gewonlichen, wann es mag gesprochen werden 1 ℞ in longitudine des quadrats, des cubi, des ʒʒ etc., jnmassen dann die ductiones nach einander volgendt rationalisch. Wann ein jtzliche zal zu extrahirn radicem furgelegt wirdt potentialiter angesehen vnnd gehalten, hat die alſsdann radicem rationalem, so wirdt sie gesprochen in longitudine vnd potentia rationalis, wirdt sie aber erfunden jres radix der duction, von der sie genandt ist, surda vnd nicht eine gantze radicem rationalem hat, so wirdt sie genandt die zal in potentia allein rationalis, vnd also volget von der quadratischen duction, die dann die erste ist vnter den ductionibus der rationalischen zalen, vnd volgt also das ander Capitel.

Capitulum secundum de hauriendis lateribus numerorum rationalium quadratorum.

Omnium rationabilium ductionum hauriendae radicis quadratum, quod primi planiciei rationalis potentia est radicis, crescere quidem habet duabus radicibus duplicatis gnomone[1]*), quae supplementa descripsimus, cum censiculo.* | [2]) 78

Hie eruolget ALGEBRAS von der ersten duction der rationalischen zalen zu sagen, vnnd laut zum deutschen also:

V n t e r a l l e n r a t i o n a l i s c h e n d u c t i o n i b u s d e r s c h o p f e n d e n r a d i x s o i s t d a s q u a d r a t o d e r ʒ d i e e r s t e m a c h t o d e r p o t e n t z d e s r a d i x, d a s i s t d e r z a l e n j n l o n g i t u d i n e, w e l c h e r ʒ o d e r q u a - d r a t w a c h s e n i s t, d a s i s t g e s p r o c h e n, s o e r w e c h s t i n d i e g r o ſs d e r p o t e n t z d e s r a d i c i s, m i t z w e i e n r a d i c i b u s s u p e r f i c i a l i t e r g e f u r t d u r c h d e n g n o m o n, d i e d o s p r e c h e n w e r d e n s u p p l e m e n t a,

1) Der Ausdruck „*duabus radicibus duplicatis gnomone*“ ist so zu verstehen: Nach unserem Verfasser ist ja die erste Potenz, das ist *res*, die zweite Duktion, da er *Dragma* als erste rechnet. Die obigen Worte heissen daher nichts weiter als $2xy$, wenn x die Radix und y den Gnomon bezeichnet. In ähnlicher Weise sind die spätern Ausdrücke *triplicatis, quadruplicatis ... gnomone* aufzufassen, sie bedeuten also multipliciert mit y^2, y^3 u. s. w.

2) Hier lesen alle Manuskripte, mit Ausnahme von *C. 8*, *censicubo* statt *censiculo,* sie kürzen es sogar mit ʒ𝒸ℓ ab. Dass nur *C. 8* recht hat, ist klar.



das ist, damit die quadratur oder der ʒ complirt wirdt, vnd mit dem zensiculo, das ist mit dem gnomone in sich gefurt.

Von solchen text den vorstandt einzufuren, der ettwas kunstlich ist vnd weniger wissent, so nemen wir vor, 15129 zu rationiren in longitudine, wann wir sie potentionaliter gesatzt haben. Nun wissen wir, das ein jtzlicher zens des ersten limits sein potentz vber den dritten limit, das ist vber den Centenarium, nicht strecket, vnd herumb so rationiren wir gemelten numerum mit dem dritten limit centenario, vnd halten allwegen bei jedem Centenario sein station, jnmassen der text saget, vnnd zihen ab 2 radices mit dem zensiculo. Also hat gemelte zal zwen centenarios, vnd 78' hierumb haben wir drei stationes. Wir setzen vnter den letzten Centenario | ein vnitet, wann er nit mehr vormag mit seiner potentz dann vnitatem, vnd ziehen ab die potentz der vnitet, vnd surgit der letzte Centenarius,

15129
110

vnd also haben wir 10 vor radicem gegen dem negsten centenario, die ander station. Nun sagt der text, der quadrat wachse mit 2 radicibus, hierumb zwir 10 ist 20, das wollen wir herabzihen, so offte wir mogen, das mag zwir gesein. Also sprechen wir, das 2 ist der wachsende gnomo, vnd 20 ein supplement. Solchen gnomonem multiplicirn wir mit 20, wirdt 40, das ist *duplicatum,* als der text sagt; solche 40 zihen wir ab von 51 supra caput des andern centenarii, pleiben 11, die setze vber 51. Nun addir den gnomonem 2 zu 10, wirdt 12, vnd multiplicir den gnomonem in sich, wirdt 4, der zensiculus; den zeuch auch von 11, bleiben 7 respectu centenarii.

7
11
15129
112
123

Nun haben wir 12 vor radicem, der wirdt gegen dem Anfang der zalen gerechnet, vor 120, die duplirn wir, wann der text sagt, er wachse mit 2 radicibus; nun zween radices seind 240, die zihen wir ab, so offte wir mogen, vnd das ist dreymal, vnd wirdt also 3 gnomo; den multiplicirn wir mit 240, wirdt 720, die zihen wir ab, vnd multiplicirn 3, gnomonem in sich, wirdt 9, zensiculus, den zihen wir auch ab, vnd surgit. Also gib 79 der dritten station drey, vnd wirdt 123 radix der furgelegten | zalen rationalis in longitudine.[1])

---

1) Wir sehen hier, dass unser Verfasser bei Ausziehung der Quadratwurzel

Vnd solchs wollen wir geometrice ostendiren, damit man mercken mag, das der quadrat wechst mit zweien radicibus, gesprochen supplementa, vnd seinem zensiculo. Wir nemen vnitatem, des letzten centenarium, gegen der gantzen zal des andern Centenarij potentionaliter, vnnd wirdt 100, das ist der quadrat *abcd* (Fig. 11), des radix ist 10 in longitudine, das war vor 1 gegen dem ersten Centenario, aber hie wird es gegen der gantzen zaln gerechnet des andern Centenarii. Nun 2 radices von 10 sein 20, das multiplicirn wir mit dem gnomo *cf*, der 2 in latere hat, wirdt 40, dann 2 mus der gantze gnomo sein gegen der andern station der zwei supplementa.

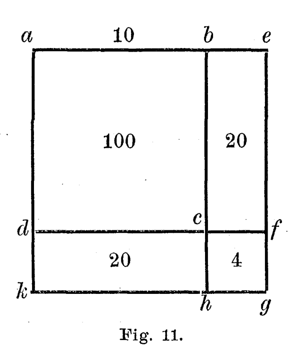


Fig. 11.

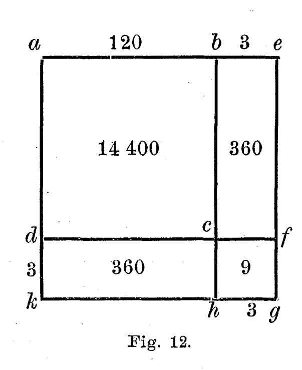


Fig. 12.

Nun ist der gnomo zu erfullen, die quadratur, auch aufsen. Multiplicir 2 auch in sich, wirdt 4, zeuch ab, also haben wir 12 der andern station, das ist der ander erwachsen quadrat vnd *ag*, als 144, angezogen auf der andern station des Centenarij, vnd also haben wir noch einen Centenarium 729. Ruckten wir weither 12, so khomen 120, wann wir sie einer Figur weither geruckt haben, das ist 10, vnd ist der quadrat *ad* (Fig. 12) 14400. Nun facit 2 radices 240, das mussen wir | duplicirn mit 79' dem gnomone 3, khomen 720, das seindt 2 supplementa *bf* vnd *ck*, also ist auch aufsen 9 der zensiculus zu dem complement des quadrates *ag*. So der erfullt wirdt, khumbt das *ae* in longitudine, ist rationalis mit 123 vnitates, vnd ist recht.

Solchs wollen wir dich auch arithmetice demonstrirn. Wir setzen ein zal, die wir dann auch in den andern ductionibus gebrauchen wollen, vnd nemen sie durch zifferes, damit man mag erkhennen, das do radix vnd ʒ

---

noch genau so verfährt wie Regiomontan mit Überwärtsrechnung und Durchstreichung der benutzten Ziffern, nur dass er die Punkte, welche die Hunderte bezeichnen, nicht unter, sondern über die Ziffern setzt. Die Beispiele haben sich nur im Göttinger Manuskripte und in *C. 8* erhalten. *C. 405* und *C. 349* fügen sie nicht hinzu.

vnterschidlich khomen in der multiplication. Sam also, wir multiplicirn wollen 1001, vnd machen hieraus 1 ʒ, furen den in sich selbst, khomen 1002001. Nun ist radix 1001, so nun 1000 wirdt jn sich gefurt, khomen 1000000. Nun ist der mit einer vnitet gewachsen. Nun 2 ℞ von 1000 sein 2000, vnd geb sie zu 100000, khumbt 1002000. Nun multiplicir den gnomonem 1 in sich, khumbt 1, das addir dazu, khumbt 1002001, das ist, so ich 1001 in sich multiplicr, khumbt gemelter quadrat wie oben geschrieben. Wir sprechen deshalben, das der wachsende quadrat zu seiner completur bedorffe zwei supplementa, die wir radices nennen, vnd den gnomonem, damit die quadratur erfullt wirdt, vnnd

1001 radix
ʒ ℞ gnomo
1002001

80 volgt das dritt capitel. |

Capitulum tertium de hauriendis radicibus numerorum cubicorum rationalium.

Cubum vero primum esse, quod solidi corporis mensuram metitur rationalem; tribus namque radicibus triplicatis gnomone, tribusque tetragonis duplicatis crescentiam circumscriptionis cum cubello habet regularem.[1])

Hie cleret Algebras die andere duction der rationalischen zalen, vnd sagt, das der cubus sei an der ordnung die ander duction, aber an jr selbst wirdt die aus dreyen planen Linien oder zalen zusam gefuget, jnmassen dann der quadrat aus zweien, aber an der ordnung der satzung gemelter duction wirdt der cubic, die andere duction, beschrieben, vnd laut zum teutschen also:

Der Cubic ist das erste thail, der do thailt die mensur der solidischen corporn rationalis, welche die wachsung hat der circumscribirung regulistrirt mit dreyen radicibus getriplicirt, mit 3 ʒ geduplicirt durch den gnomonem, mit sampt dem gnomene in sich cubice, genannt dem cubello.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir fur zu rationiren 1860867 in longitudine. So wisse, gleicherweis das der zens sein potentz 80′ des ersten limits nicht strecket | vber centenarium, also streckt auch der Cub sein potentz des ersten limits nicht vber den Milenarium, vnd hierumb rationiren wir gemelte zal durch den Milenarium, vnd halten auch bei yden Milenario ein station, vnd zum letzten im anfang der zalen, vnd thun dann gleicherweis, wie in dem quadrat. Wir suchen in dem letzten millenario die grosten potentz des cubi vnd ist 1, die ziehen wir herab, vnd rucken solche vnitet vnter den ersten milenarium, vnd bedeut 10, vnnd halten die andere station. Nun wechst der cub mit 3 radicibus, das

1) Nach dem oben Gesagten heisst das also:
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

ist 30, vnd mit 3 ʒ von 10, ist 300, die mogen zwir abgezogen werden, vnd also wird 2 gnomo. Nun triplir 10 radices, vnd wird 30, vnd solchs triplir: sprich 2 mal 30 ist 60 vnd 2 mal 60 ist 120, vnd solchs pei der Reststation abgezogen. Nun 3 ʒ von 10 seind 300, solchs duplir auch durch den gnomonem, wirdt 600, die zeuch auch bei der station herab. Darnach fure 2, den gnomonem, cubice, wirdt cubellus 8. Den zeuch auch herab pei der station, vnd restat bei dem ersten Milenario 132.

3
14̸2
1̸8̸6̸0̸867
1̸ 12

Nun rucken wir 12 auch weither biſs zum anfang vnd bedeut 120. Solchen radicem machen wir dreimal, wirdt 360. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die mogen wir dreimal herabzihen, | hierumb wird 3 gnomo. Also triplirn 82 wir durch gnomonem corporaliter 3 radices, das ist 360, khomen 3240, das zichen wir herab. Nun multiplicirn wir superficialiter 3 ʒ auch durch gnomonen khumen 129600, das zichen wir auch herab in der dritten vnd letzten station im anfang der zalen. Also haben wir noch cubellum; multiplicirn 3 cubice, den gnomonem, khomen 27, das zichen wir auch herab; die abgeschrieben zal gehen gantz auf, also sprechen wir, das gemelte zal in longitudine wird gerationirt mit 123 vniteten.

Solchs wollen wir demonstriren in der vorgesatzten zal, vnd nemen vor vns 1000 in vnitate pro radice. Also were der Cubic dauon 1000000000. Solcher Cubic soll wachsen in vnitate. Nun erwechst der mit 3 radicibus, das wern 3000, solchs addirn wir zu 1000000000; wir nemen nun 3 ʒ von 1000, werden 3000000, das addirn wir auch sampt dem gnomone, wirdet 100300 3001, vnd das ist der Cubic von 1001, welcher gewachsen ist in vnitate.

1001 𝓇
c𝓁 ʒ 𝓇 gnomo
100 300 300 1 .

Solchs wollen wir auch demonstriren in continuis. Wir haben gesagt erstlich die zal 1860867, vnd haben sie rationirt mit zweien Millenarien, welches ersten potentz ist gewesen vnitas, die dann gegen den andern Millenario ist 10, das sei der Cubic *ay* (Fig. 13), welches latus ist *ak* 10, vnd sein potentz 1000. Nun sol | er wachsen mit 2 vniteten, jnmassen 82′ erstlich angezaigt, in der andern station, das wirdt der gnomo *ec*. Nun wechst er mit 3 radicibus *eb* vnd *de* vnd *qp*, das sind 30, vnd solche drei supplementa sollen wir solidiren mit dem gnomo 2, vnd werden 120, souil sind die supplementa solida. Noch seind 3 ʒ, damit er wechst, der erste *af* oder auch *bg*, der dritt *gd*. Nun 1 ʒ von 10 seind 100, das weren 300, die sollen auch solidirt werden durch den gnomonem 2, vnd werden 600. Noch

ist gebrechen der Cubellus 2, der mus auch solidirt werden *ec*, wirdt 8, vnd das alle seind crescentz des Cubs. Das addire, als 1000, des radix were 10, vnnd darnach 120, das weren 3 radices, vnd 600, das weren 3 ʒ, vnd 8, das was der cubellus, werden 1728. Alsouil ist der gantz cubus *ag*, des radix ist 12, wann 10 der erst vnd 2, damit er gewachsen ist, das

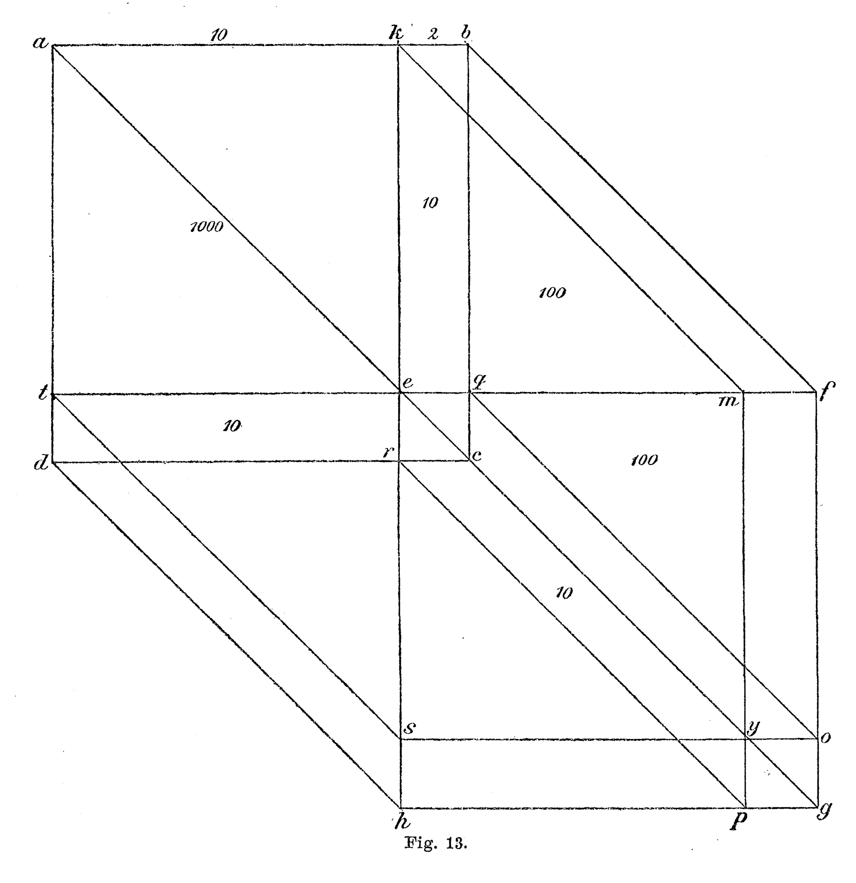


Fig. 13.

wirdt 12. Souil ist der cubus bei der andern station der furgelegten zalen herabgezogen. Solche 12 ist gegen der ersten figuren der furgelegten zal nach Ordnung der figuren, die bedeuten 120; die cubir wir, facit 1728000. Der cubus sey *ay*, als wie vor. Nun ist vor angezaigt, das er mit 3 vniteten
83 wachsen soll bey der letzten station, | das wirdt der gnomo. Nun wechst er mit 3 radicibus *ab*, *de* vnd *qp*, das seind 360, die sollen wir solidiren wie vor, khumen ⟨3240⟩. Nun 3 ʒ von 120 seind 43200, die gemelten *af*, *bg* vnd *dg*. Noch ist gebrechendt der cubellus 3, ist 27, das addire alles zusamen, vnd khumbt *ag* der gantze Cubus 1860867, vnd ist recht, vnnd probirt.

Capitulum quartum de hauriendis radicibus vel lateribus numerorum rationabilium quadratorum de quadratis.

Census de censo radicem radicis gerens tetragonicam ipse quidem complectitur quatuor cubis duplicatis gnomone, sex censibus triplicatis, quatuor radicibus quadruplicatis cum gnomonico parallelogrammo circa diametrum, inalterabilem quandam circumscriptionem crescentiae habet rationalem.[1])

Hie zeiget Algebras die dritte duction genant zensus de zenso vnd laut der text zum teutschen also:

C e n s u s d e c e n s u i s t e i n d u c t i o n b e g e r e n d e d e r v o r g e l e g t e n z a l n ⟨radicem⟩ d e s r a d i c i s q u a d r a t i s c h g e f u r t, w e l c h e d u c t i o n w i r d t v m b g e b e n m i t 4 c u b e n d u p l i c i r t m i t d e m g n o m o n e, m i t 6 ʒ g e t r i p l i c i r t, m i t 4 r a d i c i b u s q u a d r u p l i c i r t, v n d m i t d e m g n o m o n e g e f u r t d e r d u c t i o n g e m e s, p e y d e m d i a m e t r o | g e s a t z t, d u r c h 83′ w e l c h e d u c t i o n a l s o z e n s d e z e n s v n v o r w a n d e l i g v m b g e s c h r i e b e n w i r d t r a t i o n a l i s c h e r e r w a c h s u n g.

Solchen text vorstentlichen einzufuren, nemen wir vor zu rationiren 228886641 in longitudine. haben wir gesagt, das der Cubic des ersten limits sein potentz nicht strecke vber dem Millenarium, also streckt auch ʒʒ sein macht nicht vber decem millenarium, sonder darunter. Hierumb so rationiren wir die obgemelten zalen mit 5 figuren, vnd halten aber in gemelter form pej jtzlichem zehntausent ein station, als wir jn Cubic gar eigentlich zu vorstehen geben haben. Wir suchen zu dem letzten limit die grosten potentz der duction, die dann mag 1 sein, vnd zihen die ab, vnd rucken solchen vnitet vnter den nechsten distinguirten limit, vnd bedeut 10, jnmassen im Cubic.

1̸ 152
2̸̇28̸8̸8̸̇6641̇
1̸   10

Nun ist die duction wachsende mit 4 cubis. So cubir wir 10, khomen 1000, das ist 4000, vnd 6 ʒ von 10 seind 600, vnd 4 radices seind 40. Solchs addirn wir zusamen, facit 4640, die rucken wir in gemelter zaln 12888, das mag zweimal gesein, vnd also wirdt der wachsende gnomo 2, wie in dem cubic. Nun duplirn wir die 4 ȼ, das ist 4000, facit 4000, vnd triplicir die 6 ʒ, das sein 600, khomen 2400, vnd quadruplicir | 4 ℞, 84 das seindt 40, werden 320: solchs addir alles zusamen, facit 10720; das subtrahir pey der station gehalten des geruckten Limit von der zaln mit sampt dem gnomone 2 in sich gefurt der duction gemes, werden 16, vnd

1) Das heisst: $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$.

restat vom limit. anzurechnen 21526641, vnd haben also der station gehalten vnd ausgericht. Nun rucken wir die 10 mit dem gnomone, das ist 12, zu dem anfang der zalen, die do seindt bedeutent 120, die werden also genomen vor die radices.

1 152
228886641
1 120

Nun machen wir 4 cubic von 120, seindt 6912000, vnd 6 ʒ von 120, seind 86400, vnd 4 ℞ seind 480: solchs addirn wir alles zusamen, facit 699880. Besihe, wie offte man solche zal mag abzihen von ehegesetzten zaln 21526641, das mugen wir dreimal nemen, vnd also sprechen wir wie vor, das drei wirdet der gnomo. Darumb duplicire die 4 c mit dem gnomone, werden 20736000, vnd 6 ʒ, das seind 86400, die triplicir mit dem gnomone, werden 777600, vnd 4 ℞, das seind 480, die quadrupliciren wir, machen 12960. Solchs addir alles zusamen, werden 21526560. Solchs subtrahir von eegemelten zalen, vnd pleiben 81, vnd so du den gnomonem in sich furest nach laut der duction, so khumbt 81, vnd gehet die ehegemelte zal gantz auf, vnd also sprechen wir, das dj gemelte zal ist ʒʒ, 84′ vnd sein radix ist 123, vnd desgleichen machstu thun jn andern. |

Vff das wir aber dem text genug thun, jnmassen sich zu demonstriren gepurt, nemen wir die anfengklichen zalen jm quadrat vnd cub genomem.

c ʒ ℞ gnomo
Also sprechen wir, das 1003003001 sei der cubic des radix 1001. Solchen radicem furen wir in den cub, wirdt naturlich daraus ʒʒ. Nun sehen wir in dem Cubo, das die letzte vnitet ist der cubic von 1001, darnach 3 seind 3 ʒ, vnd darnach wieder 3 seind 3 ℞, vnd die letzte figur vnitas ist der gnomo. So wir nun gemelten cubo haben pracht jn ʒʒ, der dann ist wie hie:

ʒʒ c ʒ ℞ gnomo
1004006004001 ,

sprechen wir obgemelter massen, das die letzte vnitet in der zalen triplicibus ist der ʒʒ von 1000, vnd 4 ist 4 c duplicati von 1001, vnd 6 seind 6 ʒ triplati von 1001, vnd die letzten 4 seind 4 ℞ quadruplati von 1001, vnd die letzte vnitet ist gewesen der wachsende gnomo. Vnd also sihest du eigentlich, so jee weither der duction ist so extendirt, so offte sich mehr manigfaltigen die ℞ etc., vnd also magstu dich in allen zalen halten. Gehet aber die zal nicht gar auf mit der duction, so hastu gefunden den grosten radix, vnd residuum magstu darnach mit einer gelehenten zaln resoluirn, jnmassen du in nachuolgenden Capiteln horen wirst, wie man die residua 85 sol | gebrauchen. Nun volget von den sursoliden, wie man da radicem

suchen soll, nicht quadratam, nicht cubicam, nicht censodecensicam, sonder jn welcher duction es aus ist gangen von dem rationalischen radice, der do ist gewachsen durch die multiplicirung in rationalisch satzung.

Capitulum quintum de radicibus hauriendis numerorum sursolidorum loco quidem ductionis rationalis quinto.

Sursolidum autem ampliorem cumulum soliditatis gerit, quinque censuum de censu duplicatis, decem cubis triplicatis, decemque censibus quadruplicatis, quinque radicibus quintuplicatis cum gnomone circumscribitur.[1])

Hie eroffnet vns ALGEBRAS seine vierte duction an der funfften stadt gesatzt, welcher text zum teutschen also lautet:

Sursolidum also genandt, das ist ein ungeregularisch corpus, ist begern eine grossere solidische heufung dann die fordern ductiones. Wann das genandt sursolidum wirdt vmbschrieben mit 5 ℨℨ geduplicirt, mit 10 𝒸𝓁 getriplicirt, nach formirung der corporum, mit 10 ziensen quadruplicirt vnd mit 5 radicibus quintuplicirt, mit dem gnomo der duction gemes gefurdt. | 85

Welchen text besser zu ercleren, wollen wir vornemen den sursolidischen radicem zu extrahiren vnd rationiren jn longitudine. Sam also, wir setzen wollen zu rationiren die zal 716703146875. So mercken wir, das wir jn mit dem sechsten limit distinguiren mussen, das ist mit 100000, wann 9 der digitus in dise duction gefurt wirdt, extendirt sich nicht vber gemelten limit, sonder vorbleibtt darunter. Wir signiren vnd suchen vnter dem letzten gedistinguirten limit, als vnter 71, was das groste sursolidum moge sein; finden wir, das 2 der radix des grossten ß. So wir das herabzihen, als 32, pleiben 396703146875. Solche 2 jetzt gefunden rucken wir zum andern distinguirten Limit, vnd bedeut 20, jnmassen vorhin offt angezaigt. Solche 20 nemen wir vor radicem, vnd wollen suchen den wachsenden gnomonem. Nun sagt der text, das sursolidum wachse mit 5 ℨℨ, die mache aus 20, werden 800000, mit 10 𝒸𝓁 von 20, seind 80000, mit 10 zensibus von 20, seind 4000, vnd mit 5 radicibus von 20, seind 100. Solche addir alle zusamen, werden 884100. Dise zal suche in vorgelegter zal wie offte, mag 3 mal gesein vnd nicht mehr, vnd wirdt der gnomo, damit das sursolidum wachsen solle.

3
49
716703146875
2 20

1) Das bedeutet: $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$.

Nun duplicirn wir die 5 ʒʒ, das seind 800000, vnd werden geduplirt mit dem gnomone 3, vnd khomen 2400000; nun triplicirn wir die 10 𝔠 mit gemeltem gnomone 3, khomen 720000; nun quadruplicir die 10 ʒ auch 86 mit dem gnomone | 3, khomen 108000; quintuplicir 5 radices, die do seind 100, auch mit dem gnomone 3, khomen 8100, vnd fure den gnomonem der duction gemes, wird 243, vnd addir solchs alles zusamen, khumbt 3236343. Das nim von der zalen, die dann vorgelegt ist worden, vnd restat 73068846875. Vnd nun rucken wir 20 vnd den gnomonem 3, das ist 23, zu der ersten figur vnd halten alda die letzte station, vnd ist bedeuten 230. Solche zal nemen wir vor den radicem vnd sagen nachdem die duction wachsen ist mit 5 ʒʒ etc. Darumb machen wir 5 ʒʒ von 230, ist 13992050000; nun 10 cubi von 230 seind 121670000; suchen wir 10 ʒ von 230, khumen 529000; nun 5 𝓇 von 230 seind 1150: solchs addirn wir alles zusamen, khumbt 1414250150. Solche zal suche in den gemelten restanten von egemelter zal vorgelegt ist, das ist in 73068846875, vnd das mag 5 mal gesein. Also sprechen wir, das der gnomo ist 5, damit die sursolitet wachsen.

37
4930688
7167031146875
2 20 230

Nun duplicir die 5 ʒʒ mit dem gnomo 5, werden 69960250000, vnd das seind 5 geduplicirt ʒʒ. Nun sollen wir die 10 cubos, das seind 121670000 triplicirn, das ist mit 5 mal 5, als 25, multiplicirn, werden 3041750000. Sagt der text, der ß wachse mit 10 ʒ quadruplicirt. Nun quadruplicirn wir 10 ʒ, als 529000 mit 5, vnd werden 66125000. Noch wechst der ß mit 5 𝓇 quintuplicirt mit dem gnomone; nemen wir 5 𝓇, die seind 1150, 86′ die quintuplicirn wir, | werden 718750. Solchs alles addirn wir zusamen, vnd werden alle vmbgeschrieben supplement gesamelt 73068843750. Solchen ziehen wir von obgeschribener zal an negster station vberplieben, vnd pleibt 3125, vnd das ist der gnomo von 5 der duction gemes gefurt, vnd geht die zal gantz auf vnd ist ein sursolitet, des radix ist 235.

Solchs dich zu berichten, das sursolitet wechst mit ehgenanten circumscriptibilia, so nemen wir vor die zal in ʒʒ vorgenomen

ʒʒ 𝔠 ʒ 𝓇 gnomo
1 004 006 004 001 ,

vnd multiplicirn solche mit dem 𝓇 1001, so erwechst der ß. Wir multiplicirn, khomen

ß ʒʒ 𝔠 ʒ 𝓇 gnomo
1 005 010 010 005 001 ,

also findestu in ehgemelter zaln, das die letzie vnitet ist sursolidum, die ander 5 ȝȝ, die dritte 10 cꝭ, die vierdte 10 z, die funffte 5 radices vnd die erste vnitet ist der gnomo, vnd so offt dann die duction gehet, so oft manigfeltigen sich die ꝶ, ȝ, cꝭ vnd ȝȝ. Vnd desgleichen magstu in andern zalen extrahirn radicem sursolidam, wie wol er weder quadrat noch cubic, noch quadrat von quadrat nicht ist, doch bezaiget er seinen radicem nach ordnung der duction, wie offte dje multiplication ist ausgangen von der ersten ꝶ. Nun volget von dem zensicubo das sechste Capitel.

Capitulum sextum de hauriendis lateribus numerorum censicuborum loco, quo situantur rationales quidem ductiones, | 87

Censicubus autem crescit sex sursolidis duplicatis, quindecim censibus de censu triplicatis, viginti cꝭ quaternatis, quindecim censibus quintuplatis et sex radicibus sexcuplatis cum gnomico parallelogrammo.[1])

Hie eroffnet Algebras seine funffte duction an der sechsten stadt gesatzt, den radix auszuzihen, welcher text zum teutschen also laut.

Zensicubus (gesagt ein zins des cubi, als 2 ist radix von 64 in dem zensicubo, also ist von 2 der zens 4, von welchen 4 ist 64 der cꝭ, vnd wirdt gesagt herumb zensicubus), welcher wachsen ist mit 6 sursolidis geduplicirt, mit 15 ȝȝ getriplicirt, mit 20 cꝭ quadruplicirt, mit 15 ȝ quintuplicirt, vnd mit 6 ꝶ sextuplicirt mit sampt dem gnomone, das ist ein winckelhacken, zu erfullen die quadratur.

Von solcher rationalischen duction ist zu extrahiren der radix, jnmassen wie vorgesagt ist, wie wol nicht not were, von diser duction zu setzen ein sonderliche rationirung, wann radix cubica von einer zal vnd alſsdann radix quadrata derselbigen radix cubica beweist radicem; ȝcꝭ ist deshalben also sein nam ausstrecken. Aber vff das wir der angefangen ordnung der duction halten mogen, wollen wir setzen zu rationiren in longitudine 1723ṡ86027ṡ80396096̇. Nun haben wir die negste duction distinguirt mit 6, | das ist mit 100000, so mussen wir nach ordnunge solche zalen distinguiren mit 1000000, das seind 7 figuren, vnd heben an vnter dem letzten limit, vnd ziehen herab dic groſse potentz des ȝcꝭ, das ist der ȝcꝭ von 7, der ist 117649, pleiben biſs auf den limit 50709 etc., solchen septenarium rucken wir zu dem negsten gesatzten vierten limit, vnd ist bedeuten 70, jnmassen in den vorigen ductionibus gesatzt ist. Saget der text aigent- 87′

1) Nämlich:

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$

8152
545071126
65719248604
172358602780396096
7 70 740
4

lich, der ʒcℓ wachse mit 6 ß geduplicirt, suchen wir also 6 ß von 70, die seindt 10084200000; suchen wir 15 ʒʒ von 70, seind 360150000; wir suchen 20 cℓ, jnmassen der text sagt, die seindt 6860000; suchen wir 15 ʒ von 70, die seindt 73500; wir suchen 6 ꝛ, seind 420. Solche circumscriptibilia sollen wir zusamenn addirn, werden 10450283920. Solche zal such in obgemelter restanten vorgelegter zal vberpliben vom anfang des limits zu rechnen, do wir haben die station gehalten, das mag nicht 5 mal sein, sondern viermal, das magstu wol versuchen. Nun sagt der text mit 6 sursoliden wachse der ʒcℓ, die dann seind 10084200000, die sollen wir mit dem gemelten gnomone 4 gefunden duplicirn, werden 40336800000. Nun sollen wir die 15 ʒʒ gefunden, die do seind 360150000, triplicirn mit dem gnomone 4, werden 5762400000. Nun quadruplicirn wir die 20 gefunden cℓ, die waren 6860000 auch mit 88 gemelten | gnomone 4, werden 439040000. Wir quintuplicirn die 15 ʒ, die waren 73500, auch mit gemeltem gnomone 4, vnd werden 18816000. Noch haben wir 6 ꝛ zu sextuplicirn. Nun 6 ꝛ von 70 die machen 420, sextuplicirn wir mit dem gnomone 4, werden 430080. Solche zaln der circumscriptibilia addir alle zusamen, werden 46557886080, die zeuch vom vberplibenen restanten in vorgelegter zaln, vnd pleiben von der station 8152116700 etc. Noch haben wir den gnomonem 4 auch zu furen der duction gemes, der dann macht 4096; die zeuch auch herab bei der station, vnd pleiben 8152112604 etc., vnd also haben wir dise station ausgericht. Nun rucken wir jn fort zu der ersten figur, das ist 70 vnd 4, seind 74, vnd werden bedeuten 740 gegen der ersten, jnmassen in den andern ductionibus, vnd werden aber genomen vor den radix. Nun suchen wir aber die circumscriptibilia von 740, den radix, so finden wir, das sechs sursolida von 740 seind 1331403974400000, wann, so wir solchen wollen suchen, so multiplicirn wir 740, den radix, piſs in sursolidum, vnd nemen das 6 mal, also auch die gemelten andern circumscriptibilia. Wir nemen 15 ʒʒ von 740, die seindt 4497986400000, wann 1 ʒ ist 299865760000, dauon seind leicht die circumscriptibilia zu machen. Nun suchen wir, was 20 cℓ machen von 740, nun ist 1 cℓ 405224000, das multiplicirn wir mit 20, das seind 8104480000. Nun suchen wir 15 ʒ von 740, die seind 8214000, wann 1 ʒ ist 547600. Nun suchen wir zuletzt 6 ꝛ von 740, das seind 4440. Solche supplementa alle addirn wir zusamen, damit der 88′ ʒcℓ ist wachsen, | werden zusamen gesummirt 1335910073498440. Solche zal such im vberplieben restant; das mag nicht mehr dann 6 mal gesein, jnmassen man den quotient jn einer diuision nemen soll, vnd solche 6 wirdt

der gnomo. Sagt der text die 6 ß sollen mit dem gnomone duplicirt werden. Hierumb duplicir die ß, werden 7988423846400000; nun triplicirn wir die obgemelten ʒʒ durch den gnomonem, werden 161927510400000; nun quadruplicir die 20 cͤ mit dem gnomone 6, werden 1950567680000; nun quintuplicir die 15 ʒ, werden 10645344000; nun sextuplicirn wir die 6 radices, werden 34525440: solchs addir alles zusamenn, wirdt 8152112604393096 mit sampt dem gnomone 6 der duction gemes gefurt, vnd geht gantz auff die ehgemelte zal; das magstu probirn, wie in der sursolitet gesagt ist.

Capitulum septimum de hauriendis lateribus numerorum bissursolidorum loco ductionis, quo situantur, rationalis quidem dicti.

Bissursolidum autem continuum quoddam ductuum adiutum capit septem censicuborum duplicatorum, vigintiuno sursolidorum triplicatorum, triginta quinque censuum de censu quadruplicatorum, triginta quinque cuborum quintuplicatorum, viginti uno censuum sextuplicatorum, septemque radicum septuplicatarum cum gnomunculo, quo situ multiplicatio ab initio ordinis processerat, tot multiplicis ductionis subsumuntur crescentia circumscriptibilia diametro. | [1]) 89

Hie saget ALGEBRAS vom Bissursoliden, welche duction an der siebenden stat gesatzt vom ꝝ aus vnd nach ordnung, so ist der Bissursolitet die sechste duction, welche duction nach dem text laut zum teutschen also:

Das Bissursolidum, das ist ein hangende duction der andern, welche erfullung nimet mit 7 ʒcͤ, mit 21 ß, mit 35 ʒʒ, mit 35 cͤ, mit 21 ʒ, mit 7 ꝝ vnd mit dem gnomone der duction gemes, doch dermassen, an welcher stadt die multiplication vom anfang hat ausgangen, souil werden gemanigfaltigt die circumscriptibilia durch den gnomonem. Als die duction ist an der 7den stadt aufsgangen von dem radix, darumb werden die ꝝ geseptuplirt durch den gnonomem; von dem ʒ ist sie aufsgangen an der sechsten stadt, darumb werden die ʒ gesextuplirt; sie ist aufsgangen von cͤ an der funfften stadt, darumb wirdt der cub quintuplicirt durch den gnomonem; sie ist geruckt von ʒʒ an der vierdten stadt, darumb werden die ʒʒ qudruplicirt; sie ist gewandert von ß an der dritten stadt, darumb werden die sursolidi getriplicirt durch den gnomonem; sie hat gewandert an die andere stadt vom ʒcͤ, deshalb werden die ʒcͤ geduplicirt durch den gnomonem, vnnd also ist

1) Das heisst:

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7.$$

Von hier an führt der Bearbeiter die Wurzelausziehung nicht mehr durch, sondern zeigt, dass, wenn die Zahl wächst, die Potenz die angegebene Formel erfüllt.

es fort zu vorstehen in der nachuolgenden duction allermas, wie wir jtzo erclert haben von dem circumscriptibilibus.

89′ Vff das abber gehalten werd ein ordnung vorgesatzter | duction, so wollen wir rationiren ein zal in longitudine wachsende der duction gemes. Wir setzen nach ordnung der proportionalischen satzung, das 128 ist ein biß in potentia, des radix ist 2 in longitudine. Nun wollen wir setzen, das gemelter biß sol wachsen mit dem gnomone 3, also das er in 5 mochte khumen, zu probirn vnd zu erforschen, ob der gemelte biß wachse, jnmassen wie der text sagt, mit seinen circumscriptibilibus angezaiget. Nun hat 128 pro radice 2 in longitudine, sagt der text die duction wachse erstlich mit 7 ʒcϵ; nun ist ʒcϵ von 2 64, das machet 7 mal, facit 448; das duplicirn wir mit dem gemelten gnomone 3, facit 1344. Nun sagt der text weiter, die duction wachse mit 21 ß, nun 1 ß von 2 ist 32, der machen 21 gleich 672, die triplicirn wir mit dem gnomone 3, werden 6048. Nun wechst die duction weiter mit 35 ʒʒ, so ist 1 ʒʒ von 2 16, das machen wir funfundreißig mal, macht 560, die sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 3, werden 15120. Sagt der text, die duction strecke sich auch mit 35 cϵ. Nun ist 1 cϵ von 2 8, der machen 35 wie hie 280, das mussen wir quintuplicirn mit 3, facit 22680. So wechst auch die duction mit 21 ʒ. Nun ist 1 ʒ 4, vnd der 21 machen 84, die sechstuplirn wir, facit 20412. Noch hat er zu wachsen mit 7 ϱ. Nun ist 1 ϱ 2, der 7 machen 14, die septuplirn wir mit dem gnomone 3, vnd khumen 10206, Noch ist gebrechent der quadratur, der gnomo 3, der soll der duction gemes gefurt
90 werden, sein | 2187, vnd das seind alle circumscriptibilia des gemelten biß. Die addirn wir alle zusamen, machen 78125, vnd das ist der biß von 5. Wann, so 5 der duction gehorig gefurt wirdt, khomen 78125. Vnd also magstu alle zaln extrahirn, von welchen du dann haben wilt den radix biß, welcher clerlichen in den vordern ductionibus ausgedruckt ist. Wann alle extraction der ductionum seind einformig, als du dann jm quadrat erstlich vnd andermals jm cub, vnd nachuolgendt anderweise mit den stationibus erfunden hast nach ausweisung der duction mit jren circumscriptibilibus, hierumb die grossen vormieden plieb. Vff das dem leser, vnd der solche sachen erfarn will, nicht verdrossen werde, die grosse der zaln zu multiplicirn, habe ich gedacht, solche erwachsung jn cleinern zaln zu eroffnen, dich in grossen, gleicherweise jn den vorigen zu halten wissen. Wie du aber sollt erfarung haben, aus was vrsachen die gemelte duction mit eegemelten circumscriptibilibus ist wachsen vnd nicht mit den andern minder oder mehr, haben wir die letzlich jm quadrat, cubic vnd ʒʒ jn numeris zu demonstriren eroffnet ein zal, welche, so du sie jn dise duction furst, findestu aigentlich jn simpler multiplication alle wachsende vmbstende

diser duction, welche zal von erster duction biſs zu letzter gleichmessig gefurt das letzte Capitel der ductionum dich berichten wirdt. 90′

Capitulum octavum de hauriendis lateribus numerorum census censui de censu loco ductionis rationalis dicti.

Census vero censui de censu crescentiam circumscriptionis suscipit octo bissursolidis duplicatis, viginti octo censicubis triplicatis, quinquaginta sex sursolidis quadruplicatis, septuaginta censibus de censu quintuplicatis, quinquaginta sex cubis sextuplicatis, viginti octo censibus septuplicatis, quoque octo radicibus octuplicatis, cum gnomonico circumscriptibili complemento.[1])

Hie saget vns Algebras von dem ʒʒʒ, vnd ist nach ordnung die siebende duction. Sie wirdt aber an der achten stadt von dem 𝔯 ausgehen, welcher text laut zum teutschen also:

Zensus zensui de zensu nimet die wachsung der vmbschreibungen supplementa mit 8 bissursolidis geduplicirt, mit 28 ʒcℓ getriplicirt, mit 56 sursolidis quadruplicirt, mit 70 ʒʒ quintuplicirt, mit 56 cℓ sextuplicirt, mit 28 ʒ septuplicirt, vnd mit 8 cℓ octuplicirt, mit sampt der gnomonischen erfullung der vmbschreibung der duction gemes gefurt.

Vff das die ordnung gehalten werde, jnmassen jn vorgesatzten ductionibus, wollen wir diser duction extraction auch eroffnen, wiewol nicht not ist, die zu setzen, dann sie mag mit dem radice quadrata volfurt werden. Von ordnung vnd fundament wegen, darzu | wir sie gebrauchen werden, wollen 91 wir setzen ein cleine zal zuvor wachseu. Wir nemen 1256, der text begerende ʒʒʒ, des 𝔯 2 sol vnd ist, der sol wachsen mit 3. Saget der text der ʒʒʒ sol wachsen mit 8 biß. Nun ist 1 biß 128, das nemen wir 8 mal, facit 1024, das sollen wir duplicirn mit dem gnomone 3, jnmassen vorgesagt ist, wirdt 3072, wann der ʒʒʒ hat ausgeruckt an die andere stadt fur den biß, darumb multiplicir den mit dem gnomone. Saget der text der ʒʒʒ sey wachsende mit 28 ʒcℓ getriplicirt. Nun ist 1 ʒcℓ 64, den mach 28 mal, facit 1792, das sollen wir triplicirn mit dem gnomone 3, facit 16128. Nun wechset er weither mit 56 ß quadruplicirt. Nun ist ein sursolidum 32, das sollen wir 56 mal machen, facit 1792; das sollen wir mit dem gnomone 3 quadruplicirn, facit 48384. Er wachst auch mit 70 ʒʒ. Nun ist 1 ʒʒ 16, das machen wir 70 mal, facit 1120, das sollen wir quintuplicirn mit dem gnomone 3, facit 90720. Er wachset fort mit 56 𝔖ℓ gesextuplicirt. Nun

---

1) Das heisst:
$$(x+y)^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8.$$



ist 1 cꝭ 8 von 2, das machen wir 56 mal, facit 448; das sollen wir mit dem gnomone 3 sesduplicirn, facit 108864. Er wechset furter mit 28 ʒ septuplicirt. Nun ist 1 ʒ 4, das machen wir 28 mal, facit 112, das mussen wir mit dem gnomone septuplicirn, wirdt 81648. Er wechst auch zuletzt mit 8 𝔯 geoctuplicirt. Nun ist 1 𝔯 von obgemelten ʒʒʒ 2, vnd das achtmal genomen facit 16; das sollen wir octuplicirn mit dem gnomone 3, 91′ facit 34992. Noch hat | die quadratur erfullung mit dem gnomone der duction gemes gefurt. Hierumb multiplicire den gnomonem so lang biſs in die duction ʒʒʒ khomet, facit 6561. Solche circumscriptibilia sollen wir alle zusamen addiren, khomen 390625, vnd ist das der ʒʒʒ von 5, wann wir eigentlich gesagt heben, das 256, des radix 2 ist, solle wachsen mit 3, das wirdt 5 jn der Crescentz, vnd hierumb ist zu vormercken, wie er hat gewachsen, also ist er auch zu extrahirn aller form zu behalten, als wir dann im Cubic vnd quadrat gar grundlich eroffent haben. Warumb wir aber dise angezeigte ductiones so weit strecken vnd gestreckt haben, werden wir befinden, so wir werden von den solidischen equationibus sagen vnser Gebra vnd Almuchabola. Denn, als wir vormals vermeldung gethun haben, wie der cubic vnd andere auch der solidischen Equation seind, so ist die ordnung vnter der proportionalischen satzunge, das die do sollen eingehen jn die Aporismata oder Equationes, sollen nach ordnung fallen der gesatzten ordnunge, so es geschicht durch ein ordentlichen saltum. Als mogen wir wol setzen, das do 𝔑 + ʒ + cꝭ werden vorgleicht 𝔯, oder so wir setzen cꝭ vnd 𝔑 werden vorgleicht 𝔯 vnd ʒ, oder so wir setzen cꝭ vnd 𝔯 werden 92 vorgleichtt | ʒ + 𝔑, vnd der one zal. Hierumb zu seiner zeit dieselbigen mit den vorgesatzten durch besondere vnd behende wege mit den ductionibus der Equation der soliden vnd planen zu bringen, haben wir gedacht, dise ductiones also zu vorfuren, vff das wir haben mogen einen eingang, von dem wir dapfer sagen werden, wie ein jtzliche vorgleichung jn vnser Gebra vnd Almuchabola gebraucht soll werden.[1]) Nun volget zu sagen von der letzten duction ccꝭ.

---

1) Hier sagt der Bearbeiter klipp und klar, er wolle an späterer Stelle zeigen, wie man Gleichungen lösen könne von der Form $a + bx^2 + cx^3 = dx$, oder $cx^3 + a = dx + bx^2$, oder $cx^3 + dx = bx^2 + a$. Wir haben schon oben S. 490 auf diese Stelle aufmerksam gemacht. Sollte der Verfasser wirklich diese Lösung besessen haben, und zwar aus arabischer Quelle? Denn Cardano's *Ars magna* erschien doch erst im Jahre 1545, das heisst in demjenigen, in welchem die Göttinger Handschrift angefangen wurde, und diese ist, wie ich schon oben agte, unter keinen Umständen die Originalhandschrift.

Capitulum nonum de hauriendis lateribus numerorum cuborum de cubo rationalium.

Cubus de cubo, qui statu decimi limitis ponitur, nec consueta ultra progressionem eius numerositate sit transductio, quoniam in infinitum protenderetur multitudo proportionalis descripti ordinis, ipse quidem complectitur novem ʒʒʒ duplicatis triginta sex bissursolidis triplicatis, octoginta quatuor censicubis quadruplicatis, centum quidem viginti sex sursolidis quintuplicatis, et centum viginti sex censibus de censu sextuplicatis, octuaginta quatuor cubis septuplicatis triginta sex censibus octuplicatis, novemque radicibus nonetuplatis, cum cubiculo de cubo gnomonico complemento.[1])

Hie saget Algebras von seiner letzten duction, cubus de cubo genant, vnd wirdt gesatzt an der achten duction, sie ist aber von dem 𝓇 an der neundten stadt ausgangen, vnd laut gemelter text zum teutschen also: 92′

Cubus de cubo, der do wirdt gesatzt pei dem Ende des zehenden Limits, wann 9 der letzte Limit ist pei zehen. Es ist auch nicht gewonlich, das die vbertrettung geschehe vber gemelte zal des cubi de cubo der gemelten duction, wann die zal der proportionalischen satzunge wirdt gestreckt mit angehengter multiplication pifs an ende. Er wirdt umbgeben mit 9 ʒʒʒ zu wachsenn geduplicirt, mit 36 biß getriplicirt, mit 84 ʒcℭ quadruplicirt, mit 126 ß quintuplicirt, vnd mit souil ʒʒ gesestuplicirt, mit 84 cℭ septuplicirt, mit 36 ʒ octuplicirt, mit 9 radicibus nonuplicirt vnd mit dem wachsenden gnomo der duction gemes gefurt, welcher erfullung ist der quadratur.

Von diser duction die ordnunge zu halten, jnmassen wir vorgethun haben, nemen wir vor ein zal 512, welcher radic ccℭ ist 2, die sollen wachsen mit dem gnomone 2, also das der wachsende ccℭ in 4 khome, vnnd wie du hier jnnen thust, also magstu den extrahirn, als du im cubic vnd quadrat grundtlich vnterricht bist, welche weyse vorendert jn allen ductionen gehalten wirdt. Der text sagt, der ccℭ wachse mit 9 ʒʒʒ. Nun ist 1 ʒʒʒ von 2, 256, die sollen wir machen 9 mal, facit 2304; das sollen wir mit dem gnomone duplicirn, das ist mit 2, wirdt 4608, | das ist das 93 erste circumscriptibile. Sagt der text furter, er wachse mit 36 biß. Nun ist 1 biß von 512, des 𝓇 ist 2, das ist 128, das mache 36 mal, facit 4608; das sollen wir mit dem gnomone triplicirn, werden 18432. Nun wechst

---

Das heisst endlich:

$$(x+y)^9 = x^9 + 9x^8y + 36x^7y^2 + 84x^6y^3 + 126x^5y^4 + 126x^4y^5 + 84x^3y^6 + 36x^2y^7 + 9xy^8 + y^9.$$

er furter mit 84 ʒcℓ. Nun ist 1 ʒcℓ von 2, der 𝔯ccℓ von 512, das ist 64, das wollen wir machen 84 mal, facit 5376; das sollen wir quadruplicirn mit dem gnomone 2, werden 43008. Sagt der text weither, der ccℓ wachse mit 126 ß quintuplicirt. Nun ist 1 ß von 2, dem radix, 32, das sollen wir 126 mal nemen, wirdt 4032; das sollen wir mit dem gnomone 2 quintuplicirn, facit 64512. Sagt der text furter der cubus de cubo wachse mit 126 ʒʒ. Nun ist 1 ʒʒ von 2, dem radix, 16. Multiplicir 126 mit 16, facit 2016; das sollen wir sestuplicirn mit dem gnomone 2, werden 64512. Nun wechst er furter mit 84 cℓ. Nun ist 1 cℓ 8 von dem radix 2, das machen wir zu 84 malen facit 672; das wollen wir septuplicirn mit dem obgemelten gnomone 2, werden 43008. Er wechset furter mit 36 ʒ octuplicirt. Nun ist 1 ʒ von 2, dem radix, 4, das zu 35 malen facit 144; die octuplicirn wir mit 2, dem gnomone, facit 18432. Nun wechst er zuletzt mit 9 radicibus. Nun ist 1 𝔯 2, der 9 machen 18, die nonuplicirn wir 93' mit 2, dem gnomone, werden 4608. Nun sollen erfullen sein quadratur | der gnomo der duction gemes gefurt, ist 512. Das sollen wir alles zusam addirn, so finden wir, das er ist in 4 gewachsen, 262144, vnd desgleichen wirdt er auch extrahirt. Solche Circumscriptibilia findestu jn nachgesatzter

ccℓ	ʒʒʒ biß ʒcℓ ß ʒʒ cℓ ʒ 𝔯 · gnomo 1000900360084012601260084003600090001
ʒʒʒ	biß ʒcℓ ß ʒʒ cℓ ʒ 𝔯 gnomo 1000800280056007000560028000080001
biß	ʒcℓ ß ʒʒ cℓ ʒ 𝔯 gnomo 1000700210035003500210007 0001
ʒcℓ	ß ʒʒ cℓ ʒ 𝔯 gnomo 1000600150020001500060001
ß	ʒʒ cℓ ʒ 𝔯 gnomo 1000500100010000050001
ʒʒ	cℓ ʒ 𝔯 gnomo 1000400060004 0001
cℓ	ʒ 𝔯 gnomo 1000300030001
ʒ	𝔯 gnomo 100020001
𝔯	gnomo 10001

[1])

1) Diese Tabelle ist sehr instruktiv und zeigt die Folge der Binomialkoeffizienten in sehr übersichtlicher Weise.

figuren vom 𝔯 aus gemultiplicirt pis in den ccl. Darinnen mogen wir sehen alle wachsende supplementa, vnd haben sie gesetzt dermassen, das die figure significatiue nicht mogen zusamen komen von wegen der ziffern entzwischen, vff das der verstandt der supplement nicht vorplendet werde durch zusamenfugung der significatiuen. Also so der 𝔯 in sich gefurt wirdt, als 10001, so khumbt der ʒ, als 100020001; also bedeut 1 den ʒ, der do wachsend ist mit 2 𝔯, das seind 2 𝔯 geduplicirt durch den gnomonem, das letzte 1 in sich. So aber nun 𝔯 gefurt wirdt wider ʒ, so khumbt 1000300030001, das bedeut, das der cub mit 3 ʒ vnd 3 𝔯 sein wachsunge hat vnd mit dem gnomone der duction gemes, vnd zugleich fort. | 94

Capitulum decimum de distinctione limitum numerorum, quorum sit extractio ductionum hauriendorum laterum rationalium.

Causam autem geniturae ductionum monstravimus propter exhaurienda latera, quorum in primis limitibus numerorum distinguamus. Quaelibet enim rudix primo limite contenta censica censum quidem infra tertium producit, cubica vero cubum infra quartum; censica vero de censu potentiam suam infra quintum explicat. Quo enim loco ductio ordine proportionali situatur, illo limite distinguetur numerus hauriendae radicis. Ultimo ergo distincto limite cuiuslibet radicis extrahendae detrahatur eius potentia, quae quidem anterioranda erunt limitibus, ut augmentum circumscriptionis supplementorum, gnomonorum quoque crescentiam circa diametron inalterabilem complectionis accipiant. Omnium autem extractionum utamur formulis inscriptis tabularum.

Hie saget ALGEBRAS sein letzt intentum der duction, sagende:

Wir haben demonstrirt die vrsachen der geburt gemelter ductionen von wegen zuvorstehung jrer laterum, das ist jrer extrahirung, welche duction, so wir wollen aufszihen oder extrahiren jrre latera oder wurtzeln, sollen wir zum ersten die zal durch limit distinguiren, dermassen | ein jtzlicher radix aller 94′ duction des ersten limits, das ist digitorum der neun figur, gepirt den ʒ vnter der dritten dem limit, das ist dem centenario; den cubic vnterhalb dem vierten, das ist dem Millenario, den ʒʒ vnter dem funfften; das ist dem decemmillenario, vnd also fort, wo die duction wirdt gesatzt der vorgemelten proportionalischen satzung der signorum, desselbigen limits sollen die zal gedistinguirt werden, von welcher geschopft soll werden der radix. Also wollen wir etrahiren sursolidam radicem, das ist der sursolidus gesatzt in proportionalischer satzung vom dragma an der sechsten stadt, hierumb sol er mit dem sechsten limit, das ist mit dem

centocentenario gedistinguirt werden. So das also ist geschehen, bej dem letzten distinguirten limit einer jtzlichen duction radix zu extrahirn sol herabgezogen werden die potentz der duction gemes, welche also zu verandern sein, das ist zu ruck zum negsten distinguirten limit, vf das also durch den gnomonem die gemelten circumscriptibilia oder supplementa erwachsen, vnd erfullung bej dem diametro der superficien vnd corporum vnverruckt nemen werden. Aber in allen extractionen der gemelten ductionibus gebrauchen wir die formula der tabelen des ersten

95 limits digitorum, den wir also mussen presupponiren. | [1])

𝔯	2	3	4	5	6	7	8	9
𝔷	4	9	16	25	36	49	64	81
𝔠𝔢	8	27	64	125	216	343	512	729
𝔷𝔷	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
ß	32	243	1024	3125	7776	16087	32768	59049
𝔷𝔠𝔢	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
𝔟ß	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
𝔷𝔷𝔷	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
𝔠𝔠𝔢	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489

95′ | Wann du wissen bißt, das du in 81 khein extraction khanst erstrecken, wann es ein einiger digitus ist, sein radix, dergleichen in andern ductionibus, so wir wollen extrahirn radicem sursolidam in 37, haben wir nach ordnung khein andere extraction, dann das es allein ein einiger digitus ist, der so helt des grosten sursoliteten radicem, das ist 2, vnd hierumb sagt der text von der tabellen des ersten limits. Wie nun ein yetzliche duction sol extrahirt werden, haben wir angezaigt, wie die stationen, so der text nennet, verandert sollen werden, vnd hierumb wollen wir hiermit vollendett haben den ersten tractat vnsers dritten buchs vnser Gebra vnd Almuchabola von den rationalischen zalen vnd jren lateribus, das ist jrer wurzeln. Das vestigium der tabellatur ist an der andern seiten dises blats

---

1) Hier ist also die von dem deutschen Bearbeiter schon bei den einzelnen Potenzierungen befolgte Anweisung gegeben, allgemein die Wurzeln der Zahlen zu suchen, und die Angabe, dass die Potenzierung nur gezeigt sei um der Wurzelausziehung willen. Die dann folgende Tabelle der neun ersten Potenzen der Einer ist dazu natürlich unumgänglich nöthig.

beschrieben des ersten limits aller ductionen, welche dir nutz sein jn gesatzten extractionibus zu erkhunden vnnd zu erforschen den gnomonem einer gesetzlichen duction gemes.

Tractatus secundus libri tertii ALGEBRAE *de communicantibus numeris, et primo proposito solo numero, an primus sive compositus contra se inveniatur tantum. Capitulum primum.*[1] | 96

Omnis numerus, rationans totum et detractum rationat et residuum. Ex hoc manifestum: Omnis numerus residuum potentia numerantis a toto detracta numerans, numerat etiam numerum totum. Ex eo ipsum esse probatur omnium suorum communicantium rationalem compositum. Residuum autem incommensurabile si fuerit, descensu continuo primus et incompositus contra se invenitur mensurae unitatis rationalis.

Hie hebet ALGEBRAS an seinen andern tractat des dritten buchs, sagende von den communicanten der rationalischen zalen, vnd eroffnet das anfengklich zum teutschen lautendt also:

Ein ytzliche zal, die do rationiret oder zelet das gantze vnd herabgezogen, die zelet auch das vberpleibent. Hierumb wirdt offentlich, ein ytzliche zal, die do zelet das vberpleibendt, so anders derselbigen zelenden den zalpotentz oder quadrat von dem gantzen ist gezogen worden, so zelet auch dieselbige zal die gantze zal. Heraus wird probirt, das dieselbige zal ist rationalisch vnd zusamengesatzt durch gemelten Communicanten der Multiplication. So aber das vberpleibendt vngezelt pleibt durch angende herabsteigendt von den zalen zu zalen, so wirdt die vorgelegte zal primus vnd incompositus, das ist, das sie khein andere zusammensatzunge hat, dann das sie mit der gemeinen Mensur der vnitet, die do ist ein rationirung aller zalen, wirdet gezelet. | 96′

Von disen text schrifftlich den vorstandt einzufuren, cleret er nemblichen drey punct, dadurch er im letzten beschleust, das vilen geometricis noch nicht ist demonstrirt worden. Zum ersten nemen wir vor den ersten punct, sagende, ein ytzlich zal, die do zelet oder thailet eine gantze zal

1) Der zweite Traktat des dritten Buches handelt von ganzen Zahlen. Darin findet sich die Auseinandersetzung des einfachen falschen Ansatzes, der dem YLES und seinen Schülern zugeschrieben wird, des doppelten falschen Ansatzes, den die Araber benutzt hätten, der Ta-yen-Regel mit ihrer Begründung und die Lösung der unbestimmten Gleichungen des ersten Grades in ganzen Zahlen, welche den Indern zugeschrieben werden. Dieser Abschnitt dürfte geschichtlich höchst beachtenswerth sein.

vnd die herabgezogen, sol auch rationiren das vberpleibent. Als wir nemen 144 vor die gantze zal, vnd herabgezogen 81, vnd das vberpleibent ist 63 von not wegen; so wir nemen ex suppositione 9 den numeranten, der zelet die gantzen vnd 81, hierumb mus 9 zelen das vberpleibent, als 63, von notwegen vnd nicht ex suppositione. Also mugen wir hieraus ziehen vmbgekert: ein yede zal, die do zelet das vberpleibent, so die potentz des numerantis ist herabgezogen von dem gantzen, dieselbige zal zelet auch die gantze zal. Als 9 zelet das vberpleibendt 63, vnd 81 ist die potentz des numerantis 9, die do von dem gantzen 144 ist herabgezogen, so ist, 9 numerirt 63 das vberpleibendt vnd 81 das abgezogen, so numerirt auch 9 die gantze zal, das ist 144. Also saget der text, das wir mogen wissen, ob ein yede zal sey compositus oder primus, das ist, das wir mogen wissen, so die alle proportionirt ist, das man khan finden alle zalen, die sie thailen oder zelen. Vns wirdt vorgeleget 144, zu finden alle seine communicanten.[1]) Wir suchen die potentz 144, ist 12, oder den grosten radix, so die zal
97 nicht gantz aufgeht. Also | sprechen wir, das 12 vnd 12 sein die grosten communicanten der gemelten zaln. Wir decendiren, als der text sagt: sie seind descenso continuo, vnd nemen 11, so wissen wir, das allweg die negste quadrat jre distantz habe durch die imparen jrer gnomon. Also, so ich die potentz von 11 herabzeuch von 144, bleiben 23, das thut 11 vnd 12 geaddirt, wann so wir die naturlichen satzunge der zalen alwegen ein parem vnd jmparem zusamen addirn, erwachsen angehende alle imparen die distantz der quadraten. Nun finden wir, das 11, der Numerant, nicht zelet 23, das Residuum, darumb zelet er auch nicht 144, vnd ist mit 11 kheine Mensur sonder 0. Wir descendiren vf 10, sprechen 10 vnd 11 seind 21, die addir zu 23, khumen 44, das ist das Residuum, so die potentz des numerantis 10 herabgezogen wirdt von 144. Also finden wir, das 10 nicht zelt die 44, darumb zelt es auch nicht die 144 (die 10). Wir staigen fort, addirn 9 vnd 10 wirdt 19, die addir zu 44, wird 63, das ist das Residuum des numeranten potentz, so die herabgezogen, als wir vorgemelt haben. Solchs Residuum wirdt gezelt von 9 zu 7 malen, also sagen wir, das 9 die 144 zelt. Addir 9 vnd 7, ist 16, so offt zelt 9 die 144, das seind die andern communicanten. Wann 9 numerirt die detraction 9mal, so ist 63 das residuum, wird 7mal numerirt: so ich addire 9, das detract numerirt,

---

1) Diese Methode, sämtliche Divisoren einer beliebigen Zahl zu finden, ist nicht ohne Interesse. Sie wird hier und später *Scala Jacob* genannt, doch wohl im Hinblick auf die Himmelsleiter, welche Jacob im Traume sah, wenn auch die Beziehung auf sie unklar ist, wie so vieles in diesem Werke. Es ist hier auch die Eigenschaft ausgesprochen, dass, um sämtliche Divisoren einer Zahl zu erhalten, man nur bis zur Quadratwurzel aus ihr die Zahlen darauf zu untersuchen braucht.

Scala Jacob.

12	12
11	0
10	0
9	16
8	18
7	0
6	24
5	0
4	36
3	48
2	72
1	144

vnd 7, das residuum numerirt, wirdt totum numerirt zu 16 mal. Wir setzen fort zu 8, vnd addirn 8 zu 9, | ist 17, 97′ das addir zu 63, wirdt 80, vnd das zelt der numerant 8 zu 10 mal. Addir 8 zu 10, wirdt 18, also finden wir 8 vnd 18. Wir steigen fort zu 7, vnd 8 wirdt 15; addirn wir zu 80, wird 95, die zelt der Numerant 7 nicht, hierumb wird er auch nicht zelen 144. Wir ruckten zu 6, vnd addir zu 7 khumbt 13, die addirn wir zu 95, khumen 108, die zelt der genant numerant 6 zu 18 mal, hierumb zelt er auch 144, als die proposition sagt. Nun addir 18 vnd 6, ist 24, also seind 6 vnd 24 die vierten communicanten. Nun rucken wir zu 5, vnd 6 addirn wir, wirdt 11, zu 108 wird 119, die zelt der Numerant nicht, wann sein potenz 25 herab wirdt gezogen, pleiben 119, hierumb zelt auch 5 die 144 nicht. Wir steigen vnter sich zu 4, vnd 5 ist 9, das addirn wir zu 119, wirdt 128, die zelt der Numerant 4 zu 32 mal, hierumb zelt auch 4 die 144 nach angezaigter proposition. Addir 4 vnd 32, wirt 36, also ist 4 vnd 36 der funffte communicant. Wir descendirn an der laiter zu 3, vnd 4 werden 7, die geben wir 128, wird 135, die zelt der numerant 3 zu 45 mal, hierumb aigentlich zelt er auch 144. Addir 3 zu 45, khomen 48, so offt numerirt der Numerant 144. Also haben wir die sechsten Numeranten. | Wir descendirn vff 2, vnd 3 wirdt 5, zu 135 wirdt 98 140, die zelt der numerant 2 zu 70 malen, also numerirt er auch 144, dann 2 zu 70 wirdt 72, vnd also haben wir den letzten communicanten ausgenomen die vnitet, die do ist ein gemeine mensur alle zaln. Also haben wir funden, so wir vorlegen ein einige zal, zu finden, ob die ist primus oder compositus. Finden wir sie als jtzt, sprechen wir, sie sey zusamengesatzt von ettlichen multiplicatiuen zaln, finden wir aber, das Residuum incommensurabile ist in dem absteigen, als der text sagt, mit den Numeranten, als er spricht: *residuum autem incommensurabile etc.*, vnd finden khein angende zal von dem radice aus pifs auf die vnitet, so sprechen wir, das die zal von kheiner mag gezelt werden, dann mit der vnitet, vnnd ist incompositus, dann so ein zal an sich selbst incompositus ist, so ist sie mit kheiner andern multiplicirn oder communicirn.[1]) Vnd in disem absteigen haben wir an dem ℞ an der zalen, den wir nennen den Numeranten, vnd sein potentz detractum, vnd das vberpleibendt Residuum. Also ist nicht not von der zaln anfang zu descendiren, sondern von jrem

1) Die beschriebene Methode ist also auch zur Bestimmung der Primzahlen ausreichend.

radix anzuheben, als der text sagt: *potentia numerantis;* vnd also mogen wir finden ein yde zal, ob die wider sich selbst primus sei oder nicht, vnd 98' ist dise proposition soluirt. |

Capitulum secundum de communi mensura unitatis numerorum in longitudine et potentia.

Omnium numerorum communis mensura est vnitas. Ex hoc manifestum, omnes eadem esse communicantes longitudine et potentia, longitudine quidem proportione, ut numeri ad numerum, rationalis datae, potentia vero, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum superficiei quadratae unitatis rationantis rationabilis datae in longitudine.[1])

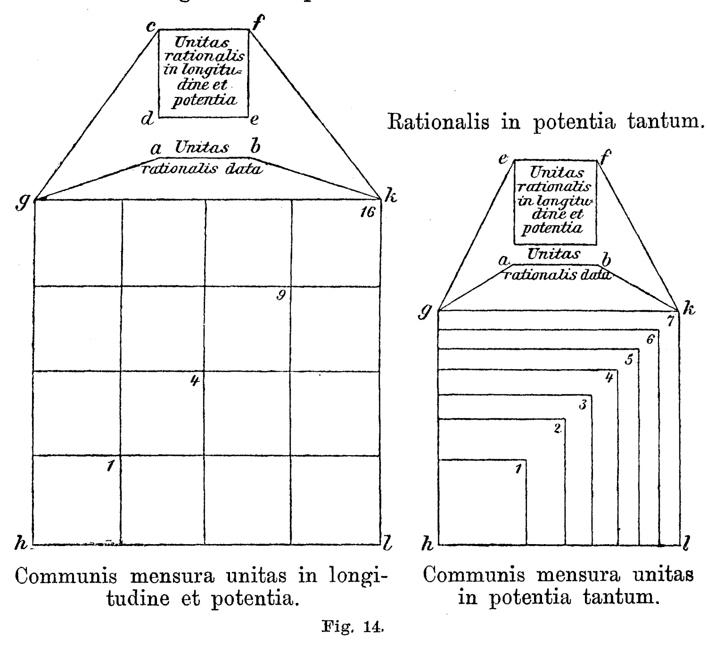
Hie eruolget ALGEBRAS sagende, nachdem er vormals gecleret hat jm letzten spruche: *invenitur mensurae vnitatis rationalis etc.,* von diser vnitet sagt er, welche ist eine gemeine Mensur aller zalen, vnd laut zum deutschen also:

Aller zalen ist ein gemein mensur vnitas, dann alle zalen haben vrsprungklich jren anfang wachsendt aus der vnitet. Hierumb wirdt offenbar, das alle zalen communicirn in der lenge vnd potentz mit der obgemelten vnitet, doch also: in der lenge als ein zal habendt ist ein proportz zu der andern der gegebenden vnitet, die do sollen zelen. Als 7 vnd 5 communicirn in der lenge, wann vnitas zelt 7 zu 7 maln vnd 5 zu 5 maln, hierumb wirdt die proportz nicht anders angesehen, dann als 7 gegen 5. Ist der 99 vnitet nach in der potentz, aber so ist vnitas | aber eine gemeine mensur als einer quadratisischen zalenn mit der andern, zu rationiren mit einer quadratischen unitet, die do geben ist, damit zu rationirn in potentia. Als so wir 5 vnd 7 ansehen als quadraten, so ist die gemelte vnitet in 7 oder 5 ein quadrat, welche vnitet ist in der lenge gegeben ein vnitet, die so sie potentionirt wirdt, entspreust die quadratische vnitet, damit die quadraten sein zu rationirn.

Disen text schrifftlich einzufuren vf einen vorstentlichen sin, so nemen wir vor 7 vnd 5, vnd sagen, das ein yede zal ist nach dem fordersten capitel an sich selbst primus vnd alleine mit der vnitet zu zelen, die do ist ein gemeine mensur aller zaln, als dann das capittel erinnert. Vnd nachdem

1) Dieses Kapitel setzt noch einmal ausführlich den Unterschied zwischen in der Länge rational und in der Potenz rational auseinander, sowie denjenigen, der zwischen der Einheit als gemeinsames Maass sowohl aller in der Länge als auch aller in der Potenz rationalen Zahlen besteht.

7 wirdt gezelt zu 7 mal, vnd 5 zu 5 mal in der lenge, so sehen wir sie an, das sie seind rationalische radices der quadraten, jn welchen sie vermaglich sein, als 7 vermag 49 den quadrat, welchen quadrat messen 7 schuch in der lenge, vnd 5 vermag 25, den quadrat, welchen quadrat messen 5 schuch jn der lenge. Also will ich ansehen 25 vnd 49 als quadraten, so mensurirt sie die quadratische vnitet, welche jr geben ist den schuhen jn der lenge, als der schuch in der lenge von 7 sein quadrat mensurirt 49 zu 49 maln, vnd der schuch in der leng von 5 sein quadrat mensurirt 25 zu 25 mal. Hierumb mogen wir mercken, das ein yede vnitet in der leng bedeut ein rationalische quadrat vnd in potentia, | vnd widerumb nicht ein yeder quadrat 99′ in potentia bedeutet ein rationalische vnitet in der leng. Wan $\surd 7$, des quadrat angesehen hat 7 quadratische vnitet in potentia, welche jtzliche



Communis mensura unitas in longitudine et potentia. Communis mensura unitas in potentia tantum.

Fig. 14.

jn der lenge nicht ist rationalisch mit der lenge von 7 des quadrat, vnd herumb wird 7 in der lenge der quadrat nicht rationirt mit der rationalischen data, welche gegeben ist jren quadratischen vniteten jn der lenge, und hieraus werden die zaln erkhent, pei vns surdi genent, von welchen nachuolgent wirdt gesagt. Also mogen wir clerenn, das alle zalen mogen sein rationalis in potentia, wann 7 mag ein quadrat sein, vnd sein radix ist surd. Ein ytzliche zal ist auch in longitudine rationalisch, so sie wirdt

angesehen vor radix irer potentz, den sie vormag; als 7, wann wir sie ansehenn, das sie 49 vormag, so ist sie rationalis zu messen mit vniteten als 7, welcher vnitet ist geben der superficie in der lenge potentz, welche superfices quadrata zelet 49 zu 49 malen. Also beschließsen wir, das vnitas ist ein gemeine mensur aller zalen, doch gespaltener meinung, als der text sagt. In der lenge, so ist sie linearis, vnd in der potentz, ist die vnitet superficialis, also dann clerlich die tabellen Moisy ercleren.

100 Tabulae lapideae Moisy (Fig. 14 auf S. 549) sequuntur.[1] |

In disen zweien steinern tafeln Moisy finden wir, das die erste mit der andern communicirt allein in potentia der superficien vnitaten; wann die erste ist rationalis in longitudine vnd potentia, so ist die ander allein in potentia rationalis. Haben hierumb eine gemeine mensur, das ist eine superficiem der vnitet, der sie alle rationirt, die erste 16 mal vnd die ander 7 mal. Vnd die rationalis data der superficie der vnitet quadratae rationirt die erste tabeln 4 mal in longitudine, vnnd die ander wirdt incommensurabilis mit jr, als hiernach volget die vrsach, vnd volget das dritte capitel vnsers andern tractats.

Capitulum tertium de maxima mensura numerorum communicantium
100′ *invenienda.* |

Maxima numerorum communicantium mensuram invenire. Diviso maiore per minorem, minoreque per residuum, quoque relicto, donec terminus eos in minimos contra se primos exiens inveniatur, fuerit tunc eorum proportio, quemadmodum quadrati numeri ad numerum quadratum, eos rationales esse in longitudine et potentia, quod si fuerit proportio eorum, quemadmodum non numeri quadrati ad non numerum quadratum, eos longitudine incommensurabiles esse dicuntur, quod potentia tantum communicantes superficiei rationalis datae.[2])

Nachdem Algebras clerlichen hat ausgedruckt zum ersten, zu finden, ob ein zal an jr selbst communicanten hab, oder primus sey, vnd darnach, das alle zaln haben ein gemeine mensur, die vnitet, hie saget er von der

---

1) Auch diese beiden Figuren sind eine Anspielung auf die Gesetzestafeln des Moses.

2) Dieser Paragraph lehrt das Euklidische Verfahren das grösste gemeinsame Maass zweier Zahlen zu bestimmen. Die am Ende desselben gegebene Figur der *Virga Aaron,* die an den zur Schlange gewordenen Stab Aaron's erinnern soll, zeigt zugleich, dass die zu untersuchenden Zahlen sowohl in der Potenz als in der Länge rational sind, wenn sich die Quotienten durch den gemeinsamen Theiler wie zwei Quadratzahlen verhalten, dagegen nur in der Länge rational, wenn dies nicht der Fall ist.

grosten mensur oder von den grosten Communicanten zu finden zweier zalen, welcher text zum teutschen laut also:

Zu finden die groste Mensur der communicanten zalen soll also geschehen, so do gethailt wirdt die groste zal mit der minsten, vnd die minste durch die vberpleibenden, vnd das vberpleibend durch das negste verlassen etc., also lang biſs do gefunden wird ein terminus oder zal, welchs sie auſszeucht die vorgelegten zalen in die contra se primos, das ist das sie fort zu kheine andere wider mogen gethailt werdenn dann jn die vnitates, dauon gesagt ist. So dann das also volfurt ist, vnd sie jn die cleinsten zal pracht seind, | haben sie die proportion 101 gegeneinander als ein quadratische zal gegen der andern, so sprechen wir, das die vorgelegten zaln seind rationales communicantes jn der lenge vnd jn potentia; ist aber der resoluirten zal kheine gegen der andern als ein quadrat gegen dem andern, sagen wir, das die vorgelegten zaln seind in der lenge incommensurabiles, das ist, das sie nichtt mit einander gemensurirt werden, vnd werden gesagt in der potentz allein communicantes mit der quadratischen superficie, die gelihen wirdt der vnitet rationalis datae in der potentz.

Von welchen text zu sagen vnd den zu leutern, so will ich setzen zwo zalen 279 vnd die ander 496, vnd wollen sehen, jn welchen form die miteinander communicirn jn der grosten Mensur. Sagt der text, wir wollen thailen 496 mit 279, pleiben 217. Nun sollen wir thailen 279 mit 217, das ist die kleiner zal mit dem vberpleibend, pleiben 62; nun sollen wir das residuum 217 thailen mit 62, khumbt im restant 31; nun sollen wir thailen 62 in 31, vnd geht gantz auf. Also sagen wir, nachdem der text sagt, das 31 ist der terminus, das ist die zal, die sie aussucht in die minsten zwo zalen nach jrer proportion, vnnd 31 thailet sie bede, vnd ist die groste Mensur. Nemlich 496 mit 31 khumen 16. Nun thailen wir 279 mit 31, khumen 9, also sagen wir, das die gemelten zaln seind in der cleinsten proportion | 9 vnd 16, welche zwo zaln sich zusamen halten 101′ jnmaſsen als zwen quadraten, sam 279 gegen 496. Derhalben sagen wir, das 279 vnd 496 seind in potentia vnd longitudine commensurabiles. In potentia so mensurirt 31 den quadrat 279 zu 9 malen vnd 496 zu 16 malen, vnd in longitudine so mensurirt 31 des quadrats lenge 279 zu 3 mal vnd 496 zu 4 maln, gleicherweis als 9 vnd 16 communicirn in longitudine, als 9 zu 3 malen mit der vnitet, vnd 16 zu 4 malen, also mogen wir demonstratiue beweisen, das jre equa multiplicia auch also communicirn. Nemblich so wir die vnitet, die do mensurirt 9 vnd 16 in longitudine, mit

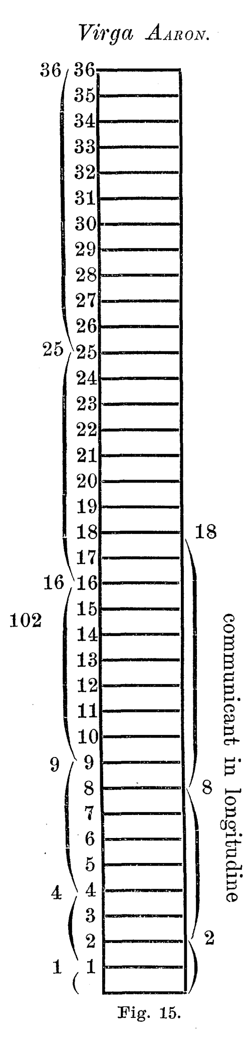


Fig. 15.

der mensur gefunden 31 multiplicirn, khumbt 31, vnd 9 vnd 16 auch damit, khumbt 279 vnd 496, also sprechen wir, das 279 vnd 496 seind equa multiplicia von 1 vnd 9 vnd 16, alle genomen in potentia; vnd so wir nemen die radices von 1 vnd 9 vnd 16, khumbt 1 vnd 3 vnd 4, vnd also sprechen wir das 31 zele den quadraten 279 in seiner lenge zu 3 malen vnd 496 zu 4 maln, vnd also haben wir clert den ersten thail des text. Wir nemen vor: *quod si fuerit proportio,* das andere thail, vnd suchen die groste mensur von 36 vnd 96, jnmassen obgethan, finden wir in den cleinsten zaln 3 vnd 8, welche die proportion nicht haben als ein quadrat gegen dem andern. Sagen wir, das 36 vnd 96 sein in longitudine incommunicantes vnd allein potentia rationales, dermas der quadrat 12, die groste mensur, zelt 36 den quadrat zu 3 maln vnd 96 zu 8 malen. Aber die radix davon in der leng von dem quadrat von 12 die communicirt | nit mit der lenge vom quadrat 36 vnd 96. Das ist aber in den obern zaln, vnd hierumb seind 8 vnd 3 gleich in potentia gegen der vnitet gerechent in potentia, die rationirt als jre multiplicia 96 vnd 36 vnd 12; wann 36 ist multiplex gegen 3, als 96 gegen 8 vnd 12 gegen der vnitet. So ist allwegen ein proportz der muitiplication, als wir sehen jn der virga Aaron, als do seind 1 vnd 4 vnd 9 rationales in der lenge vnd potentz commensurabiles, also sein auch 2 vnd 8 vnnd 18 jr equa multiplicia auch in der lenge vnd potentia commensurabiles. Also do 1 numerirt 9 zu dreimalen in longitudine, also mensurirt 2 die 18 auch 3 mal in longitudine; als do mensurirt vnitas in potentia 9 zu 9 malen, also auch 2 in potentia die 18 zu 9 malen in potentia, als die rute Aaron (Fig. 15) clerlichen ausweist.

De inveniendo numero primo propositorum divisorum atque residuantium. Capitulum quartum.

Divisoribus contra se primis atque residuantibus propositis inveniendi numeri primi, quibus metiri habeat, omnium divisorum denominatio communis cuilibet communicat. Partium vero denominatarum denominantes cuius-

libet relinquitur incommensurabilitas, quae, si in unitatem residuantem, divisis divisoribus reducentur, primisque residuantibus producta multiplicentur, coacervatum deinde minus denominatione communi inveniendus numerus minimus propositorum divisorum atque residuantium contra se primus esse probatur.[1] | 102′

---

1) Dieses Kapitel handelt von der sogenannten Regel Ta-yen und giebt genau den Weg an, auf welchem man zur Lösung gelangen kann. Das von dem Bearbeiter durchgeführte Beispiel, wenn die Reste nicht ein gemeinsames Maass haben, ist folgendes:

$$N = 7x + 5 = 8y + 7 = 9z + 6 = 11t$$

in ganzen Zahlen aufzulösen. 7, 8, 9, 11 heissen ihm die Theiler; 5, 7, 6 und 0 die Reste. Er bildet das Produkt der Theiler, das ist 5544, und theilt dasselbe durch jeden einzelnen Theiler, oder was dasselbe ist, er bildet auch die Produkte der jedesmaligen drei übrigen Theiler. So erhält er 792, 693, 616, 504. Diese durch den jedesmaligen Divisor nochmals getheilt geben als Reste der Reihe nach 1, 5, 4, 9. Nun sind also die obigen Quotienten so zu verwandeln, dass überall bei Division durch die Theiler die Einheit übrigbleibt, denn wenn man dann die sich ergebenden Zahlen mit den verlangten Resten multipliciert, so müssen bei der Division durch die Theiler die betreffenden Reste übrigbleiben. Die so entstehenden Zahlen nennt er reduciert. Die erste 792 ist natürlich reduciert. Für die übrigen geht er so vor. Den bei 693 übergebliebenen Rest 5 addiert er zu sich selbst und wirft 8 davon ab; den bleibenden Rest 2 addiert er wieder zu 5 und, da von der Summe 8 nichts weggenommen werden kann, so addiert er nochmals 5. Von der Summe 8 weggeworfen bleiben 4. Nach nochmaliger Addition und Subtraktion bleibt endlich 1 als Rest. Nun ist 5 fünfmal addiert, das ist soviel, als ob man 693 mit 5 multipliciert hätte, macht man also die Multiplikation, so erhält man 3465, und diese Zahl giebt durch 8 getheilt 1 als Rest. In ähnlicher Weise findet er, dass 616 mit 7 zu multiplicieren ist, so dass 4312 entsteht und, obwohl wegen des Restes 0, der für Division durch 11 bleiben soll, die Rechnung, wie er selbst sagt, nicht nöthig ist, führt er sie doch ebenfalls durch, und findet, dass 504 mit 5 zu vervielfachen ist. Sie wird dann 2520. Die so erhaltenen Hülfszahlen multipliciert er nun mit den jeweilig verlangten Resten, und die entstehenden Zahlen 3960, 24255, 25872, 0 geben addiert eine Lösung der Aufgabe, die durch Addition oder Subtraktion des Produktes aller Divisoren, also von 5544, weitere Lösungen liefert, deren kleinste 4191 ist. Diese Lösung stimmt absolut überein mit der chinesischen im *Swan-King* des Sun-tsze und der von Gauss in den *Disquisitiones arithmeticae,* die ja die obige Lösung, nur in moderne Zeichen gebracht, darstellt. Unser Verfasser geht aber noch weiter, wie Yih-hing im *Tayen lei schu.* Er erweitert nämlich seine Betrachtungen auch auf den Fall nicht theilerfremder Divisoren. Sein Beispiel ist in den Gleichungen enthalten:

$$N = 6x + 2 = 8y + 6 = 10z + 4 = 14t + 8.$$

Er sucht das kleinste gemeinsame Vielfache der Divisoren, das ist 840, und theilt dasselbe wie früher durch die einzelnen Divisoren, so erhält er die Quotienten 140, 105, 84, 60. Nochmalige Division durch die Theiler geben die Reihe 2, 1, 4, 4.

Hie saget Algebras zu finden die zal, welche durch angezaigte diuisores vnd residuantes primi sein; als er vormals gecleret hat, ob ein zal an jr selbst primus oder nicht sey, werden hie vorgeschlagen diuisores vnd residuanten, die do wider sich selbst primi der zu findenden zaln, vnd laut zum teutschen also:

So do seind proponirt diuisores vnd residuantes, die do wider sich selbst primi seind der zu findenden zaln, mit welchen divisoribus sollen getheilt werdenn der vberbleibendt restanten, so ist alweg die gemeine denomination, das ist der Nenner, communiciren oder zelen alle divisores oder die thail, die do also gezelt werden vnd benennt von jrem divisore, demselben thail wird verlossen oder entzogen die zelung oder commensurabilitas mit jren denominantibus, das ist von dem divisore, dauon sie genenet werden; welcher thail also benent, so die also durch jren divisoren gethailt werden, dauon sie genent werden, vnd reducirt wird dermas, das alwege vnitas residuirt, vnd so solche reducirung ist geschehen durch alle divisores, so sollen solche reducirte producte jtzlichs mit seinem residuum gemultiplicirt werden, vnd darnach das zusamen gethun von allen producten minder des gemeinen Nenners, so offt man den mag 103 herab nemen, das pleibende ist dj cleinste zal | wider sich primus der furgelegten thailern vnd restanten probirt.

Von disem text grundtlich zu reden vnd den vorstandt an tag zu

---

Da der erste Rest der von der Aufgabe verlangte ist, so bleibt 140 unverändert, der zweite Quotient 105 ist, da ja der Rest 1 geblieben, mit 6 zu vervielfachen, das giebt 630; der dritte Quotient 84 giebt wieder von selbst den Rest 4, er bleibt also unverändert. Würde man ihn aber, ebenso wie den ersten, nach früherer Art prüfen, so bliebe beidemale 0 als Rest. Endlich giebt 60 durch 14 getheilt den Rest 4, also muss $2 \cdot 60 = 120$ den Rest 8 geben, der verlangt ist. Die Summe von $140 + 630 + 84 + 60 = 974$ ist die gesuchte Zahl. Auch hier giebt Addition oder Subtraktion von 840 weitere Lösungen. Die kleinste ist also 134. Auch auf den Grund der weitern Lösungen geht er am Schlusse des Kapitels ein. Zuletzt enthält das Göttinger Manuskript auch noch die Bedingung, unter welcher die Aufgabe unmöglich ist. Das Beispiel ist

$$N = 5x + 4 = 6y + 3 = 8z + 2 = 9t + 1.$$

Hier geht 6 in dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen 360 auf, und die obigen Betrachtungen lassen sich also nicht in Anwendung bringen. Vergleiche hierzu besonders L. Matthiessen, *das Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king* von Sun-tsze und *Tayen lei schu* von Yih-hing (Crelle's *Journal* XCI, 254—261). Die Bekanntschaft mit solchen Aufgaben habe ich früher nachgewiesen bei Leonardo Pisano, bei Frater Fridericus in Regensburg um 1450, bei Regiomontan. Die Aufgaben, welche letzterer gestellt hat, siehe oben S. 219 und 295.

geben, wollen wir setzen zu finden ein Numerum primum mit 7, mit 8, mit 9; mit 11 soll er compositus sein: also mit 7 sollen im restanten 5 sein, mit 8 7 vnd mit 9 6, aber mit 11 soll er gar aufgehen. Also ist der suchende numerus primus gegen angezeigten theilern vnd residuanten, vnd ist auch compositus, wann mit 11 soll er communicirn. Sagt der text, das die gemeine denomination aller thailern communicir auch mit jtzlichem thailer. Hierumb giebt er anzeigung, das man soll machen einen gemeinen Nenner der divisoren, der dann ist 5544, welcher mit einem jtzlichen thailer ist communicirn. Als mit 7, so wird er gezelt 792 mal, vnd mit 8 zu 693 mal, vnd mit 9 zu 616 mal, vnd mit 11 zu 504 mal. Sagt fort der text, das solche benente thail von dem thailer, dauon benent werden, das ist von jren denominanten, nicht werden commensurirt: als 792 werden gesagt ein benent thail von jren denominanten 7, mit dem solch thail khein mensur hat, desgleichen die andern. Meldet der text fort, so die gethailt werden mit jren thailern, als 792 mit 7, restat vnitas; 693 mit 8, restat 5; vnd 616 mit 9, restat 4; vnd 504 mit 11, restat 9, vnd solche thail sollen dermas | reducirt werden jn andere zal, welche alsdann, so 103' die mit jtzgemelten thailern gethailt werden, das dann allenthalben vnitas residuir. Das soll dermassen geschehen: so wir thailen 729 mit 7, restat 1, dauon darf die nicht weither reducirt werden, als der text sagt, sunder sie pleiben vnuorwandelt. Aber so wir thailen 693 mit 8, restat 5, die mussen wir reducirn jn ein ander zal, so sie in die wirdt gethailt mit 8, das dann vnitas pleibt. So examinirn wir sie auch nach denn loca, vnd addirn 5 zu 5, wirdt 10. Dauon wirf 8 hinweg, pleiben 2; addir 5 vnd 2, wirdt 7, vnd 5 zu 7 seind 12; vnd von 12 wirf aber 8 hinweg, pleiben 4; addir 5 vnd 4, wirdt 9, dauon wirf 8, restat vnitas. Also zele die loca, findestu 5 loca, also multiplicir 693 mit 5, wirdt 3465, so ich die thaile mit 8, restat 1. Also ist der ander thail ausgericht. Dermas so wir thailen 616 mit 9, restat 4: also addir 4 vnd 4, wirdt 8, vnd $4 + 8$ werden 12. Dauon wirf 9, restat 3. Addir 4 zu 3, wirdt 7; addir 4, wirdt 11, dauon 9, pleiben 2. Addir 4, wirdt 6; addir zu 4, wird 10, dauon 9, pleibt vnitas. Examinir die loca, der dann 7 seind. Hierumb multiplicir 616 mit 7, khumen 4312, so die mit 9 gethailt werden, restat vnitas. Desgleichen mogen wir thun mit 504, wiewol es nicht not, wann sie khein | Residuanten hat, darin sie soll gemultiplicirt 104 werden, als der text sagt. Nicht desterweniger wollen wir sie examinirn. Wir thailen sie mit jrem diuisore 11, pleiben 9, hierumb sollen wir die reducirn jn ein zal, jn welcher, so sie gethailt wirdt mit 11, das vnitas residuir. Addir 9, facit 18, vnd wirf hin 11, restant 7; addir 9 vnd 7, werden 16, wirf weg 11, restat 5, addir zu 9, facit 14, nun ab 11,

pleiben 3; zu 9 wirdt 12; dauon 11 restat vnitas. Also zele solche loca, khomen 5. Die multiplicir mit 504, facit 2520, so die mit 11 gethailt werden, restat vnitas, vnd also sagt der text, das bemelte thail seind reducirt jn zal, welche so die gethailt werden durch furgelegte divisores, restat vnitas. Warumb wir aber solche Reductionen durch die loca examinirt haben, propter hoc fit, das ist die vrsach. Wann, so wir nemen die reducirte zal eine, als 504, do pleiben 9, so wir zwispalten, duplirn sich auch 9, das residuum jn jr; hierumb haben wir gesagt 9 vnd 9 ist 18, hinweg 11 gegangen an der gespalten zal, vnd pleibt 7, wann 504 zu 2mal ist 1008, das gethailt mit 11, restat 7. So wir noch einmal 504 zu 1008 addirn, addirn sich 9 vnd 7 zusammen, wann jn dem ersten ist 9 das residuum, vnd jm andern 7, das wirdt 16, vnd ist die zal worden getriplicirt. Werfen wir von 16 die 11, restat 5, so man 1512 in 11 thailt, werden auch 5 pleiben. Wir addirn aber 504 zu 1512, so ist die zal quadruplicirt, vnd ist die vierdte stadt, khumbt 2016, welche so die 104' gethailt wirdt mit 11, pleiben 3; wann jn 504 | pleiben 9, vnd in 1512 pleiben 5. Nun 9 vnd 5 zusamen, khumen 14. Nim 11, restat 3. Wir addirn 504 zu 2016, facit 2520, das ist die zal, die do gereducirt worden ist, vnd ist nun gequintuplicirt, als wir sagten, sie wirdt an der funfften stadt. Wann in 504 restat 9, vnd in 2016 restat 3, vnd 9 wirdt 12, also thailet sich 11 weg, rest vnitas, das haisst also reducirt in vnitatem residuantem, als der text sagt. Er meldet furter und spricht, das die jtzgenanten reductiones als 792 vnd 3465 vnd 4312 vnd 2520, ein ytzliche soll jn jrem residuanten gemultiplicirt werden. Also multiplicirn wir 792 mit seinem residuanten 5, facit 3960; wir multiplicirn 3465 mit dem restant 7, facit 24255; wir multiplicirn 4312 mit seinem Restanten 6, facit 25872; wir multiplicirn 2520 mit seinem Restanten 0, khumbt 0; vnd hierumb khumen solche product alle zusamen, als 3960 + 24255 + 25872 vnd 0, vor das letzte, als wir vrsach werdenn sagen. Die machen jn einer Summa 54087. Was vrsach das ist, darumb man sie zusamen thut, vnd mit dem restanten seind gemultiplicirt: wann ein ytzliche zal vorgemacht geht durch alle divisores auf ausgenomen mit seinem divisore, dauon sie den namen hat, do pleibt vnitas. Dieselbig vnitet ein ytzliche ist in den reducirten zalen mit jrem residuanten gemultiplicirt worden vnnd ist das residuum 105 daraus wordenn, vnd darumb, das ein ytzliche reducirte zal mit allen | diuisoribus aufgeht, aufsgenomen mit dem seinen, so geht sie nicht auf, hierumb

Residuantes.			
5	7	6	0
Diuisores.			
7	8	9	11
Partes denominatae.			
792	693	616	504
Reducirt.			
792	3465	4312	2520

so mus die gantz summa 54087 auch durch die gemelten divisores nicht aufgehen, vnd mus residuirn mit jtzlichem divisore, als der text sagt. Sprechen wir, das 54087 sei die zal, die wir suchen, vnd so offt wir die gemein denomination darzu addirn 5544, ye grosser die zal wechst, nach der proposition gemes. Sagt der text: *coacervatum minus denominatione.* Hierumb zu yederweis, so offte wir die denomination herab nemen, so bleibt ein cleinere zal vnserm proposito gemes, vnd so die gemelte denomination nimer khan herabgezogen werden, so concludiren wir mit dem text, das das residuum sein mus minimus numerus, das ist die cleinste zal der angezaigten divisoren vnd residuanten. Also thaile 54087 mit 5544, pleiben 4191, vnd das ist die cleinste zal, so die gethailt wirdt mit 7, restant 5; mit 8, pleiben 7; mit 9, pleiben 6, vnd mit 11 ist er compositus.

Nun mogen wir abnemen bej disem text einen treffenlichen punct. So do wurden vorgeschlagen divisores, die do communicirn mit einander vnd khein ordnung wirdt gehalten derhalben, als ich setzen will oppositum textu, zu finden numerum primum mit disen diuisoribus. Wann jn zelet 6, sollen 2 pleiben, wann ich mit 8 zelen, sollen 6 residuirn, | vnd wann **105′** ich jnen mit 10 zele, soll 4 vberpleiben ⟨vnd wann ich jnen zele mit 14, soll 8 vberpleiben⟩. So machen wir einen gemeinen Nenner, darinn wir die denominantes partes vf das cleinste haben mogen, das ist 840, darjnn suchen wir die denominantes partes, machen nach einander volgendt 140 vnd 105 vnd 84 ⟨vnd 60⟩, vnd thailen jnmassen wie oben 140 in 6, pleiben 2, vnd hierumb, das er nicht khan in die loca khumen, dar jnn er aufging an der dritten stadt, darumb lassen wir jn reducirt vnd gemultiplicirt sein mit sein restanten 2. Wir thailen 105 in 8, vnd restat vnitas. Die multiplicir in seinen restanten 6, facit 630; wir thailen 84 mit 10, restat 4. So wir die wollen examinirn nach den locis vormals gethun, als 4 vnd 4 macht 8, vnd 4 macht 12, wirf 10 hinweg, restat 2, vnd 4 seind 6, vnd 4 machen 10. Nun 10 von 10 rest 0, soll vnitas pleiben. Dieweil 84 ist gethailt mit seinem divisore 10, vnd 4 jm restant, der im geben ist, lassen wir 84 reducirt sein. Wir thailen 60 durch 14, restant 4, vnd sollt vnitas restirn. So wir examinirn, so stedt er an der siebenden stadt auf in 0. Wie sollen wir dann examinirn? So mercken wir, das die, die do aufgehenn jn 0, vnd jrn restanten nach der proposition nicht furn sollen, seind reducirt. Dieweil aber 60 aufstehet, vnd seinen Residuanten 8 nicht mit furt, also sollen wir 60 examinirn, an welcher stadt jm werde gegeben | der restant 8. Sprich, so ich 60 mit 14 thaile, **106** restat 4, vnd sollten 8 restirn. Addire 4 vnd 4, wirdt 8, also geschieht das an der andern stadt. Multiplicir 60 mit 2, wirdt 120; so ich die

mit 14 thaile, restat 8. Also thue jm allerwegen, so die loca aufstehen mit der vnitet, so examinir jn nach den locis so lang, pifs jm sein restat gegeben wirdt. Also addirn wir 140 + 630 + 84 vnd 120, facit 974, vnd das ist die zal, so offt wir die gemelte denomination herabziehen, als 840. So wir sie aber addirn, so wirdt die zal grosser nach laut des texts. So wir abzihen, restat 134.

Warumb wir aber die denomination herabziehen vnd sagen, das Residuum sey die cleinste zal? Nach dem ersten capitell: *Omnis numerus rationans totum* etc. Ein ytzliche zal, so die thailt das gantz vnd herabgezogen, so thailet auch das Residuum. Dieweil also gemelte divisores thailen die gantze der proposition gemes, vnd thailen auch die denomination, sie thailen auch das Residuum, vnd also haben wir beider seit den text schrifftlich eingefurt.

In disem Exempel jtzt vorzeichendt ist denominator communis 360, vnnd nach dem jm ersten Exempel vermeldung gethun neben der figur des Exempels, das ein ytzliche zal aus gemeinem Nenner gezogen durch alle divisores, aufsgenomen durch seinen, soll aufgehen, | so begibt sich in solchem Exempel jtzd vorhanden, das 60 durch seinen diuisorem, welchs nicht sein solte, aufgehet, vnd nicht durch die andern alle. Deshalben befinden wir, vnd mogen sagen, das solchs vnmuglich sey zu machen, vnd andere dergleichen, so sich begibt, das ein zal durch seinen thailer vfgehebt vnd 0 restirent ist. Vnd volget also das funffte Capitel.

106′

4	3	2	1	Residuantes
5	6	8	9	Divisores
72	0	45	40	Partes denominatae
864		900	280	Reducirt.

De numeris compositis corumque expositio, Capitulum quintum, et primo de perfectis.

Omnes numeros, quorum est mensura praeter unitatem, compositos esse contra se necesse est. Quod si partium aliquotarum numerositates colliguntur, aut maiorem, aut minorem, aut aequalem toto sortiuntur substantiam. Horum autem tam parium quam imparium solum perfecti, qui paritatis sunt substantiae, numerositatibus suarum partium reducuntur aequales, qui et paucissimi sunt et unius constanti ordine limitum procreati.[1])

Nachdem Algebras gesaget hat de numeris primis zum ersten, so do

1) Der vorliegende Paragraph handelt von nicht theilerfremden Zahlen und zunächst unter diesen von den vollkommenen Zahlen, von denen die drei ersten angegeben und auf die betreffende Eigenschaft geprüft werden.

furgelegt wirdt ein einige zal, zu finden, ob die primus sei oder nicht; zum andern, ob vns furgelegt wurden zwo zaln, zu finden, ob die primi contra se sein oder nicht, vnd jr groste mensur; zum dritt hat er gesagt von einer gemeinsamen mensur vnitatis aller zaln; zum vierdten halt er zu verstehn 107 geben zu finden ein zal, welche mit vorgeschlagenen divisoribus primi sein, vnd also ist de primis gesagt. Hierumb cleret er sprechende von den numeris compositis zum teutschen also lautendt:

Aller zalen, welcher do ist ein gemeine Mensur on die vnitet, dauon wir gesagt haben, dieselbigen seind von not compositi. Do derselbigen zal jrer benenten thail zusammen geclaubt werden, so machen die ein grosere zal, oder eine cleinere, oder eine gleiche zal der furgelegten. Der aller miteinander so do seind gerad oder vngerad allein die perfecti gesprochen, welche einer geraden substantzen sein, werdt gefunden werden gleich den zalen zusamen jrer gemelten thail, welcher auch sonst wenig ist, vnd einer vnvoruckten ordnung der limit, das ist der staffel der zalen, gemacht werden.

Disen text schrifftlich vorstentnus zu geben, cleret der text nachuolgendt von den diminutis vnd superfluis, welche, so ire benente thail zusamengefugt werden, machen sie ein weil zu viel, vnd ein weil zu wenig der gantzn zal vngemes. Aber die perfecti, von welchen wir sagen wollen, das ist von den volkhumenen zaln, die seind irer benanten thail zusam gesatzt gleich der furgelegten zaln, welcher zumal wenig ist, vnd werden also funden, so wir setzen nach ordnung die pariter pares also (Fig. 16): | 107′

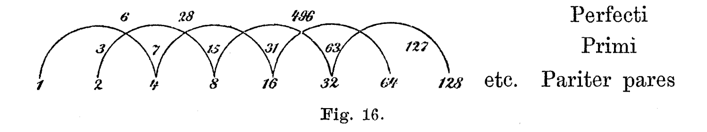


Fig. 16.

So wir addirn die ersten zwei $1 + 2$, werden 3, der ist primus durch das erst Capitel. Also 3 werden gemultiplicirt mit dem letzten pariter parem geaddirt, das was 2; werden 6, vnd also sprechen wir, das do 6 ist compositus durch das erst capitel, vnd ist perfectus vnter dem limit 10. Wann ein ytzlicher limit hat nicht mehr dann eines, wann darumb sagt der text, jr seind wenig vnd nach ordnung der limites gemacht. Wann, so wir 6 examinirn nach dem ersten capitel, finden wir in der scala Jacob, das ist in dem descens der leiter, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$. Das seind alle benente thail in 6, welche an jrer zalen, sagt der text, zusamen seind gleich 6, der gantzen zal. Wann $\frac{1}{3}$ ist 2, $\frac{1}{2}$ ist 3 vnd $\frac{1}{6}$ ist 1; das zusamen facit 6, vnd solchs

endet khein zal vnter 10, die do seind compositi gerad oder vngerad. Also hat der limit vnter dem centenario auch nicht mehr dann ein. Wann wir in der obern disposition addirn 3 vnd 4, werden 7. Der ist primus, mul-
108 tiplicirt mit dem letzten pariter parem, als 4, | khomen 28, welcher ist perfectus oder volkhumene zal vnter 100. Wann, so wir jn examinirn nach vnserm ersten gesatzten Capitel des tractats, so finden wir jn *scala* Jacob $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{28}$, das seind alle bemelte Theil von 28, welche an der zal machen 28. Wann $\frac{1}{2}$ ist 14, $\frac{1}{14}$ ist 2, $\frac{1}{7}$ ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 7 vnd $\frac{1}{28}$ ist 1. Das alles zusamen macht 28, vnd das thut khein andere zal vnter 100, vnd hierumb wirdt sie des andern limits gerechent ein volkhomene zal. So enden sich alle perfecti in 6 vnd 8 durch alle limiten aus. Wir gehen fort, addirn 8 zu 7, werden 15, vnd examinirn den nach dem ersten Capitell, finden wir, das der nicht primus ist, darumb mag er nicht perfectum constituiren, vnd vacat mit 8. Wann, so das mit 15 gemultiplicirt, facit 120, das wirdt nit perfectus vnd khemen zwene vnter dem Limite millenario. Wann so wir addirn 15 vnd 16, werden 31, vnd der ist primus. So der mit 16 wirdt multiplicirt, facit 496, vnd der ist perfectus vnter dem limit 1000, vnd khein andere. Wann alle seine benente thail seind die zalen von den er compositus ist, das ist von 1 von 2, 4, 8, 16, welche also jre Correlatiua multiplication herwider haben. Wann 1 ist genant $\frac{1}{496}$ vnd herwieder von 496 ist genandt $\frac{1}{1}$, also $\frac{1}{2}$ ist 248 vnd $\frac{1}{248}$ ist 2; $\frac{1}{4}$ ist 124 vnd $\frac{1}{124}$ ist 4; vnd $\frac{1}{8}$ ist 62 vnd $\frac{1}{62}$ ist 8; vnd $\frac{1}{16}$ ist 31
108′ | vnd $\frac{1}{31}$ ist 16, vnd solchs alles ist 496, khan also khein andere zal solchs vnter 1000 volenden, vnd also beschliesen wir mit dem text, das alle perfecti pares sein, welche ex suppositione werden gesagt compositi. Also mogen wir finden mit Hilfe des ersten Capitels alle thaile den compositen gleich wie der incompositen, vnd volgt das sechst Capitel.

De numeris compositis, qui diminuti atque superflui nominantur, Capitulum sextum.

Diminuti vero compositi contra se sunt, qui et substantiam paritatis atque imparitatis partiti sunt. Sub pariter namque paribus atque pariter imparibus resident simul et sub secundis et compositis imparibus. Superflui autem immoderata plenitudine sui corporis partium numerositate substantiam superabunt, et ipsi quidem sub sola impariter pari forma nascentur.[1])

1) In diesem Kapitel werden die mangelhaften und überschiessenden Zahlen behandelt, dabei auch die Ausdrücke *pariter par*, *pariter impar* und *impariter par* erklärt, letztere besonders deshalb, weil die *numeri superflui* sich nur unter den letztern finden sollen. Als Beispiel dient 36, das nach zweimaliger Halbierung unpaarig wird, und dessen Divisorensumme 55 beträgt.



Als Algebras hat gecleret jm negsten Capitel: *aut maiorem, aut minorem, aut aequalem* etc. Nun hat er aequalem demonstrirt, perfectum genant, eruolget nunmals die andern membra dividentia den numerum compositum, vnd laut der text zum teutschen also: | 109

Es seind auch diminuten compositi an jn selbst, welche auch gethailt haben die substantz gerad vnd vngerad. Wann sie seind vnter den pariter paribus vnd vnter den pariter imparibus funden, auch vnter den Compositen der imparen. Aber die vberflussigen zalen seind mit einer vngewisen vberflussigkeit vbertreffen durch jre benente thail der gantzen substantz der furgelegten zal, vnd werden allein geborn vnter den impariter paribus.

Von disen text zu sagen, nachdem er zwen partes hat von den diminutis vnd superfluis, ist not, das wir sagen kurtz zu vormelden, was pariter par sey, pariter impar vnd impariter par. Kurtz zu sagen, nachdem allenthalben in andern Buchern der kindern gemain ist, doch von anfahender diser disciplinen, so haisen wir, das pariter pares, die do mogen halb gethailt werden, das ist mit 2, bifs auf vnitatem, als 16, 32, 8 etc. Wir haisen die pariter impares, die do mit 2 gethailt werden einmal vnd nicht weither khonnen descendirn in paritate, das ist in der geradigkeit, als 10, 14, 22, 26, 34 etc. Wir nennen die impariter pares, welche descendiren vngleich in paritate einmal mehr dann das ander, khomen sie doch nicht vff die gemeinen mensur vnitatem, als 12, 36, 144. Vnd ye weither sie descendirn in paritate, ye mehr die benanten thaile, von dem sie wirdt compositus genant, erwachsen zusamen vber die substantz jrer zal, | daraus 109′ sie genomen sind. Als wir wollen cleren den ersten thail der diminuten; sagt der text, das sie allein vnter dem pariter pare seind vnd vnter den pariter imparibus. Wann, so wir setzen einen ytzlichen pariter parem vnd examinirn den in der scala auch, nachdem er absteigt in paritate vff die vnitet, finden wir, das sie allwegen diminuti seind, das ist, das sie nicht gantz jre zal vermugen die benenten thail, daraus sie genomen seind, vnd ist der Bruch allwegen an einer vnitet in pariter paritibus. Als wir setzen 16; hat $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ vnd $\frac{1}{16}$, wann sie nach ordnung nach disen zalen in paritate steiget. $\frac{1}{2}$ ist 8, $\frac{1}{4}$ ist 4, $\frac{1}{8}$ ist 2, vnd $\frac{1}{16}$ ist 1, vnd so wir das alles copulirn, so finden wir 15, das ist einer vnitet minder, dann der corpus ist, vnd also ist es in allen pariter paribus, vnd hierumb so sprechen wir propter quid in der dupla progression, das man das letzte sol duplicirn vnd vnitatem oder das erste herabzihen, dann das letzte hat alle benante fordere thaile, die zusamen machen corpus minus 1, vnd hierumb hastu vrsach, warumb das geschieht etc. Die diminuti werden auch gemacht von den

pariter imparibus. Als wir sprechen 14, welcher compositus ist, vnd 110 so seine benenten thail zusamen werden | gethun, machen sie weniger, dann das corpus ist. Sie werden auch gefunden vnter den imparibus die do compositi seind, als 27. Wann $\frac{1}{3}$ ist 9, vnd $\frac{1}{9}$ ist 3, vnd $\frac{1}{27}$ ist 1; solche thail zusamen machen 13, die dann weniger seind dann das Corpus. Aber als der text sagt im andern thail, die superflui, das ist die vberflussigen, werden allein funden vnter den impariter paribus vnd sunderlich, welche so sie nimer descendirn mogen, das sie seind secundi vnd compositi der inparen. Als 36, so wir descendirn: halb ist 18, halb ist 9, vnd 9 ist secundus vnd compositus. Hierumb wirdt 36 zumal sehr superfluus gesprochen. Wann $\frac{1}{2}$ ist 18, $\frac{1}{4}$ ist 9, $\frac{1}{6}$ ist 6, $\frac{1}{9}$ ist 4, $\frac{1}{12}$ ist 3, vnd $\frac{1}{3}$ ist 12, vnd $\frac{1}{18}$ ist 2, vnd $\frac{1}{36}$ ist 1. Solchs alles zusamen facit 55. Vnd also sprechen wir, das alle die zaln diminuti, superflui vnd perfecti seind compositi, vnd nicht primi, die wir also jrer thailen, dauon sie compositi seind, mogen examinirn nach vnserm ersten Capitel. Vnd also haben wir grundlich gesagt von den primis vnd compositis, welche so jre jtzliche einfeltig proponirt wirdt oder selbander, zu finden dieselbig mensur. Nun volget hernach von den zalen, so jr mehr dann zwo oder eine proponirt werden, zu erforschen, welchs die groste Mensur sey vnter jnen, oder ob sie gegeneinander 110′ primi seind oder nicht. Dann es khumbt, | das vnterweilen zwo compositi sein vnd von des driten wegen mussen sie vntereinander vnd gegeneinander primi gehalten werden, das ist, das sie minimi werden gesatzt in der proportion der furgab, als volgendt ist.

De numeris rationalibus et communicantibus, ex qua aequatione digesta semper nascentur rationales in coniecturis et antiquiori modo. Capitulum septimum.

Omnes numeros, quorum proportio ut numeri ad numerum, rationales et communicantes inseruimus, eosque absolutos semper ex sola nostra prima aequatione unitatuum nasci descripsimus, quos et in coniecturis Ylici *quatuor quantitatum proportionalium expediti sunt, alii vero ex erroribus, quos Arabes itata vocant, nos autem lancem ducem posuimus, produxerint. Quorum vero quandoque proportio non velut numeri ad numerum, aliis dictis aequationibus rationari investigentur, quare dictas sectas refutare antiquorum necesse est.*[1])

1) Dieses Kapitel will zeigen, dass der einfache falsche Ansatz, von dem Verfasser die vier proportionierten Zahlen des Yles genannt, so wenig als der doppelte falsche Ansatz, die *Itata* der Araber und die *Lances* der Lateiner des Mittelalters, zur Auflösung von solchen Aufgaben gebraucht werden können, welche auf Gleichungen des zweiten Grades führen, sondern dass sie einzig und allein bei solchen zum Ziele führen, welche auf solche des ersten Grades zurück-



Hie saget Algebras von den zaln, so jr mehr dann zwo proportionirt werden, zu erforschen ob die primi sein vnd gehalten werden nach der proportion die sie haben, vnd laut der text zum teutschen also:

Wir haben gesagt vnd gesatzt, das alle zal ratio|nales vnd 111 communicantes, welcher zaln sich die proportion heltt als do ein zal zu der andern, also sind sie primi, so ist vnitas gesagt die gemeine mensur, seind sie compositi, so seind sie communicantes, die werden allein proportionirt oder selbander; welche zaln also, die wir cleret haben, werden allein geporn rationales alwgen rationales jrer vniteten von vnser erst gesagten equation, welche also jn der satzung oder coniecturen der proportionum von den Ylicis, die do waren der secten Ylis, examinirt wurden vnd funden durch 4 proportionalische zalen. Aber andere, die do waren der secten der alten Arabischen sorgten, das do in den Coniecturen wurden gefunden allwegen durch die errores rationalische zaln, die die Arabes nenten Itata, das wir nennen lancem, das ist numerum fallacem, ein weitleuffige vngewise zal der Enigma nicht gemes, vnd erforschen hieraus die obgerurten zaln, die do allwegen werden funden rationales. Sagten auch, was also durch die errores oder Ylische zaln nit funden wirdt, das das vnmuglich in der zaln gegrundt werden muge. Aber, sagt der text, die zalen, welcher khein proportion zusamen ist, als do mag gesein einer zal zu der andern, sie sey geprochen oder gantz werden gefunden zu rationirn durch die andere vnsere equationes an die erste, welche zaln also von not wegen zurucke schlagen oder richten die gemelten secten von den alten gesatzt. | 111′

Von disem text einen schrifftlichen Bericht einzunemen, sagt der text, das alle zaln rationalisch sein, als welche do haben ein proportz als ein zal zu der andern, von den dann genug gesagt ist. Als ich spreche, $1\frac{1}{3}$ gegen $2\frac{2}{7}$ hat ein proportz, als do hat jr numerus 48 gegen 28. Hierumb so seind sie rationales, dann vnitas ist ein gemeine mensur, vnd communicantes, wann sie noch vber die gemeinenn mensur haben 4. Welche 4 sie thailt jn die vordern proportion: als 7 gegen 12 seind als 28 gegen 48.

geführt werden können. Obwohl die Alten behauptet hätten, wenn durch eine der beiden erwähnten Methoden keine rationalen Zahlen gefunden werden könnten wären die Aufgaben überhaupt nicht möglich, so zeigt Verf. doch, dass gerade durch die Gleichungen solche Lösungen gefunden werden können, die den Alten als unlösbar galten. So würde die in Zeichen geschriebene Gleichung $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 13\frac{1}{2}$ nach dem Verfahren des Yles $x = 3\frac{3}{8}$, nach dem der Araber $10\frac{4}{71}$ geben, obwohl der wirkliche Werth von $x = 9$ ist.

Vnd solche zaln werden alwegen aus der ersten gesatzten Equation. Wann, das wir wollen sprechen, es mochte radix von 7 oder radix von 3 herauskhomen, die haben kheine proportz als ein zal gegen der andern, wann jr radix nicht wissent ist. Also mogen wir sprechen, das allwegen jn den furgaben der Arismeticen vnd Geometern, was jn vnserer ersten equation fellet, das also one zweifel die furgabe data, das ist, das sie mag sein rationalisch. Aber die Alten, als do waren die von secten Ylis, wusten noch nicht von den equationibus Algebrae, vnd sprachen, wann do ein furgab kheme dem grossen geometro Ylo, wer also dieselbe frag durch die vier quantitet der proportionalischen satzung nicht vfgelost mocht werden,
112 also zu verstehen, das sie nach aller muglig|keit examinirt wirdt, als ane zweifel Ylis kunt, sagten die gemelten Ylici, das solche fragstückhe der zalen vngemes weren. Weiter sagt der text: *Alii vero* etc. Aber etzliche andere, die do waren der secten der alten Araber, sagtenn, hetten ein gemein scibile bej jnen gesprochen Itata, das weren Errores, do durch sie examinirten, so in Arithmetern vnd Geometern kheine solche scibile, als pej vns wirdt gesagt, vnd das nemen mogen von den weitleufigen zalen der aufgab vngemes, das ist, das sie durch zwei weitleüfige zaln der Aufgab a casu genomen vnd vngeproportionirt funden, durch die errores, das ist, wie weit sie a veritate distirten, das ist, wie weit sie irrten, do drucken sie aus ein rationalische zal der Aufgabe gemes, vnd sagtenn auch, welche aufgab, so sie examinirt wurde durch die lances, als sie von rechts wegen solten, vnd nicht durch die errores funden wirdt, die were bei jnen vnmuglich zu erforschen. Sagt der text furter: *quorum vero etc.* So do aber khumbt, das do ist die proportion einer zal gegen der andern nicht als ein rationalische zal zu der andern, solche zal mussen erforscht werden durch vnser Gebra, das ist durch die equationes, die wir gesatzt haben an die erste. Also mogen wir sagen mit dem text Algebrae, das solche zaln
112′ refutiren vnd vorcleinen die secten | von den alten gesatzt, wie wol das vnsere altenn viel hubscher fragen haben aufgelost, vnd doch durch kheine genante Regel soluirt, sonder durch particulares demonstrationes, von welchen also vnser Gebra vnd Almuchabola sagendt ist, welche zaln hieraus rationalisch ergehen mogen vnd welche nicht, also mogen wir concludirn mit dem text, das alle zaln, so durch die erste equation ersprissen, werden rationalisch geporn vnd nimmermehr irrationalisch. Also mugen auch alle fragen durch die aufgelost werden, die do gehen durch die vier quantitet der Ylicorum, oder durch die errores der Arraben, vnd herwiderumb, wo do aufgelost ist durch die 4 quantitet proportionaln oder durch die lances, mogen auch gehen durch vnsere gesatzte equationes, nemlich durch die erste. Aber viel rationalische zaln werden geporn durch vnser andere ge-

satzte equationes, die do nimer funden werden durch die lances, vnd hierumb werden durch solche vnser equationes, except die erste, refutirn die gemelten secten der Araben vnd der Ylicorum. Als wir setzen von den vorstant wegen des texts, zu finden ein zal, welcher ich $\frac{1}{2}$ vnd $\frac{1}{3}$ in vnd mit einander multiplicir, das $13\frac{1}{2}$ khume. So wir das examinirn durch die quantitet der Ylicorum, so erfindt | sich das nicht, vnd wird examinirt 113 nach der Ylischen Form also vnd nicht anderst. Wir nemen ein zal 24, die hat $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{2}$, wann $\frac{1}{3}$ ist 8, vnd $\frac{1}{2}$ ist 12, vnd 12 mal 8 macht 96. Sprich 96, das Examen, gibt 24, propositum, was gibt $13\frac{1}{2}$, das Examen? facit nach der Ylischen zaln oder form $3\frac{3}{8}$, vnd so man das examinirt probative, so felet es. Examinirn wir das durch die errores, dermas wir setzen lancem 12, sagt in errore zuuil $11\frac{1}{2}$; setzen wir den lancem 24, so khumbt zuuil $82\frac{1}{2}$, volfuren das durch die errores, so finden wir $10\frac{4}{71}$. So wir das probatiue examinirn, so findt sich vngerecht, vnd doch solche zal muglich zu finden ist 9, vnd hierumb das Exempel a latere eingefurt, dapei du magst mercken, das viel seind, die do rationalisch durch vnsere equationes, ausgenomen die ersten, erfunden werden, ohne durch die 4 proportionalisch quantitet oder durch die errores, Itata genandt, wann wir khumen durch vnsere andere Equation auf dj rationalische zal 9. Also volget hernach von dem ersten membro zu sagen, als der text sagt: *quos et in coniecturis*, das ist von den vier proportionalischen zaln, die do allererst Yles gebraucht hat zu coniecturis. | 113′

De quatuor numeris proportionalibus Ylicis de eorumque mensura, qua minimos contra se proportione data terminos exuentur. Capitulum octavum.

Quorum proportio primi ad tertium data, eademque secundi ad quartum data erit, qua vero data primi ad secundum, eadem et data erit tertii ad quartum. Ex hoc manifestum, quartum quotientem primi divisoris producti tertii per secundum. Constat proprium, id produci ab extremitatibus, quod ex medietatibus conficitur; in minimis enim terminis quatuor datos contra se esse reperies proportione eadem proportionales.

Hie saget Algebras von den vier proportionalischen zaln Ylis, vnd laut gemelter text zum teutschen also:

Welcher zaln die proportion des ersten vnd dritten ist geben, dieselbige proportion wirdt auch gegeben dem andern gegen den vierdten; welche proportion aber offenbar ist des ersten vnd andern, dieselbige wirdt auch gegeben dem dritten gegen dem vierdten. Hierumb wirdt offenbar, das die vierdte zal ist ein quotient der ersten zal, des thailers, des multiplicirten dritten

mit dem andern. Also sprechen wir, das ein rechte eigenschaft ist der proportionalischen satzung, das khumbt von den extremis, das ist von dem ersten vnd letzten, gemultiplicirt gleich dem, 114 das do khumbt aus | den zweien mitteln, das ist vom dritten vnd andern. Also finden wir, das in vier termini, die do noti vnd gegeben seind, die vier proportionalisch zal werden funden in andern vier zaln vff das cleinste jn der ersten proportion rationales.

Von disem text zu sagen vnd einen schrifftlichen sin einzufuren, saget er eigentlich: welcher zaln die erste proportion geben zur dritten ist, dieselbige wirdt auch gegeben dem andern vnd vierdten. Wann wir sagen hier von den vier proportionalischen zaln, die erste zur andern als die dritt zur vierten, also werden sie auch permutatim aus der 16. proposition quinti Euclidis Geometriae[1]) proportionales sein, wann welche proportionales seind, seind auch permutatim proportionales; vnd welche auch permutatim proportionales seind, die seind auch per diffinitionem proportionalium proportionales. Als wir setzen wollen a latere dem text: Ye 6 Eln vor 10 fl., wie 12 khumem vor 20 fl., wann so 6 vmb 10 komen, so sein 12 zwir 6, darumb mufsen 12 komen vmb 20, das ist vmb zwir 10. Sprechen wir permutatim, das do sein disparate 6 gegen 12 als 10 gegen 20.

eln	fl.
a. 6	*c.* 10
b. 12	*d.* 20

Sagt der text von dem ersten corollario, der letzte terminus were der quotient des gemultiplicirten products des dritten vnd andern gethailt durch den ersten. Als wir multiplicirn 10 mit 12, facit 120, thailen solchs durch den ersten; 114' khumpt 20: also ist 20 der quotient des products | 120, welcher entsprossen ist ducch den andern vnd dritten gemultiplicirt, welche also die mittlen termini seind vnter den vieren proportionalen quantiteten. mogen wir sagen mit dem text, das aus dem multiplicirn, nemlich der mitteln khumen sei dem gleich, das von den extremen khome. So nun der erste terminus ist divisor vnd wirdt gefurt jn quotienten den letzten, so khumht wider das gemultiplicirt ist worden vom andern vnd dritten, als vns das grundtlich

1) Euclides V, 16: Si fuerint quatuor quantitates proportionales, permutatim quoque proportionales erunt.

Der ganze Paragraph handelt von den Proportionen des Yles, und zeigt, wie man eine vorgelegte Proportion sowohl nach jeder ihrer vier Glieder als Unbekannten auflösen kann, wie auch die Umwandlung einer solchen in eine andere, die vier relative Primzahlen enthält. Als Beispiel bringt er die Proportion:

$$480 : 900 = 108 : 216$$

auf die einfachste Form $40 : 80 = 9 : 18$, indem er sämtliche Glieder durch das grösste gemeinschaftliche Maass aller vier Glieder, das ist 12, dividiert.

beweist wirdt septimo Geometriae an der zweinzigsten proposition demonstrirn. Von kurtzwegen sagt der text weiter, das solche vier quantitet proportionalisch werden auch jn vorgemelter proportion jn den cleinsten termini proportionales. Solchs zu ergrunden, von wegen wir hie ad propositum reden, die mensur zu finden dreyer oder vier terminorum oder mehr, welche sie ad minimos terminos theilet vnvorruckter proportion. Wir suchen die ersten zwen nach vnserm dritten Capitel, vnd finden jre groste Mensur. Dieselbigen Mensur nemen wir vnd examinirn den dritten damitt, anch nach dem dritten capitel, vnd finden aldo noch ein mensur. Wir nemen aber solche mensur vnd mensuriren oder examinirn den vierdten, vnd finden do aber ein Mensur, vnd solche, | die do durch ausgeht, die thailet sie ad **115** minimos terminos jn der ersten pleibenden proportion. Als wir setzenn wollen 4 quantitet proportionales, vnd wollen sie examinirn jn die minsten terminos. Wir suchen die ersten zwene, finden sie nach dem ersten Capitel,

a. 480 *c.* 108
b. 960 *d.* 216

das 480 die groste Mensur ist der ersten zweier nach vnserm dritten Capitel. Wir nemen 480, die Mensur, examinirn den dritten 108 damit, vnd finden, das die groste Mensur ist der Zweier 480 vnd 108 ist 12; wir nemen 12, die mensur, vnd examinirn aber nach dem dritten Capitel 216 damit, vnd finden, das 12 solche zal vfthailt. Und so das nicht geschehen were, so hetten wir die gesucht nach dem dritten Capitel; dieweil aber 12 die 216 aufthailt, so sprechen wir nach der dritten proportion des siebenden Buchs

a · 40 · *c* · 9
b · 80 *d* · 18

Geometriae, das 12 die groste Mensur ist vnter den vorgesatzten zaln, vnd ist khein ander terminus der obgemelten zaln aussucht jn ehegemelter vnverruckter proportion dann 12. So die werden aufgelost, khumen 40 · 80 · 9 · 18, vnd sein numeri contra se, das ist gegen ehegerurter proportion der zalen, die do waren 480 · 960 · 108 · 216. Also concludirn wir mit dem text, das sie 12 examinirt hat | in die minsten zal der vorigen proportion. **115'**

De numeris minimis contra se sua proportioue exuta productis. Capitulum nonum.

Dixerunt Arabes ex itata semper produci numeros rationales minimos contra se sua proportione exutos, namque primi unitatis ad secundum examinans proportione data ad eadem data erit quaesiti ad propositum data, quae unitatis proportione ad quaesitum, et eadem data erit examinantis ad propositum. Ec hoc palam erit, quatuor numeros Yliacos esse proportionales, et in quibus ita non fuerit, nequaquam rationales per Itata invenies. Quaesitum necesse

erit moram relinqui equationibus, quibus praeter primam demonstrationem gestavimus.[1])

Hie saget ALGEBRAS vns von den zaln, die do werden exuirt in die minste proportion aus den zaln Itatis, vnd laut der text zum deutschen also:

Es haben gesagt die alten Arabes, das do aus den zaln zu den erroribus werden gefurt rationalische zaln, die do seind ausgezogen in die minste proportion jrer terminum. Dann des ersten der vnitet zu dem andern der erforschung gegebener proportionen, dieselbe wirdt auch gegeben der suchenden zal gegen der furgab; vnd so der vnitet proportion gegeben zu der gesuchten 116 zal offenbar ist, dieselbige wirdt | auch gegeben der zaln des examinirn zu der furgelegtenn. Hierumb wirdt offenbar, das do werden 4 YLIS zal proportionales, vnd jn welchen zaln das auch also nicht funden wirdt, so wirdt nimermehr rationirt das quaesitum durch Itata, sunder es wirdt gelassen die beharrung den ander equation, von welcher wir sunderlich an die ersten haben gesagt ir demonstrationes.

Von disem text gleichmesig vorgethan einen vorstentlichen sin einzufueren, mussen wir cleren die gemelten Itata der Araben, vnd was die gesatzt haben, daraus sie nachuolgendt haben gefurt rationalische zaln in numeros exutos, das ist, die do seind die cleinsten an jrer proportion, mercken wir, das sie haben genant die Itata regula errorum, die wir sagende die regula lancis, die do ist in zweien weitleufigen zaln, welche examinirt werden nach der aufgab, die dann sagendt ist zuuil oder zu wenig der Aufgab gemes. Die selbigen zwo zaln nenneten sie errores, das waren die jrrenden zal von der warheit der auffgab durch das examen funden die genenten lances, welche errores, so die gleich warn nach dem Excess oder defect der Wahrheit, so ziehen sie die von einander, und sprechen, das der Residuant solte sein der thailer zu der zalen, die man thailen soltt, welche sie producirten, so sie multiplicirten einen lancem jn den errorem des andern, 116′ vnd zeuchen auch | ein product vom andern. Sagende sie, das solcher Restant solte sein die zal, die man thailen sollt, durch welche also beweist wurde die frag, so sie mit gedachtem thailer gethailt wurdt. Wer aber sach, das das defect vnd excess der errorum nicht gleich were, wo, vnd

---

1) Dieses Kapitel setzt in bekannter Weise den doppelten falschen Ansatz auseinander und kommt am Schlusse nochmals darauf zurück, dass nur solche Aufgaben durch denselben gelöst werden können, welche den ersten Grad nicht übersteigen. In den Dresdner Handschriften *C. 405* und *C. 349* sind die in den Text eingeschobenen übersichtlichen Beispiele nicht beigegeben, welche die Anordnung der Rechnung für jeden Fall andeuten.

sie vor voneinander gezogen waren, damit gemacht ward der thailer vnd die zalen, damit man thailen soltt, also wurden sie gemacht; so man addirt die excess vnd defect, wurdt der diuisor, vnd die gemultiplicirten producta der errores in des andern lancem werde gesagt der diuidendus. Also solche mainung des texts nenneten sie Itata. Das wir aber auf die meinung des texts khomen, wollen wir setzen ein einfurendt leicht Exempel durch die errores, damit wir khumen vf den Intentum des auctors. Zu finden ein zal, welche, so wir von jr nemen $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, vnd solche zusamen thun, das 47 khumen. Sagten die alten Arabes vnd namen vngeuerlich ein zal oder lancem, als 12, welche sie nach gemelter frage examinirten. Wann $\frac{1}{3}$ von 12 ist 4, $\frac{1}{4}$ ist 3 vnd $\frac{1}{5}$ ist $2\frac{2}{5}$. Solchs zusam macht $9\frac{2}{5}$ vnd jrret von 47 jn $37\frac{3}{5}$. Also sagten sie, das der defect, als $37\frac{3}{5}$, ward genant der error von

Lanx		Error	
12	defectus	$37\frac{3}{5}$	residuum
		Error	$9\frac{2}{5}$
24	defectus	$28\frac{1}{5}$	

der wahrheit, der aufgefunden | durch gemelten lancem. Sie namen den 117 andern lancem, als 24 mocht sein, welchen sie auch also examinirten vnd funden aber im defect der warheit $28\frac{1}{5}$. Also ziehen sie einen errorem vom andern, nachdem sie gleich seind in defectu, vnd wird der residuant $9\frac{2}{5}$. Das sollte sein der divisor. Als nun multiplicirn sie ein lancem in den errorem des andern, als 24 mit $37\frac{3}{5}$ vnd 12 mit $28\frac{1}{5}$, vnd nemen solche producta von einander, jnmassen wir subtrahirn, restabunt 564, vnd thailen das vbrig, khumb 60, das quaesitum. Vnd desgleichen theten sie, wo die errores excedirten. Wir wollen setzen von anheben diser kunst ein schlecht einfurendt Exempel durch die errores, jn welchem Exempel sie beide superabundant sein oder excediren, als wir schimpflich setzen: Es wollen jr zween khaufen ein pferdt vor 30 fl. Spricht der erst zum andern: leih mir deines gelds $\frac{1}{2}$, so hab jch 30 fl,, so wil ich obgemelt pferd kauffen. Spricht der ander zum ersten sprechende: leih mir deins gelts '$\frac{1}{3}$, so will ich das pferdt kaufen, so hab ich auch 30 fl. Die frage, wieuil yeder gelts habe. Setzen wir lancem, der erst hab 12 gehabt, so mus von not wegen der ander 36 haben. Wann, so er dem ersten $\frac{1}{2}$ leihet, so hat er 30; gibt aber der erst dem andern $\frac{1}{3}$, so khumbt $+$ 10 an der Warheit. Wir nemen den andern lancem vnd examinirn in dermas, als 9, so werden wir finden im excess 15, subtrahirn wir | obgemelte 10 von 15, pleiben 5 vor 117' den thailer. Wir multiplicirn ein jtzlichen lancem mit des andern error vnd subtrahirn die producta von einander, restabunt 90, vnd diuidirn wie vor, khumbt 18, das quesitum, also mus der ander von not wegen 24 fl. haben, vnd also hastu genuglich, so die errores excedirn oder diminuirn. Nun von dem

Lanx		Error	
12	excessus	10	residuum
9	excessus	15	5

dritten punct der alten secten der Itata zu sagen, setzen wir aber ein kindisch Exempel, in welchem die errores nicht gleich sind, sondern von einem lance der ein diminuirt wirdt vnd vom andern excedirt. Es hat einer einen seuberlichen Deckel, wiegt 16 lot, darzu zween Becher, vnd so er den Deckel setzet vff den ersten Becher, so wiegt er 5 mal souil sam der andern; so er auf den andern gesatzt wirdt, so vberwiegt er den ersten 8 mal. Nun fragen wir, wieuil yeder pecher gewogen hab. Setzen wir lancem 12. Nun habe, so der deckel darauf stund er 28, sagt die proposition, er wege zu 5 mal mehr dann der ander: darumb thail 28 in 5, facit $5\frac{3}{5}$, Souil mus der ander gewogen haben. So wir nun den deckel darauf setzen, khomen $21\frac{3}{5}$, solt 96 sein, so ist error defectus $74\frac{2}{5}$. Wir setzen den andern lancem 2, vnd examinirn vorigermassen, finden wir errorem excedirn $3\frac{3}{5}$. Also addirten sie die errores, wurden 78, das solt sein der thailer, vnd multiplicirten einen

Lanx	Error	
12	defectus $74\frac{2}{5}$	summa
2	excessus $3\frac{3}{5}$	78

118 yeden Lancem in des andern errorem, addirten | die producta, khomen 192. So wir die thailen mit vorgemachten thailer, khomen $2\frac{6}{13}$. So schwer ist der erste Becher gewest. So du difs examinirt der proportion gemes, wie du dann dem lancem hast gethan, findestu, das der ander hat gewogen $3\frac{9}{13}$, vnd ist recht nach der proposition. Also haben wir cleret den punct, die difficultates der Itata. Nun von solcher einzufuren von jres wegen den text vorgemeldet von der Itata, das ist von den lancibus vnd erroribus, sagen wir, das der text vorgemeldet: Hierumb, wann sie gebern allwegen, die errores vnd lances, so die nach der proposition examinirt werden, rationalische zaln, welche also, als der text sagett, werden producirt ex Itata allwegen in die cleinsten proportion der 4 quantitet proportionalen. Als wir nemen vor, damit der text desto vorstentlicher sey, das erste gesatzte Exempel, so finden wir, das wir ex Itata producirn minimos numeros contra se proportione exutos nach den 4 quantiteten proportionalium der Ylischen. Als wir setzten der lanx war 12, der wurde examinirt, khomen $9\frac{3}{5}$, welche sich halten gegen der vnitet als 1 gegen $\frac{47}{60}$, wann 12 wirdt gerechent vor 1 gantz. Nun ist $9\frac{3}{5}$ nicht gantz 12, wann $\frac{9\frac{3}{5}}{12}$ macht $\frac{47}{60}$, also setzen wir 47 das propositum vnd suchen ein zal, die do hat die proportz gegen jr als 1 gegen $\frac{47}{60}$. Also finden wir 60, quesitum, durch vnser vorgesatzte negste 118' Capitel khombt, das wir | finden durch die 4 quantitet Ylis, das 1 kegen $\frac{47}{60}$ sein in der proportion als 60 gegen 47, welche so sie reducirt werden, komen sie jn vier quantitates proportionales, die do numeri rationales seind. Also sprechen wir mit dem text, wo solchs nicht geschicht, das kheine rationalische zal noch die berichtunge der frage nicht khan gefunden werden

durch die Itata, sondern sie wirdt gleichmesig gerechent vnser ersten Regel Gebre, vnd also solche Frage zu berichten wirdt gelassen vnsern Equationibus, die wir ane vnser ersten equation demonstrirt haben. Als wir setzen wollten, vff das wir khomen mogen zu beschliesen den text, wir suchen ein zal, wann wir daraus nemen $\frac{1}{3}$ vnd $\frac{1}{4}$ vnd multiplicirn das mit einander, das 9 khomen, vnd setzen durch gemelte Itata den ersten lancem 12 vnd den andern 24 etc., vnd so wir solchs examinirn finden wir quaesitum 11, vnd so wir die proportz suchen 11 als quaesiti vnd 9 das propositum, so finden wir nach dem text 11 gegen 9. Also suchen wir gegen der vnitet auch die proportion, finden wir $1\frac{9}{11}$, vnd solchs $1\frac{9}{11}$ soll sein examen der lances, so finden wir $\frac{1}{12}$, das hat nicht die proportion gegen der vnitet, als do hat propositus gegen den quaesito, also concludirn wir mit dem text, das das 11 das quaesitum nicht sein khan, vnd sprechen also, das solche frage vnmuglich zu uolfuren durch die Itata, | vnd relinquiren sie vnsern andern **119** equationibus. Darumb sagen wir, das der text allein cleret die Itata, das ist die errores vnd lances, zu erfaren vnd demonstriren, ob alle frage muglich sein do durch zu machen vnd welche nicht, vnd also haben wir volfurt genugsam den Intentum des texts: was durch die erste equation ergehen mag, vnd wirdt auch durch die errores volfurt vnd lances, desgleichen durch die 4 quantiteten proportionales Ylis, vnd was solchs, wie vorlautet, nicht gegeben wirdt mit 4 quantiteten proportionales, sonder disproportionales, so relinquiren wir vf vnsere andere Equationes.

De inveniendis compositis numeris et partibus multitudinis per quasdam proportiones propositas ex quodam numero toto et toto aequales. Capitulum decimum.

Propositis quibuscunque proportionibus et numero toto rationali invenire licebit per easdem partes multiplicativas quodam toto numero priori aequales producentes compositos rationales eidem toto aequales.[1])

Als nun Algebras hat gesagt von dem numerum rationalem, cleret er alhier sein letzte Capitel des tractats sagende, das auch rationalische zaln werden funden, welche also compositi auch in den coniecturen der propositionen, vnd laut der text zum teutschen also: | **119'**

So do werden vorgeschlagen, was proportiones die sein mögen,

1) Hier wird die *regula virginum* oder *regula coecis* durchgesprochen und eine ganz allgemeine Methode zu ihrer Lösung gegeben. In dem lateinischen Texte ist nur gesagt, es sei eine solche möglich, wenn die Anzahl der verlangten Grössen und die dafür zu entrichtende Geldsumme einander gleich seien, aus einer Bemerkung des deutschen Bearbeiters aber folgt, dass diesem klar war, es sei diese Bedingung nicht unbedingt nöthig.



vnd sonderlich, eine rationalische zaln zu finden, vnd ist muglich vnd gepurlich durch die ehegerurten proportiones multiplicirende thail, welche der gantzen furgesatzten zal rationalis gleich seind, vnd welche also sein producirn compositos rationales aus den proportionibus vorgesatzt, welche alſsdann gleichermas gleich seind dem numero rationali vorgeschlagen.

Von disem Text schrifftlich ein vorstentnus zu geben, so ist zu wissen das ALIABRAS, der Indus, gepraucht an vielen orten die so gemelte Regeln, vnd khumbt vrsprunglich aus den communicirenden zaln, als wir figuriren wollen exemplariter, damit wir auf den vorstandt des texts khomen.

Es hat einer willen zu kaufen 100 stuckh viehes umb 100 fl., nemlich schaf, Esel vnd Ochsen, das dann die Kinder ratende vorgeschlagen, aber vns hieher zu geprauchen. Erofnen wir, souil vns not ist der rationalischen zaln halber, welcher kauft 20 schaf vor 1 fl., 1 Esel pro 1 fl. vnd 1 Ochs pro 3 fl., vnd solch summe der fl. ist 100 vnd des viches ist auch 100 stukh.

1	20	60	
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	denominans res

Regula virginum

Sagt der text, so do werden vorgeschlagen etzliche proportiones, als do seind: 20 schaf vor 1 fl, 1 Esel pro 1 fl vnd 1 Ochse pro 3 fl, nun durch solche proportiones zu finden multiplicirende thail | durch eegenannte proportiones, welche machen 100, vnd die compositi daraus eruolgent auch 100. Saget ALIABRAS INDUS in dem Buch seiner thaten[1]), das do aus den dingen sol gemacht werden ein gemeiner thailer oder Nenner, als 20 mal 1 ist 20, als in der figur figurirt ist worden. Nun sol ein ytzlicher thail jr nenner gesucht werden, als $\frac{1}{20}$ von 20 ist 1, vnd $\frac{1}{1}$ von 20 ist 20, vnd 3 thail von 20 ist 60. Also setzen wir dise gefundene thail $1 + 20 + 60$, vnd zihen 1, das ist das minste, vom andern, restat $19 + 59$, vnd solche werden die thailer. Wann so wir zihen 1 von jme selbst, restat Nulla. Also solchs ist geschrieben,

	divisores
60	59
20	19
1	0

denominator
20

so multiplicirn wir den minsten numeranten der thailen, das ist 1, in das ding, person oder vich, vnd die gantze denomination in das gelt. Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in disem vil das ding vnd geldt des vihs in einer zal. Also zihen wir 100 von 2000, pleiben 1900, vnd solchs sollen wir diuidirn in 19 vnd 59 dermaſsen, das eins mit dem andern aufgeht, vnd wann er nicht ganz aufgeht, so ist die frage nicht muglich. Also so wir thailen 1900 mit 19 zu 41 malen, pleiben 1121, welche zal, so die mit 59 gethailt wirdt, khumen 19, also sprechen wir, das wir haben funden

1) Das soll *daten* heissen, die andern Handschriften lesen *datorum*.

partes multiplicativae | 41 vnd 19, welche wir zusamen addirn, werden 60, 120' von 100 gezogen pleiben 40 vor das 0 gesatzte vnd den nechsten numerant der schaf, das ist 40, der esel 41 vnd 19 ochsen, welche partes multiplicative machen 100, als der text sagt, das die partes multiplicative sollen gleich sein dem numero proposito rationali, welche also partes genant solle machen integros numeros rationales compositos, von welcher zaln wegen hie der text ruret. So wir multiplicirn 40 mit 1, nachdem die proportion saget, 20 schaf gelten 1 fl, so machen 40 2 fl, vnd so wir multiplicirn 41 mit 1, wann 1 esel gilt 1 fl, facit 41, vnd 19 mit 3, wann 1 ochs gilt 3 fl, facit 57. Also haben wir 40, 41 vnd 19 ding, das ist partes multiplicative, gleich toto rationali 100 vnd compositos integros rationales aus den multiplicativa, das ist das gelt 2 vnd 41 vnd 57, auch gleich toto rationali. Also mogen wir sagen mit dem text, das Aliabras in seinem daten hat gefunden rationalisch zaln, welche auch also durch vnsere erste equation mogen volfurt werden vnd die 4 proportionalische zaln Ylis. Aber von des wegen, das sie integra werden rationalisch als man recht mogen compositi mugen sein, hat Aliabras cleret, von welcher | zaln also zu finden 121 Algebras als sequax hat geschatzt vnd genant dise numeros rationales producirt ex partibus multiplicatiuis, welche zu finden seind vorgeschlagen worden gegeben proportiones. Vnd also wollen wir hie gantz geendet haben, zu sagen von den rationalischen zalen, vnd heben an von den irrationalischen den dritten tractat des dritten Buchs Algebrae.

2	41	57	Gelt.
Partes multiplicatives			
40	41	19	Vieh.
Proportiones propositae			
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{1}$	

	Ochs	3	59	Divisores	2000
100	Esel	1	19		100
	Schaf $\frac{1}{20}$				1900

So man dividirt, khombt yedem das facit.[1])

1) Die Lösung der vorgelegten Aufgabe, welche auf die Gleichungen

$$x + y + z = 100$$
$$3x + y + \frac{1}{20}z = 100$$

hinauskommt, ist folgendermaassen geführt. Zuerst ist die zweite Gleichung mit 20 multipliciert, das giebt

$$60x + 20y + z = 2000,$$

dann davon die erste subtrahiert; es entsteht

$$59x + 19y = 1900,$$

und diese Gleichung ist dann so aufzulösen, dass x und y ganze rationale Zahlen

Tractatus tertius libri tertii ALGEBRAE *de numeris surdis.*[1])

Capitulum primum. Quid sit numerus surdus eiusque expositio.

Irrationalis numerus Gebrae longitudine ipse quidem potentialiter tantum rationalis, numerus vero potentialiter tantum rationalis longitudine surdus invenitur. Medialis autem potentialiter surdus ipse et longitudine, potentionalis numeri surdi irrationalis esse probatur. Ex hoc manifestum, omnem numerum longitudine rationalem et potentia rationalem esse, necesse est.

Hie eruolget ALGEBRAS seinen dritten tractat seines dritten Buchs. sagende von den zalen, die do seind irrationales, jnmassen als er am an-121′fang hat verheisen. Welcher zal, als wir vorgesaget haben, khein proportz | ist gegen der andern, als do mag sein ein rationalische zal gegen der andern, als wir gesagt haben im dritten Capitel des andern tractats. Laut also:

---

werden. Für $x = 19$ wird hier offenbar sofort $y = 41$ Um dann z zu finden, subtrahiert man $x + y$, das ist 60, von $x + y + z = 100$ und erhält $z = 40$, und es ist wirklich $19 + 41 + 40 = 100$ und $3 \cdot 19 + 1 \cdot 41 + \frac{1}{20} \cdot 40 = 100$. Es wird nicht angegeben, wie die Endgleichung zu lösen ist, *nur dass sie in ganzen rationalen Zahlen gefunden werden muss.* Die Lösung selbst wird auf das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS zurückgeführt, wohl wieder ein Beweis für die nicht schlechte Geschichtskenntnis des Bearbeiters. Dass die Inder zuerst die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades unter Forderung ganzer rationaler Werthe der Unbekannten, auflösten, ist erst seit etwa einem Jahrhundert bekannt. Woher stammt nun die Kenntnis unseres Bearbeiters dieser Thatsache? Wo ist das Buch *datorum* des ALIABRAS INDUS, das hier erwähnt wird? Die Auflösung ähnlicher Aufgaben bei BACHET DE MÉZIRIAC beruht auf völlig anderen Betrachtungen. Jedenfalls aber hat nicht er zuerst in Europa das Verlangen nach ganzen rationalen Werthen der Unbekannten aufgestellt, schon vor 1545, in der Urschrift unserer Handschriften, muss es gefordert worden sein. Dass aber der deutsche Bearbeiter weiter ging als der ihm zur Kommentierung vorliegende Text, liegt in den Worten: „Sam also, ein mal 100 ist 100, vnd 20 mal 100 ist 2000, wann in diesem vil das Ding vnd geldt des vihs in einer zal." Es muss also doch auch möglich sein, dass beide Zahlen nicht gleich sind. So würden die beiden Gleichungen BACHET's $x + y + z = 41$, $4x + 3y + \frac{1}{3}z = 40$ nach unserm Bearbeiter so gelöst worden sein. Nach 2 ist auch $12x + 9y + z = 120$, davon Gl. 1 giebt $11x + 8y = 79$. Da für x nur ein ungerader Werth möglich ist, so sieht man sofort, dass $x = 5$ für y den Werth 3 ergiebt, dann ist aber $z = 33$, das sind die Lösungen BACHET's. Die am Ende des Kapitels stehende Übersicht des Lösungsganges haben nur *Gotting. Philos. 30* und *Dresd. C. 8.*

1) Der dritte Traktat dieses dritten Buches handelt von den irrationalen Wurzeln, während der erste Traktat das Ausziehen der rationalen Wurzeln lehrte. Im ersten Paragraphen wird zunächst gezeigt, dass eine in der Länge irrationale Zahl nur in der Potenz rational sein kann, und umgekehrt eine nur in der Potenz rationale Zahl in der Länge irrational sein muss. Die Zahl aber, die sowohl in der Länge als in der Potenz irrational ist, heisst medial.



Die irrationalische zal vnser Gebra in der lenge wirdt alleine jn jrer potentz rationalisch; aber die zal, die allein in potentia ist rationalisch, werden gesagt in der lenge, das ist jres radicis, irrationalis oder numerus surdus. Die medialische zal aber, welche do ist in potentia irrationalisch vnd in longitudine, in potentia jres radicis vnd in longitudine radix radicis. Wann so die potentia ist irrationalisch so ist die radix von jr die potentz, vnd radix der potentz ist die longitudo, also ist numerus medialis radix radicis irrationalis. Hierumb wird offenbar, das jetzliche zal in der leng rationalisch ist auch in potentia rationalisch von not wegen. | 122

Von disem text gleichmesig, wie vor gethan, einen schrifftlichen vorstandt einzufuren, so ist zum ersten not, das wir cleren von punct zu punct den text. Zum ersten, was do numeris oder eyn zal sey irrationalisch. So nennen wir das ein irrationalische zal, welche khein radicem quadratam, cubicam noch ʒʒ hat oder khein radicem der furgegebenen duction, als 7 oder 11, oder welche khein duction begreifft, jnmassen wir vorgesagt haben. Welche in dieser lenge wirdt geschrieben also ʃ mit einem vorgesatzten punkt der figurirten duction, als ʃʒ 7, das ist radix quadrata von 7, oder ʃcꝭ von 11, oder ʃʒʒ von 13, das ist radix radicis von 13, vnd also werden sie nachuolgent jn der lenge, das ist jrer radicum figurirt, wie hernach volget.[1])

In longitudine ita scribitur numerus surdus per ductiones absolute.

ʃʒ 7	Radix ziens oder quadrata von	7
ʃcꝭ 11	Radix cubica von	11
ʃʒʒ 13	Radix ziens de zens von	13
ʃß 15	Radix, das ist sursolida von	15
ʃʒcꝭ 14	Radix censicubica von	14
ʃbiß 17	Radix bissursolica von	17
ʃʒʒʒ 19	Radix census censui de censu von	19
ʃccꝭ 15	Radix cubi de cubo von	15

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, ist das Wurzelzeichen ein starker Punkt, an welchen sich ein nach oben gerichter längerer Strich anschliesst. Um zu wissen, von welcher Potenz die Wurzel ist, wird das entsprechende algebraische Zeichen daneben gesetzt. Es ist also:

Sagt der text weither, das die potentionalische zal, die allein in potentia ist rationalisch, wirdt in longitudine surda genant, welcher zaln khein proportion khan gegeben werden gegen einander als ein rationalischen zal gegen einer andern, vnd werden also in der potenz figurirt |5 ʒ, das das ist quadratum 5, |3 ꝃ cubus 3, |17 ʒʒ census de censu 17, |9 ß sursolidum 9 etc, vnd so werden sie durch die andern ductiones in der potentz 122′ gesatzt, vnd in longitudine werden sie geschrieben, | wie hie vorgesatzt mit dem punct, vnd hie in der potentz mit dem gnomone, darumb, das alle ductiones angulum rectum nicht refutirn, vnd stet die figur also:[1])

In potentia figurantur ita numeri surdi longitudine.

|5 ʒ	Quadrat von	5
|3 ꝃ	Cubus von	3
|7 ʒʒ	Census de censu von	7
|9 ß	Sursolidus von	9
|7 ʒꝃ	Censicubus von	7
|10 biß	Bissursolidus von	10
|11 ʒʒʒ	Census censui de censu von	11
|13 cꝃ	Cubus de cubo von	13

Saget der text furter von dem numero mediali: in potentia ist er irrationalis vnd in longitudine, vnd von wegen der potentz zu schöpfen den radicem, welcher also die potentz bezeichnet, welche alſsdann in longitudine

---

∫ʒa, ∫ꝃa, ∫ʒʒa, ∫ßa, ∫ʒꝃa, ∫bißa, ∫ʒʒʒa, ∫cꝃa
der Reihe nach

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a},\quad \sqrt[4]{a},\quad \sqrt[5]{a},\quad \sqrt[6]{a},\quad \sqrt[7]{a},\quad \sqrt[8]{a},\quad \sqrt[9]{a},$$

wobei stets vorausgesetzt ist, dass a keine gleichnamige Potenz ist.

1) Soll weiter angezeigt werden, dass eine bestimmte gegebene Zahl nicht als in der Länge, also als einfache Zahl gegeben ist, sondern als eine irrationale Potenz, so wird sie in einen rechten Winkelhaken (*gnomon*) eingeschlossen, und das Zeichen der Potenz, welche sie vorstellen soll, diesem Winkelhaken rechts angehängt. Es heisst also z. B. |3 ꝃ, es sei 3 ein Würfel und nur als solcher rational. Ebenso ist |3 ß, eine nur in der fünften Potenz rationale Grösse. Auf diese Erweiterung der Euklidischen Erklärung von in Potenz rational haben wir schon oben hingewiesen.



jrs radicis auch irrationalisch ist, Vnd also hat der numerus medialis ein ytzliche duction zu erforschen radicem radicis, vnd werden also vorzeichent in der potentz irrationalis, als ·∫ȝ $\underline{|12}$, das ist, der radix von 12 ist die potentz, vnd radix des radicis quadrata ist die longitudo. Desgleichen ·∫c $\underline{|14}$, das ist radix cubica von 14 ist die potentz, vnd radix cubica von | dem radix longitudo etc. Also sprechen wir ∫cc des 12, des medials, 123 ist longitudo, vnd also werden sie figurirt in der potentz durch alle ductiones aus die numeri mediales, die do in potentia seind irrationales, vnd werden gezeichent in longitudine mit dem punct gezwifacht. ·∫ȝ $\underline{|6}$ ist radix radicis des medialis ·∫ȝ $\underline{|6}$, aber die quantiteten oder die potentionalischen ductiones irrationales werden verzeichent in diser weise ∫$\underline{|5}_{ȝ}$, das ist der quadrat von 5 ist irrationalis etc, vnd ·∫$\underline{|5}_{ȝ}$ ist latus in longitudine, vnd wirdt genant medialis, darumb das er jn medio loco proportionalis zwischen zweyen quadraten aber cuben oder anderen ductionen. Sam wir wollen figuriren, das die vorstandt haben, dauon wir gesagt haben.[1])

Also werden die mediales vorzeichnet

·∫ȝ $\underline{|6}$		*quadrato*
·∫c $\underline{|13}$		*cubico*
·∫ȝȝ $\underline{|9}$		*censo de censo*
·∫ß $\underline{|8}$	*Medialis a*	*sursolido*
·∫ȝc $\underline{|10}$		*censicubo*
·∫bß $\underline{|15}$		*bissursolido*
·∫ȝȝȝ $\underline{|16}$		*censu ȝ de ȝ*
·∫cc $\underline{|9}$		*cubo de cubo*

Ita figurantur mediales in longitudine

·∫ȝ $\underline{|16}$		ȝ
·∫c $\underline{|12}$		c
·∫ȝȝ $\underline{|5}$		ȝȝ
·∫ß $\underline{|13}$	*Das ist radix radicis*	ß
·∫ȝc $\underline{|17}$		ȝc
·∫bß $\underline{|15}$		bß
·∫ȝȝȝ $\underline{|19}$		ȝȝȝ
·∫cc $\underline{|11}$		cc

---

1) Die Bezeichnung der Medialen ist wieder eine andere. Sie sollen bekanntlich sowohl in der Länge als in der Potenz irrational sein. Als irrationale Potenz werden sie so charakterisiert, dass *über* das Wurzelzeichen noch ein Punkt gesetzt wird, natürlich die Zahl selbst in einen Winkelhaken eingeschlossen, also z. B. so: ·∫ȝ $\underline{|3}$. In der Länge aber werden sie so geschrieben, dass zwei Punkte neben einander, unter sich verbunden und an dem zweiten der längere Strich angehängt wird, also z. B. so: ·∫ȝ $\underline{|3}$, gelesen Quadratwurzel aus der Quadratwurzel von 3. Obgleich für unser Gefühl das mit $\sqrt[4]{3}$ übereinstimmt, so ist doch für die Auffassung der damaligen Zeit ∫ȝȝ $\underline{|3}$ und ·∫ȝ $\underline{|3}$ etwas wesentlich Verschiedenes. Die nicht mediale irrationale Zahl wird nämlich wieder anders gekennzeichnet. Als mediales Quadrat sahen wir ·∫ȝ $\underline{|3}$ schreiben, als einfaches irrationales Quadrat wird dieselbe Zahl ∫$\underline{|3}_{ȝ}$ geschrieben, also der Potenzexponent, um so kurz zu sagen, hinten angehängt, und die Wurzel dieser irrationalen Potenz ist dann natürlich ·∫$\underline{|3}_{ȝ}$.

Item numeri quadrati in potentia irrationales disiuncti a mediali.

$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$	der quadrat
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{C}}$	der cubic
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{zz}}$	der census de censu

Ita figurantur numeri quadrati in potentia irrationales in longitudine.

$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$	der quadrat
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{C}}$	der cubus
$\surd\,\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{zz}}$	der census de censu

Wir nemen *ac* (Fig. 17) vor radicem der quadratischen duction in numeris $\surd_{\mathfrak{z}}\,5$ vnd *cb* $\surd_{\mathfrak{z}}\,3$, vnd quadrirn *ac*, facit $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$, vnd quadrirn *cb*, facit $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$; das sein zwei quadraten in potentia allein rationales, als wir oben gesagt haben. Nun in quarta secundi geometriae, wir multiplicirn $\surd_{\mathfrak{z}}\,5$ vnd $\surd_{\mathfrak{z}}\,3$ mit einander das ist *ac* jn *bc* bis, khomen die zwei supplementa vnd khumbt $\surd_{\mathfrak{z}}\,\underline{\lvert 15}$, das sein zwei numeri mediales, die do in potentia seind irrationales vnd seind gesatzt medio loco proportionales zwischen den zweien quadraten $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$ vnd $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$. Also sagen wir das die drei numeri $\underline{\lvert 3}_{\mathfrak{z}}$, $\surd_{\mathfrak{z}}\,\underline{\lvert 15}$ vnd $\underline{\lvert 5}_{\mathfrak{z}}$ sein continui proportionales. Also haben wir geclert die vrsach des medii. Als wann radix quadrata von 15, das ist das supplement, vnd radix von dem radice ist das latus tetragonicum des supplement in longitudine vermag proportionaliter describirn, vnd also ist es in cubicis vnd andern ducti|onibus, welche do mehr media proportionalia haben dann eins, vnd werden alle genant mediales, von wegen das sie nach ordnung der duction seind media proportionalia der ductionen. Sagt der text per modum corollarii, das alle zal an der lenge rationales werden hieraus erkant in potentia rationales. Wann eine yede zal absoluta ist vff das minst in potentia rationalis, vnd hierumb werden die rationalischen zaln in longitudine absoluta gesatzt, vnd in potentia, wie andere zaln, die allein potentia rationales seind, als wir gesagt haben. Als 2 bedeut ein radix vnd $\underline{\lvert 4}_{\mathfrak{z}}$ sein potentz quadrat, also der gleichen wir jn der glosa angezaiget; vnd volget also das ander Capitel vnsers dritten tractats des dritten Buchs.

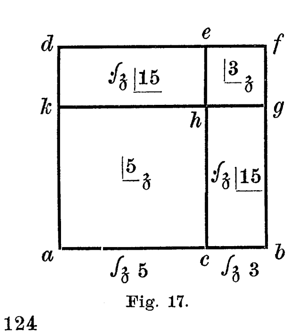


Fig. 17.

124

Capitulum secundum de additione radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine. |

124′

Radicum numerorum irrationalium coacervatio omnium ductionum constabit, cum, si longitudine communicantes fuerint proportione et mensura

quadam, ductiones, quae proponantur, si primi et minimi in eadem exuentur, inde radices coacervandae erunt. Productum vero, si vocabulum ductionis accepit, excrescens huius, cum si communicantes quantitate ductionum fuerit, huius producti radix aggregationem radicum numerorum propositorum ostendet.[1])

Hie saget ALGEBRAS von der ersten speties der numerorum irrationalium, vnd sagt von den radicibus der irrationalen in longitudine communicantium. Als wir sagen, das 12 vnd 3 seind communicantes in longitudine, vnd seind doch an jn selbst surdi, darum sagt er hie, zu addirn √ʒ 3 zu √ʒ 12, dergleichen welche zal do communicirn in longitudine vnd sie haben ein proportz gegeneinander als ein quadrat gegen dem andern, hierumb communicirn sie der dritten duction der quantitatum in longitudine, vnd laut gemelter text zum deutschen also:

Die zusammengebung der radicum aller ductiones, welche so die zaln longitudine communicirn in der proportz vnd einer mensur der | furgehaltenen ductionen, welche zaln, so die exuirt [125] werden in die cleinsten zal vnd proportz der duction, vnd von welcher also genomen werden die radices vnd werden zusamen geaddirt, was daraus khumbt, das der duction gemes gefurt wirdt, vnd letzlich solch product erwechst durch den communicanten, damitt sie haben communicirt, sagen wir, das der radix desselbigen erwachsenden der duction die addirung beweise der gemelten radicum furgelegter zaln.

Als wir wollen schrifftlich cleren, das, so wir vornemen den quadrat, welcher die erste duction ist, so ist nicht not die rationalen vorzuschlahen, wann wir dauon genugsam zu erkhennen gegeben haben vnd beweisen jre Addirung durch ihre offene radices an jr selber. Welche aber so die longitudine communicirn, als zu addirn √ʒ 8 zu √ʒ 18, welche in potentia vnd longitudine communicirn mit den rationaln, sagt der text, das man sol suchen die mensur 8 + 18, finden wir 2, welche sie thailt zu 4 vnd 9; das ist die proportion der duction, als der text sagt. Von welchen 4 vnd 9 wir nemen jre radices zusamen, nach den sie rationales seind, werden 5,

---

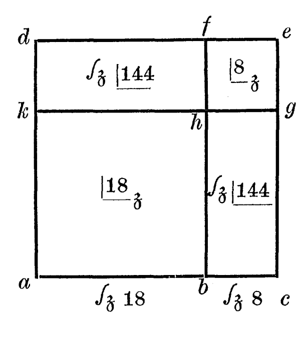
1) In diesem Kapitel wird die Formel entwickelt:

$$\sqrt{a^2 b} + \sqrt{c^2 b} = \sqrt{(a+c)^2 b}\,.$$

Gerechnet wird so: $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$, $\sqrt{c^2 b} = c\sqrt{b}$, also ist $\sqrt{a^2 b} + \sqrt{c^2 b} = (a+c)\sqrt{b} = \sqrt{(a+c)^2 b}$. Aber die Rechnung gilt auch allgemeiner $\sqrt[n]{a^n b} + \sqrt[n]{c^n b}$ ist auch gleich $\sqrt[n]{(a+c)^n b}$. So ist in seinem Beispiele √ß 3 + √ß 96 = 1 √ß 2 + 2 √ß 3 = 3 √ß 3 = √ß 243 · 3 = √ß 729, das ist in unsern Zeichen $\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{729}$.

vnd multiplicirn das quadrate, das ist mit den rational ductionibus, wirdt 25. Solchs, sagt der text, soll wider gemultiplicirt werden mit dem com-125′ municanten, das was 2, wird 50, vnd radix | von 50 ist radix der angegebenen zal, welche also was √ʒ von 8 vnd √ʒ 18. Sprechen wir, jr beder radix ist √ʒ 50, vnd deſsgleichen in den andern ductionibus, welche nun so die jn longitudine communicirn furgegebene duction. Als wir wollen setzen von dem cubic; ich soll addirn √cꝭ von 4 zu √cꝭ von 32. So wir suchen Mensur nach dem dritten capittel vnsers andern tractats, finden wir pro mensura 4, vnd die numer werden minimi 1 + 8, welche in proportione seind der cuben. Wir nemen jre radices zusamen, werden 3, vnd cubirn die, werden 27, vnd solche multiplicirn wir mit 4, dem communicanten, khumen 108 vnd √cꝭ von 108 ist geaddirt √cꝭ 4 vnd √cꝭ 32, vnd also gleich in andern ductionibus, welche, so sie longitudine communicirn. Als ich wollte addirn √ß von 3 zu √ß von 96, so examinirn sie sich ad ductionem in 1 vnd 32 vnd die summa der radicen von dem ist 3. Das multiplicirn wir der duction gemes, khomen 243, vnd solchs sollen wir mit dem communicanten multiplicirn, das ist mit 3, wirdt 729 vnd √ß von 729 ist die 126 addition der radicum der furgelegten zaln, vnd also furter. |

Das wollen wir geometrice ostendirn (Fig. 18), vnd nemen vor zum ersten den quadrat, vnd wie er sich in dem hellt, also ist es in den andern ductionibus. So wir suchen mensuram, finden wir das √ʒ 18 vnd √ʒ 8 seind



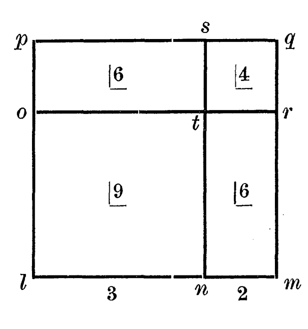


Fig. 18.

equa multiplicia von 9 vnd 4, welche also jre radices machen 5, vnd jre potentz 25, wann 9 vnd 4 vnd 6 vnd 6 seind ex quarta secundi geometriae 25. Nun seind √ʒ 18 vnd √ʒ 8 equa multiplicia mit + 2, also 2 mal 25 seind 50. Also sagen wir, das die quadrata vnd supplementa seind equa multiplicia; haben wir ex 15 geometriae quinti, das multiplicabilia haben eine gleiche proportion, mogen wir sagen, das √|50ʒ ist souil sam √ʒ von 18 vnd √ʒ von 8 zusamen geaddirt, wann 18 vnd 8 vnd √ʒ |144, das ist 12 geduplirt mit 6 dem submultiplex, zwir genomen macht 50, vnd also mogen wir

solchs nachuolgend beweisen in der extraction der surden ad propinquitatem mit | dem numero mutuato, das ist mit der entlehnten zal, als du eigent- 126′ lich eher nicht wirst vnd magst also probirn, als wir tabellaria vestigia werden setzen dem numero mutuato. Vnd also haben wir genuglich vorstentnus eingefurt, damit man mag addirn etzliche radices der ductionum, welche do communicirn in longitudine. Nun volget hernach von den numeris irrationalibus, die do in longitudine kheine communicantes haben, als do seind $\surd_{\mathfrak{z}}$ von 5 zu $\surd_{\mathfrak{z}}$ von 3 zu addirn, welche also nicht sein in der proportion kheiner duction, vnd hierumb werden sie vnverstentlich addirt, es sey denn, das wir sonderlich geometrisch beweisung einfuren, als wir im negsten Capitel sagen werden von den zalenn, die do nicht sein in kheiner proportion der ductionum.

Capitulum tertium de additione radicum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Incommensurabilium vero numerorum longitudine descensus radicum relinquitur, cum in adaucta proportione ductionis, qua versantur, non sedent, sed binomiis, trinomiis, quadrinomiis et quampluribus numeris irradicabilibus hi numeri construuntur, et geometrica quadam figuratione propter quid ostenduntur. | [1]) 127

Nachdem Algebras gesagt hat von den radicibus der zaln irrationalen, welche in der lenge communicirn, das ist, das sie sein similes, das ist in proportione quadratorum oder ductionum etc, hie saget er von zaln, welche do sein jn kheiner proportion der duction vnd laut der text zum deutschen also:

Der irrationalischen zalen absteigung zu iren radicibus, welche do nicht communicrn jn longitudine, wird verlossen, wann sie seind nicht equa multiplicia, das ist, das sie nicht sein jn der proportion der ductionen, jn welcher dann sie proportionirt

1) Addition allgemein irrationaler Wurzeln nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a+b)+\sqrt[n]{(n_1)^n a^{n-1} b}+\sqrt[n]{(n_2)^n a^{n-2} b^2}+\cdots+\sqrt[n]{(n_{n-1})^n a\, b^{n-1}}}$$

unter $n_1, n_2, \cdots, n_{n-1}$ die Binomialkoefficienten verstanden. Sein erstes Beispiel ist $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{8+\sqrt{60}}$. Um dabei anzudeuten, dass die erste Wurzel sich auf den ganzen Ausdruck erstreckt, der ihr folgt, ist ihr unmittelbar cs angehängt, das heisst *communis,* die sonst dort stehende Bezeichnung des Wurzelexponenten jedoch an das Ende des den ganzen Ausdruck einschliessenden Winkelhakens gerückt. In cossischen Zeichen heisst also die obige Gleichung:

$$\surd_{\mathfrak{z}}\,3+\surd_{\mathfrak{z}}\,5=\surd\mathrm{cs}\,\underline{|8+\surd 60}_{\mathfrak{z}}\,.$$



werden, sondern sie werden, spricht er, mit gespalten zaln, das ist mitt zwifach genomigen, mitt drifach genomigen, mitt vierfach genomigen vnd mit der noch mehr vnradicirten zaln der quantiteten affirmatiue vnd negatiuen vmbschreiben, vnd werden also beweist durch geometrische formen jre vrsach, warumb sie dermas vnd nicht anderst sollen addirt werden.

Von disem text schrifftlich zu sagen, so nemen wir vor jn gleicher form jm negsten Capitel beweist aus quarta secundi geometrie vnd setzen zu addirn ſʒ 5 zu ſʒ 3, welche also, sam der text sagt, incommensurabiles seind longitudine vnd irrationales gemelter duction | vnd khein communicanten haben. Setzen wir *ab* sei ſʒ 5, vnd *bc* sey ſʒ 3 (Fig. 19), so wir *ab* quadriren, so khumbt |5 ʒ, der quadrat *ah* in potentia rationalis. Wir quadrirn *bc*, ist |3 ʒ, der quadrat *he* rationalis in potentia. Wir producirn ex quarta eiusdem secundi Geometriae die zwei supplementa *fk* vnd *bg*, welche erwachsen aus *ab* in *bc* zwir gefurt, machen ſʒ |15 vnd aber ſʒ |15, aus welchen circumscriptibilibus, sagt der text, die Addition sol werdenn. Wir addirn 5 vnd 3, das sind die zwo rationalisch potentz, ist 8; wir addirn die zwei supplementa, das ist die zween numeri mediales, ist ſʒ |60: also sprechen wir, das der gantze quadrat *ac* sey in numeris irrationabilibus |8 + ſ|60 ʒ, vnd radix von dem ist *ac*, das ist in longitudine in numeris irrationalibus, geschrieben dermas als

127′

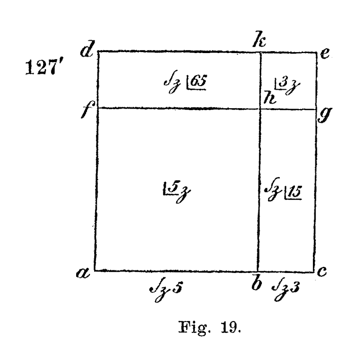


Fig. 19.

ſcs |8 + ſ|60 ʒ

vnd das ist ſʒ von 5 vnd ſʒ von 3 geaddirt, vnd wirdt binomius numerus, das ist mit zweifach gnomischen zaln vmbschrieben. Wann 8 vnd ſʒ von 60 sein gespalten, vnd hierumb sagt der text: binomiis. Saget furter mit trinomiis, das geschicht in cubic zaln. Sam also, wir wollen addirn ſcℓ von 8 zu ſcℓ von 27. Wir cubicirn ſcℓ von 8, wird |8 cℓ, vnd cubicirn ſcℓ von 27, wirdt | |27 cℓ, das seindt die zwen cubic *pq* vnd *kl* (Fig. 20) in der obersten superficie in rationalibus, wann khein duction schwerer ist zu addirn dann der cubic. Hierumb wollen wir exemplariter setzen zum ersten in rationalibus Exempel, darnach surden. So wir haben die zwenn cubic 27 + 8, so nemen wir das vorgetriplirt quadrat von dem radix cubica des grosten cubic, der do ist 27. Das finden wir also: wir multiplicirn 27 cubice, khumen 19683; also ſccℓ von 19683 ist ſcℓ von 27, das multiplicirn wir

128

ʃcc 19683 in ʃcc von 19683, khumbt quadratum radicis ʃc 27, das dann more irrationibilum ist 387420489. Also sagen wir, das quadratum cubice radicis von 27 ist ʃcc 387420489. Solchs sollen wir triplicirn, so multiplicirn wiz cc von 3, der dann ist 19643 mit dem ʃcc 387420489, khumbt ʃcc 7428597484987, vnd das ist triplum radicis quadrati cubici

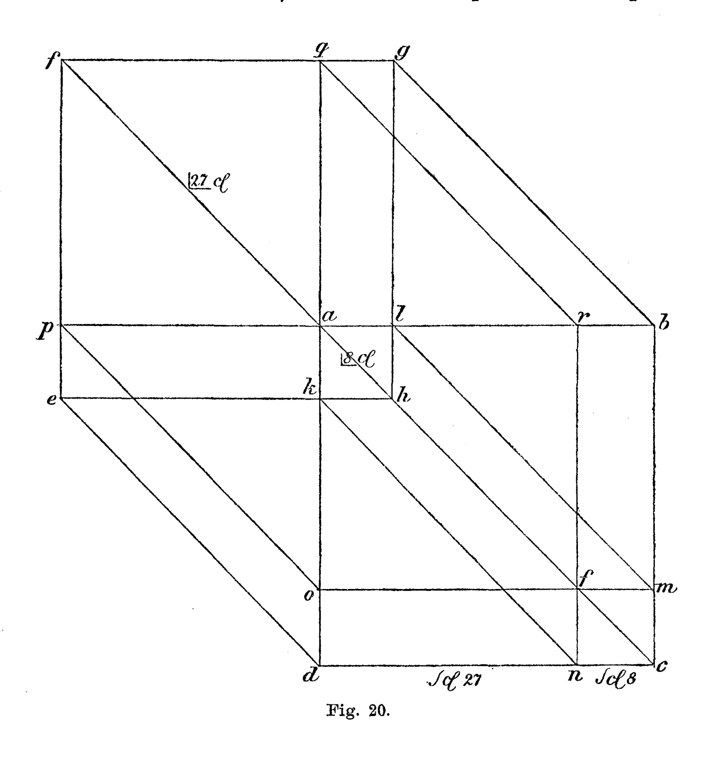


Fig. 20.

maioris cubici. Solchs sollen wir multiplicirn in ʃc von 8, das ist minorem cubicum, also cubirn wir 8, khumbt 512. Also multiplicirn wir ʃcc 512 mit ʃcc 7428597484987, khumen also 3803441912313344, vnd das seind die 3 zensus, damit der cubus wechst *fs*, *dg* vnd *hb* vnd haben also noch die radices zu solidirn, welche dann erwachsen aus dem triplicirten quadrat von dem radix cubica des cleinern cubic gemultiplicirt in radicem des grossen cubi, also finden wir, das wir wie oben multiplicirn | 8 cubice, 128′ khumbt 512, das ist ʃcc von 512, Nun multiplicirn wir 512 mit 512, facit in more irrationalium ʃcc 262144, vnd das ist quadratum von ʃc 8. Das sollen wir aber triplicirn, darumb multiplicir cc von 3, der dann ist 19683, mit 262144, khumbt 5159780352, vnd ʃcc von solchem ist triplum quadratum cubicae radicis des cleinern cubus, der do was 8. Solchs sollen wir multiplicirn in radicem cubicam des grossen, was 27. Nun ist cc

gewest von 27 ʃccℭ 19683, darumb multiplicir 19683 mit 5159780352, vnd khumbt 101559956668416, vnd das seind 3 radices solidatae $ph + ln + gk$, vnd also finden wir more irrationalium, 27 vnd 8, das macht 35 vnd 3803441912313344, das seind 3 ʒ, vnd 101559956668416, das seind die drei radices solidatae. Also sprechen wir, das gemelter cubic figurirt ist in potentia

$$\underline{|35 + ʃccℭ\ 3803441912313344 + ʃccℭ\ 101559956668416}\ ℭ$$

vnd in longitudine wirdt es also figurirt:

$$ʃcs\ \underline{|35 + ʃccℭ\ 3803441912313344 + ʃccℭ\ 10155995668416}\ ℭ.$$

129 Wann die 3 ʒ seind | in rationalibus 54, vnd die drei radices solidirt 36, solchs zusamen macht 125, vnd ʃℭ von dem macht die addition, Vnd gleicherweis mogen wir figurirn in surdis, wann wir vermeiden die grosse muche der zal in der magnitudine, so wollen wir hie beschlisen, das die cubic mit trinomischen zaln werden vmbschrieben vnd wollen also die ductiones vormelden jn der subtraction, wann wie eine geht, so geht auch die ander, allein das sie mit jren circumscriptibilibus werden vorandert. Wann quadratum de quadrato in surdis wirdt quadrinomicis circumsribirt, vnd also fort. Nun volget dj substraction, vnd was wir hie haben vormyden also von den surden, das wollen wir jn den andern eruolgen von kurtz wegen, dauon der leser nicht verdrossen werde, vnd wollen den 129′ Artickel der surden auch declariren. |

Capitulum quartum de subtractione radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium diminutio omnium ductionum notabitur, cum si, ut diximus, longitudine communicant, proportionis mensura, qua ductio proponitur, si primi et minimi eorum exuti in eadem ad radicis exsoluentur, radices segregandae sunt, residuum, si ductionis nomen usurpet. Exortum huius si communicantis quantitate dictum fuerit, huius tum producti radix subtractionis radicum numerorum propositorum manifestet.[1])

Nachdem Algebras cleret hat die addition der irrationalen, welche do communicirn vnd nicht communicirn, hie ervolget er die andern species,

1) Hier ist wieder die angewendete Formel:

$$\sqrt[n]{a^n b} - \sqrt[n]{c^n b} = \sqrt[n]{(a-c)^n b}.$$

Die Rechnung genau geführt wie bei der Addition.

sagende von der subtraction der communicanten in longitudine, vnd laut zum teutschen also:

Die abnemung der radicum von einander der irrational zaln, welche, als wir gesagt haben, communicirn in longitudine mit der mensur der proportion der duction, mit welcher sie proponirt werden, so jre termini exuti, das seind die minsten jn derselben proportion der duction, wird aufgeloset jn jre radices, so sollen sie von einander gezogen werden, vnd das | residuum, so es ge- 130 schopfet den namen der duction, vnd was heraus khumbt, so das mit der mensur communi gemultiplicirt wirdet, desselben product radix wirdt offenbar die abnemung der radicum von einander der vorgelegten zaln.

Von disem text, wie vorgesagt, eine schrifftliche meinung zu geben, nemen wir vor eine duction, als wir wollen subtrahirn ʃʒʒ 5 von ʃʒʒ 405, so suchen wir, als der text sagt, die groste mensur, ist 5; vnd die minimi termini seind 1 + 81, welcher radices gegebener duction ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, bleiben 2, vnd solche 2 sollen der duction gemes gefurt werden, facit 16, welche, als der text sagt, mit dem Communicanten sollen gemultiplicirt werden, facit 80, vnd ʃʒʒ von 80 ist die subtraction oder das restat, so ich subtrahir ʃʒʒ 5 von ʃʒʒ 405. Desgleichen in allen ductionibus, so sie seind similes ductiones propositae. Als ich wolte subtrahirn ʃcℓ 16 von ʃcℓ 1024, so soluirn wir ad minimas partes oder terminos ʃcℓ 16 + ʃcℓ 1024, khumen 1 + 64, von welchen die radices sein 1 + 4. So wir sie von einander zihen, pleiben 3. Solche cubicirn wir, seind 27, vnd multiplicirn mit dem communicanten 16, khomen 432, vnd ʃcℓ von 432 ist das Residuum, so man die eegemelten termini von einander zeuchet, vnd defsgleichen | wirdt solchs auch bewisen jn den andern ductionibus. 130′ Als ich wolt setzen ein sursolitet, ʃß 64 von ʃß 486 zu zichen, examinirn wir die ad minimos terminos, khumen 32 vnd 243, von welchen ʃß ist 2 + 3; ziehen wir 2 von 3, restat 1. Solchs multiplicirn wir der duction gemes, khumbt 1, das multiplicirn wir mit dem Communicanten 2, khomen 2: also khumbt jm restanten ʃß von 2, vnd desgleichen jn andern ductionibus.

Das wollen wir geometrice ostendiren. Wir nemen in den quadraten zu subtrahirn ʃʒ |18 von ʃʒ |200. Wir resoluirn sie in numeros, das ist in minimos terminos der duction, finden wir 9 vnd 100, von welchen die radices seind 10 vnd 3. Also seind 18 vnd 200 equa multiplicia, Was dann ist in simplicibus, das ist auch in equis multiplicibus. ex 15ª quinti Geometrie.[1])

1) Euclides V, 15: Si fuerint aliquibus quantitatibus eque multiplices assignate, erit ipsarum multiplicium atque submultiplicium una proportio.

Nun saget auch septima secundi geometrie[1]): Was do werde aus *ab* in 131 sich gefurt mit sampt *bc* in sich, das sei dem gleich, das | do khumbt aus *ab* in *cb* zwir vnd aus *ac* in sich gefurt (Fig. 21). So wir nun zichen *cb* von *ab*, restat *ac* in longitudine vnd in potentia *ak*. Nun ist *ab* in potentia |200ȝ, vnd *cb* in potentia |18ȝ, das macht zusamen 218: das soll gleich sein den zweien medialen in potentia *ge* vnd *ce* mit sampt dem quadrat *ak*. Also ziehen wir die zwei medial in potentia, die zusamen machen √ȝ |1440 von |218ȝ dem quadrat des gantzen, restat 98, vnd das ist quadratum *ak* ignotum, des radix ist *ac*. Also sagen wir, so wir ziehen √ȝ |18 von √ȝ |200 restat √ȝ |98, das was quadratum *ak*, also ist 98 auch gleich multiplex mit 49. Dann ipsa simplicia waren 3 vnd 10, vnd so wir 3 von 10 ziehen, pleiben 7, des quadrat ist 49. Vnd also haben wir solchs im quadrat bewisen, vnnd helt sich gleichmesig in andern ductionibus.

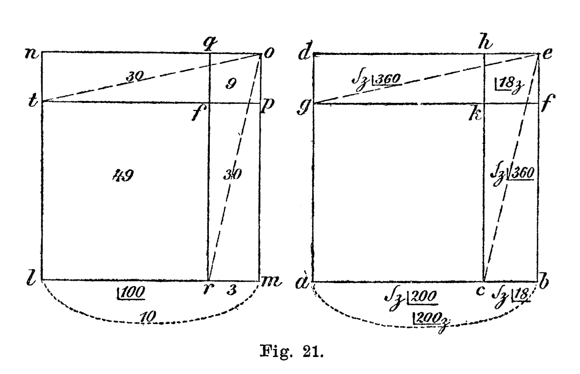


Fig. 21.

Als wir setzen, ich wil subtrahirn √cꝭ |16 von √cꝭ |250. Suchen wir die gantze mensur, ist 2, vnd seind die resolventen 8 vnd 125, von welchen radix ist 2 vnd 5. So wir nun subtrahirn 2 von 5, pleiben 3. Solchs sollen wir cubicirn, khomen 27, das ist mit der gemeinen mensur multiplicirn, als 2, khomen 54, vnd √cꝭ von 54 restat, so wir subtrahirn √cꝭ 16 von √cꝭ 250. Vnd also helt es sich allerweis in andern ductionibus, 131′ vnd solchs dich also geometrice zu ostendirn | werden wir sagen jm nachuolgenden Capitel, von dem, so sie seind incommensurabiles in longitudine. Vnd also haben wir es in der duction mogen vorfurn des quadrats von dem quadrat, als wir setzen zu subtrahirn √ȝȝ 7 von √ȝȝ 567. Wir resoluirn ad minimos terminos, finden wir 1 + 81, von welchen radix radicis ist 1 + 3. Nun ziehen wir 1 von 3, restant 2; die furen wir der duction gemes, khumbt 16. Das multiplicirn wir mit dem communicanten, khumbt 112, vnd √ȝȝ 112 pleiben, so wir subtrahirn √ȝȝ 7 von √ȝȝ 567, vnd ist recht. Volget von den incommensurabilibus longitudine das funfft capitel.

---

1) Euclides II, 7: Si linea in duas partes dividatur, quod fit ex ductu totius in se ipsam, cum eo, quod ex ductu alterius partis in se ipsam, equum est eis, que ex ductu totius linee in eandem partem bis et ex ductu alterius partis in se ipsam.

Capitulum quintum de subtractione Radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine.

Eorum vero, quorum rationamentum longitudinis non est, ipsi quidem nequaquam in adaucta proportione resident, sed ut prius irradicabilibus numeris plurinomicis et habitudinibus negativorum vel privativorum constituuntur. Et horum etiam causas, propter quid, geometricis demonstrationibus anneximus.[1]) | 132

Hie cleret ALGEBRAS die zaln, welche do seind in longitudine incommensurabiles, vnd saget von jren subtractionibus, welcher text laut zum deutschen also:

Der zalen, welcher do ist kheine Mensur der duction, vnd dieselbigen seind mit nichte in der proportion der similen ductionen, sondern sie werden vmbschrieben mit vngeradicirten zalen der manignamig zalen mitsampt den habitudinen der Negation vnd priuation, vnd der aller haben wir vrsach gesatzt vnd geometrischer demonstration anhangen.

Von wegen des textes, wie vormals gethan, einen schrifftlichen sin zu geben, vnd nachdem die quadratische duction die erste ist, so wollen wir dauon setzen. Als ich will abzihen $\int_{\mathfrak{z}} 5$ von $\int_{\mathfrak{z}} 12$. So nemen wir vor ein quadrat (Fig. 22) des lenge *ab* ist $\int_{\mathfrak{z}} 12$, von dem so gezogen wirdt $\int_{\mathfrak{z}} 5$, restat *ak*. Wir nemen fur, als in der Addition, septimam secundi Geometrie: Was do wirdt aus *ab* in sich gefurt mit samt dem *kb* in sich, das sei gleich dem, das do khumbt aus *ad* in *kb* zwir vnd aus *ak* in sich gefurt. Nun ist *ad* der quadrat $\underline{|12}_{\mathfrak{z}}$, vnd *gd* der quadrat $\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$, das zusamen ist $\underline{|17}_{\mathfrak{z}}$, vnd souil soll auch sein *kd* vnd *hd* vnd *ag*. Nun seind *hd* $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|60}$, das zwir aus septima geometrie ist $\int_{\mathfrak{z}} \underline{|240}$. So wir das von $\underline{|17}_{\mathfrak{z}}$ herabzihen, so pleibet $\underline{|17 - \int 240}_{\mathfrak{z}}$, das ist der quadrat *ag*, vnd $\int_{cs} \underline{|17 - \int 240}_{\mathfrak{z}}$ ist *ak*. Also sprechen wir | de- 132′ monstratiue, so wir subtrahirn $\int_{\mathfrak{z}} 5$ von $\int_{\mathfrak{z}} 12$, restat $\int_{cs} \underline{|17 - \int 240}_{\mathfrak{z}}$ des quadrats, der was *ak* in longitudine, vnd also werden die irradicabiles

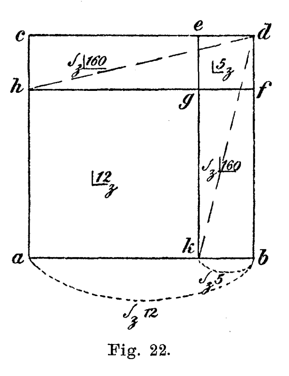


Fig. 22.

1) Für die Subtraktion allgemeiner Wurzeln wird die ähnliche Formel entwickelt wie für die Addition. Das Beispiel für die Quadratwurzel ist dabei folgendes:

$$\int_{\mathfrak{z}} 12 - \int_{\mathfrak{z}} 5 = \int cs\ \underline{|17 - \int 240}_{\mathfrak{z}} \text{ das heisst } \sqrt{12} - \sqrt{5} = \sqrt{17 - \sqrt{240}}.$$

numeri mit den habitudinen geschrieben —, das ist mit der Negation, als in der addition ist geformirt mit der affirmation, vnd ist in der ersten duction mit binomischen zaln, das ist mit zwiefach genomigen.

Nun wollen wir dich berichten mit den cubicen, welche mit trinomischen zaln vmbeschrieben werden. Sam also, wir setzen zu subtrahirn ∫cℓ von 5 von ∫cℓ 7. Solchs dich zu berichten khonnen wir nicht bescheiden, wir setzen dann eine rationalische zal oder exempel more irrationalium zu subtrahirn, vnd wie wir jn dem procedirn more irrationalium, also wollen wir in den irrational zaln in longitudine auch operirt haben. Als wir setzen wollen abzuzihen ∫cℓ 8 von ∫cℓ 125 in rationalibus, thun wir also: der cubus *ab* (Fig. 23) ist 125, vnd das solidum *ke* ist 20, welche do

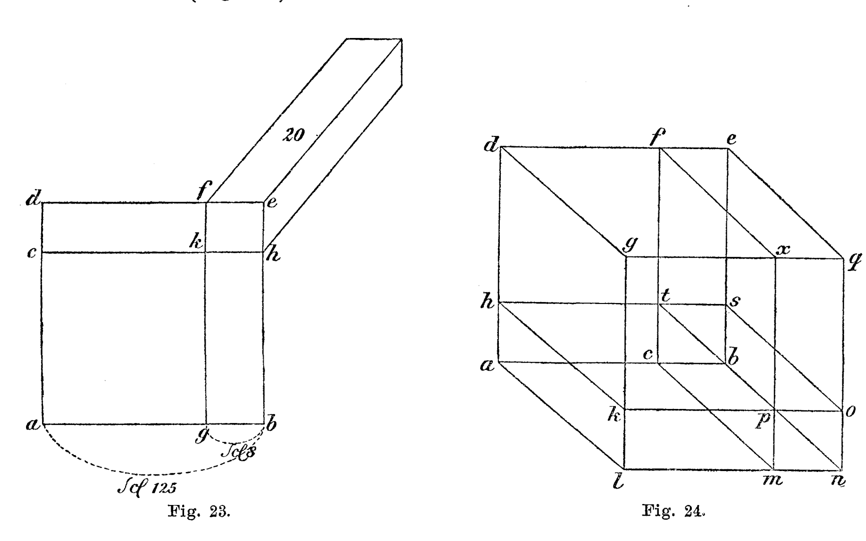


Fig. 23. Fig. 24.

wirdt ex septima secundi geometriae aus *gb* in *ab*. Wann *gb* ist 2 vnd *ab* ist 5, vnd 2 mal 5 ist 10 vnd 2 mal 10 ist 20, oder khumbt aus *gb*
133 | in sich gefurt, das ist 4, in *ab*, als 5, macht 20. Also addirn wir ex septima secundi Geometriae 125 vnd das solidum 20, werden 145. Solchen ziehen wir ab ex septima secundi duplum solidi, das do wird aus *ab* in *gb*, wann *ab* ist 5, vnd *gb* ist 2 vnd 5 mal 2 ist 10, vnd 5 mal 10 ist 50, vnd das zwir ist 100, oder khumbt *ab* in sich gefurt, das ist 25 in *gb*, das ist 2, macht 50, das zwir ist 100. Das zihen wir ab von 145, restat 45, das ist das solidum, das do wirdt vom quadrat *ak* in *ab*. Also thailen wir 45 in *ab*, ist 5, khomen 9, das ist das quadrat *ak*, cuius radix quadrata 3, vnd also sagen wir, so ich subtrahire ∫cℓ 8 von ∫cℓ 125, so pleibt ∫cℓ 27, das ist 3. Solches more irrationalium zu setzen in vnsere
133′ andere figur des cubics (Fig. 24), | wir nemen *dn* den gantzen cubic 125

vnd nemen *tn*, das ist 20, vnd addirn das, ist 145, wann 20 wirdt zwir genomen mit den andern circumscriptibilien. Nun der gantz cubic ist allerwegen jn der potentz rationalis, dj 20 finden wir more irrationabilium. Also wir cubiren 8, wird 512, vnd ʃcc𝔠 von 512 ist ʃc𝔠 von 8. Das multiplicirn wir in sich, facit ʃcc𝔠 262144, vnd das ist quadratum von ʃc𝔠 8. Das multiplicir in cubum de cubo von 125. Multiplicir 125 cubice, facit 1953125, vnd ʃcc𝔠 von dem ist 5. Das multiplicir in ʃcc𝔠 262144, facit 51200001000, vnd ʃcc𝔠 von dem ist das andere circumscriptibile. Also haben wir 145 + ʃcc𝔠 51200001000. Dauon sollen wir subtrahirn duplum solidi, so do wirdt aus *ab* in *gb*; finden wir, so wir das quadrat *ab*, das was 25, in *cb* furen, das was 2, vnd solchs zwir setzen wir more irrationalium. Also wir cubirn | 125, facit 1953125, vnd ʃcc𝔠 von dem ist 5, 134 das multiplicirn wir jn sich, facit ʃcc𝔠 3794705265625, vnnd das ist quadratum von 5. Das multiplicir in 2, als wir gesagt haben, hierumb in cc𝔠 von 2, ist 512. Multiplicir die gantze zal oder die gemelte, facit 19428896000000, vnd ʃcc𝔠 ist 50, das ist *hn* Das solidum sol noch einmal genomen werden *fn*, darumb multiplicir 512 jn das negste product, khumbt 9847592191521000000, vnd ʃcc𝔠 von dem ist 100, also sagen wir more irrationabilium, das

|145 + ʃcc𝔠 51200001000 — ʃcc𝔠 194288966000000,

das ist *hf* solidum altitudinis *ho*, welchs, so es gethailt wirdt in *ab*, restat quadratum *hf*, des radix ist *ht*, das was 3. Also dergleichen in irrationalibus vnd andern ductionibus. Nun volget hernach die multiplication.

Capitulum sextum de multiplicatione radicum numerorum irrationabilium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Radicum numerorum irrationalium multiplicatio aequalis radici numeri unius in alterum, cum fuerit ductionum similium. Et si diversarum sint denominationum ad eadem et in idem genus reducentur, capiatque unus alterius denominationem. Quod si exinde unus in alium ducatur, radix unius radicis alterius ductionis multiplicationem radicum propositorum numerorum ostendit. | [1]) 134′

Nachdem Algebras genugsame meinung zu vorstehen gibt der Addition vnd subtraction, sagt er hie von den zaln jrer radicum multiplicationis, vnd laut zum teutschen also:

1) Hier wird allgemein die Multiplikation der Wurzeln gelehrt. Die gebrauchten Formeln sind in neuerer Bezeichnung:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab};\quad \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[nm]{a^m b^n}.$$



Die multiplication der radicum der jrrationalischen zaln ist dem radici gleich der multiplication einer zal irrationalisch in die andere irrationalisch gefurt, so sie einer duction seind. So sie aber vngleicher benenung sein, so sollen sie zuuor jn eine benenung vnd jn ein form reducirt werden, als ein jtzliche irrationalische zal sol der andern denomination an sich nemen vnd darnach, so eine wird in die ander gemultiplicirt, so beweist radix des radicis der andern duction die multiplication der radicum der furgelegter zaln.

Von solchen text schrifftlichen sin einzufuren, nemen wir vor zum ersten zu multiplicirn, die do seind similes, das ist, das sie einer benenung seind. Sagt der text, es sey gleich, so dj zalen mit einander gemultiplicirt vnd radix vom product, als so man ein radix mit dem andern multiplicirt. Das ostendirn wir also: √ȝ 4 zu multiplicirn mit √ȝ 9: sprich, 4 mal 9 machtt 36, vnd √ȝ von 36 macht 6, vnd ist gleich, so ich multiplicir √ȝ 4, das ist 2, mit √ȝ 9, das ist 3, khumbt auch 6, vnd also in den surdenn. 135 Als so wir wolten multiplicirn √ȝ 5 mit √ȝ 7. | Wir sprechen 5 mal 7 ist 35, vnd √ȝ 35 ist die multiplication, defsgleichen in allen ductionibus. Als ich sprechenn: √ȼ von 2 mit √ȼ von 7 macht √ȼ von 14. Vnd so ist es jn allen, die do seind in longitudine incommensurabiles oder nicht, vnd das wollen wir kurtzlich den ersten thail des text distinguirt haben. Sagt der text furter: so sie aber vngleicher benenung seind. Als wir setzen zu multiplicirn √ȝ 4 mit √ȼ 27, sagt der text, das ein jede rationalische zal soll nemen der andern benenung. Als wir cubicirn 4, facit 64, vnd sollen quadriren 27, facit 729. Nun multiplicirn wir eine mit der andern, facit 46656. Also so wir nemen daruon √ȝ, khumbt 216 vnd √ȼ dauon, ist 6, beweist die multiplication. Hierumb spricht der text: *radix unius radicis alterius ductionis* etc. Nun mugen wir auch sagen, √ȼ von 46656 ist 36, vnd √ȝ von 36 ist 6, das beweist die frage. Also mogen wir auch setzen jn andern ductionibus der zalen, sie seind rationales oder nicht. Als ich wolt setzen, wir wollen multiplicirn √ȝ von 5 mit √ȼ von 3, thun wir jme wie vor, vnd cubicirn 5, wirdt 125; wir quadrirn 3, khomen 9, gemultiplicirt mit 125 wirdt 1125, vnd √ cubica von der quadrata radix ist die multiplication, vnd defsgleichen in andern ductionibus. Sam ich will 135′ multiplicirn √ȼ von 2 mit √ȝȝ | von 3. Wir cubicirn 3, facit 27, vnd quadriren die quadrat von 2, facit 16, vnd multiplicirn 27 mit 16, facit 432, vnd √ȼ der √ȝȝ beweist die frage oder radix quadrata de quadrato des cubice radicis, vnd also jn andern multiplicationibus. Mogen wir bej dem text einfuren heraus nemen. Als wir sprechen: ich will multiplicirn 3√ȝ 2 mit 4√ȝ 3. Wir reducirn 3 radices in die denomination des ȝ facit 9;

sprich: 2 mal 9 ist 18, vnd ʃ𝔷 von 18 seind 3 radices von 2. Wir cubicirn 4, facit 64; das multiplicirn wir mit 3, facit 192, vnd ʃcℭ von 192 seind 4 radices cubi von 3; vnd seind in proposito 3456, vnd radix cubica des quadraten radix, oder radix quadrata des cubicen radicis ist bewisen vorgelegte multiplication, vnd desgleichen in andern ductionibus. Solchs zu ostendirn, propter quid das sey, das radix der multiplication eins radicis jn den andern sey gleich der radix der Multiplikation einer irrationalen in die andern, das wollen wir geometrice ostendirn. Wir multiplicirn ʃ𝔷 5 mit ʃ𝔷 2, vnd sagen ʃ𝔷 10 sei die multiplication. So wir ac (Fig. 25) multiplicirn in bc, wirdt dh supplementum oder kb, also ist der eins ein superficies, hierumb so ein radix in den andern wird gemultiplicirt, macht er numerum superficialem, darumb radix von 10 | ist die superficies dh oder cg. Hierumb ist zu vormercken, so ein irrationalische zal in die ander gemultiplicirt ist, das dieselbige producirt medialem, von welcher radix ist die superficies jrer radicum, so sie miteinander werden gemultiplicirt, vnd seind allwegen genandt mediales potentionales, vnd hierumb ist ʃ𝔷 von 10 gleich, das ist die superficien dh, deme, so ʃ𝔷 5 vnd ʃ𝔷 von 2 mit einander gemultiplicirt. Solche zal seind auch alle wege mediales, wann sie seind in potentia allwegen irrationales, als wir jm ersten capittel genugsam von dem gesagt haben. Das wollen wir nachuolgendt sagen von der diuision der surden, sie seind in longitudine commensurabiles oder nicht.

136

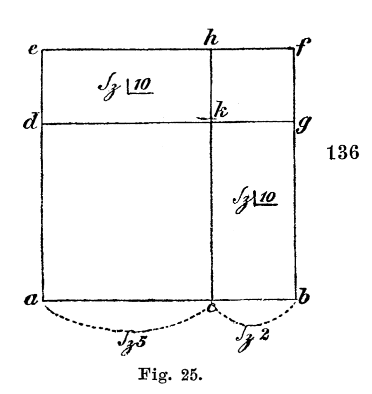


Fig. 25.

Capitulum septimum de diuisione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum irrationalium diuisio aequalis radici quotientis unius diuisi per alium, cum sint similis ductionis propositi. Quod si diuersi, quemadmodum diximus, ad idem genus reducantur. Quod si unus per alium committatur, radix quotientis unius radicis alterius ductionis diuisionem explanat. | [1])

136′

Hie saget Algebras von der diuision der radicum numerorum irrationalium, vnd laut der text zum teutschen also:

---

1) Division der allgemeinen Wurzeln nach den Formeln:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,; \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}\,.$$

Die thailunge der radicum jrrationalischer zal wirdt gleich dem radici des quotienten, der do ist, so ein zal irrationalium wirdt gethailt durch die ander, so sie anderst sein einer gleichen duction die vorgelegten zal. So sie aber einer vngleichen benenung seind, als wir vormals auch gesagt haben, so sollen sie in einer benenung gereducirt werden, vnd alſsdann, so einer durch den andern gethailt wirdt, radix des quotienten von dem radice der andern duction beweist dj theilunge.

Von dem text einzufuren wie vor eine schrifftliche meinung, so nemen wir vor zu thailen ∫ʒ von 81 durch ∫ʒ von 9. So thailen wir 81 durch 9, facit 9, vnd radix vom quotienten 9, als 3, beweist die diuision, vnd also sagen wir, so wir thailen ∫ʒ von 81 in ∫ʒ 9, khomen 3, vnd also ist radix des quotienten gleich dem, so ein radix vorgelegter zaln mit dem andern gethailt wirdt. Vnd also ist es auch jn jrrationalibus. Sam also, wir setzen wollen: ∫ʒ von 136 durch ∫ʒ 4; wir thailen 136 mit 4, facit 34, vnd ∫ʒ 34 ist die thailung, vnd bey dem mögen wir einfuren zu disem vnd 137 vordern capittel, das allewege sollen sein gleiche duction, | als der text sagt. Als wir wollen setzen ∫ʒ 128 zu thailen mit 4 oder zu multiplicirn, so muſsen wir 4 auch mit der duction benenen, das ist ∫ʒ 16 vnd thailen ∫ʒ 128 durch ∫ʒ 16, khomen 8, vnd ∫ʒ von 8 beweist die thailung, als wir dann weiter werden sehen. Ich will thailen 24 mit ∫cl 5; also mussen wir 24 cubicirn, khumbt 13824, das thailen wir mit 5, facit $2764\frac{4}{5}$, vnd ∫cl von dem beweist die diuision, vnd dergleichen mögen wir auch setzen jm quadrato de quadrato. Wir wollen diuidirn ∫ʒʒ von 128 durch ∫ʒʒ 4. Wir thailen, khumen 32, vnd ∫ʒʒ 32 beweist dj frage. So sie aber weren von vngleichen benenungen, als ich wollte thailen ∫ʒ von 64 durch ∫cl von 8, so sollen sie, als wir vorgesagt haben, jn eine benenunge reducirt werden. Also wir cubicirn 64, wirdt 262144, vnd quadrirn 8, khumen 64; wir diuidirn eins jn das ander, khomen 4096, vnd ∫cl des quadraten radicis von 4096 beweist die thailunge, oder ∫ʒ der cubic radicem von gemelter zalen, vnd hierumb sagt der text, radix des quotienten der einen duction des radicis der andern duction beweist die frage. Wann ∫cl von 4096 ist 16, dauon ∫ʒ ist 4. Also ich thaile ∫ʒ von 64, ist 8, mit ∫cl von 8, ist 2, khumbt 4, vnd ist recht. Oder radix quadrata von 4096 ist 64, dauon ist ∫cl 4, vnd khumbt wie vor, vnd also wollen wir dich auch in surdis gewisen haben. Als ich spreche, ∫cl von 10 durch ∫ʒ 2; also cubicir 2, wirdt 8, vnd 137′ quadrir 10, wirdt 100, | thaile eins in das ander, khumen $12\frac{1}{2}$, vnd ∫cl des quadraten radicem oder ∫ʒ des cubic radicem von gemelter zal beweist die thailung. Vnd also mugen wir erfarn, ob man spreche 3∫ʒ 3 zu diuidirn mit 2∫cl 2. Also benennen wir 3 radices, das werden 9 in gleicher

duction von 3, vnd sprechen, 3 mal 9 ist 27. Also benennen wir 2 radices cubice, werden 8 in gleicher duction von 2, vnd sprechen 2 mal 8 ist 16. Also sein ʃcℭ 16 2 ʃcℭ von 2. Nun thailen wir ʃʒ von 27 mit ʃcℭ von 16, also seind wir in vnserm proposito wie vor, vnd mussen gleicher massen halten in andern ductionibus, das sie also alle gespaltne radices jn ein gebracht werden, vnd darnach nach dem text jn den propositum zu machen, das wollen wir dich geometrice demonstrin (Fig. 26). Wir haben, das gemultiplicirt ist ʃʒ 2 in ʃʒ 32, die medie ʃʒ 64 producirt; also so aus ʃʒ 32 in ʃʒ 2 khumbt ʃʒ 64 des radix superficien ist kf, also so ich thaile ʃʒ 64 mit ʃʒ 2, khumbt ʃʒ 32, das ist ac in longitudine, als es vor was. Also mogen wir elicirn, das do die thailunge thailet numeros potentionales, also der diuisor, latus correlatiuum ist der quotienten, mit welchen der quotient multiplicative producirt den superficien, also welcher superficies, so er durch sein latus correlatiuum gethailt wirdt, | khumbt das ander, 138 vnd deshalb sagen wir, das die diuision vnd multiplication seind seine correlativa. Multiplicatio hat sich ut potentia, diuisio ut longitudo, der quotient ut latus relatiuum, welche longitudo vnd latus relatiuum machen die gesprochen multiplication.

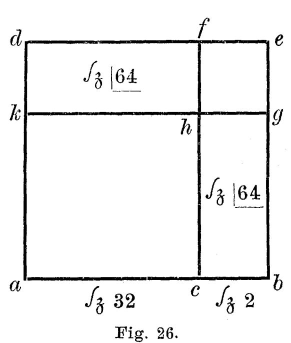


Fig. 26.

Capitulum octavum de duplicatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Omnium radicum numerorum propositorum duplatio, triplatio, val quadruplatio est, quemadmodum numerorum propositorum quadruplatio, nonuplatio vel sedecuplatio, ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur. Radix exinde vocabuli propositum ostendit.[1])

Hie eruolget ALGEBRAS seine funffte spetien der jrrationalischen zaln, welcher text laut zum teutschen also:

Aller radicum duplatio, triplatio oder quadruplatio ist gleich der vorgelegten zaln quadruplatio, nonucuplatio oder sedecuplatio, also das allewege die zalen werden genent in potentia,

1) Hier werden die Regeln entwickelt:

$$b\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n a};$$

Beispiele nur für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3. Schon in dem vorigen Kapitel war dieselbe Regel in allgemeinerer Fassung angegeben.

von welchen geduplicirt sollen werden radices der zaln vor-
138′ geleget. Vnd radix also der duction gemes beweist die frage. |

Sam also, zu duplirn √ʒ von 36, so wissen wir, das radix quadrata von 36 ist 6, vnd zwir 6 ist 12. So sprechen wir, das 36 quadruplicirt ist 144, vnd √ʒ von 144 ist 12, vnd dergleichen in surdis. Wir wollen duplirn √cl 8, wir benennen die duplatio der duction gemes, wirdt 8, wann duplatio in cubicis ist octuplatio, do sie was jn dem quadrat quadruplatio, vnd also 8 mal 8 ist 64, vnd √cl von 64 ist 4, der geduplirt radix cubica von 8. So wir aber solten duplicirn √ʒʒ von 81, also musten wir nemen sedecuplatio, wann 2 dem vocabulo gemes gefurt ist 16. Nun ist 81 quadratum de quadrato vnd 16 quadratum de quadrato von 2. Wann also 16 mal 81 ist 1296, vnd √ʒʒ von 1296 ist 6, vnd das ist auch geduplicirt √ʒʒ von 81, der do was 3, vnd also dergleichen jn surdis. Wir wollen duplirn √ʒ von 12. Also sagt eer text: *ut semper nomine ductionis, qua versantur, vocentur.* Darumb ist die duction quadrata, darumb 2 auch geduplicirt wirdt quadruplatio. Also 2 mal 2 ist 4, vnd 4 mal 12 ist 48, vnd √ʒ 48 ist der geduplirte √ʒ von 12, vnd also in andern ductionibus. Desſgleichen in der triplicatio. Im quadrat so ist es nonecuplatio, wann, als wir sprechen, wir wolten triplicirn √ʒ von 4, also denominirn wir triplatio wird nonecuplatio.
139 Wann 3 mal 3 ist 9, vnd 4 mal 9 ist 36, vnd √ʒ 36 ist 6. | Also sagen wir, das 6 ist triplum radicis von 4, vnd desgleichen auch jn surdis. Als wir wollen triplirn √cl von 5, also multiplicirn wir 5 in 27, facit 135, vnd √cl von 135 ist die getriplicirte √cl von 5, vnd also ist es auch in quadratis de quadrato. Als wir setzen, ich will duplirn √ʒʒ von 7. Also quatratum de quadrato von 2 ist 16, das multiplicirn wir in 7, facit 112, dauon √ʒʒ ist die duplation, vnd also halt dich in den andern ductionibus. Solchs dich geometrice zu ostendiren, mogen wir sagen, das dir solchs genugsam jn der multiplication bericht ist worden, wann mit 2 geduplicirt ist mit 2 gemultiplicirt, vnd mit 3 getriplicirt ist mit 3 gemultiplicirt, als wir jn der figur haben gesatzt, das kf, das supplement (Fig. 27), das ist √ʒ |35, der medialis, welchs radix ist die superficies. So wir nun wollen in eine summa bringen die zwei supplementa kf vnd cg, vnd nachdem sie gleich sind, so duplirn wir √ʒ |35 dermassen, wir multiplicirn das mit 2, dermas die multiplication saget, wir multiplicirn nicht 35 an sich, sondern den radicem hierin, dieweil also √ʒ |35 potentia ist vnd superficialis, so mus
139′ gleich mit gleich multiplicirt werden. Wir machen 2 auch ad potentiam |

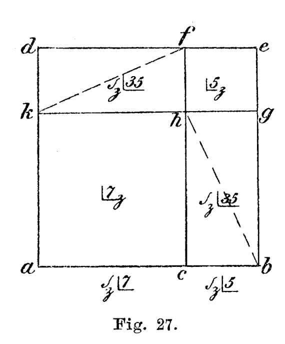


Fig. 27.

der furgelegten duction, khumbt 4. Also multiplicirn wir 35 mit 4, khomen 140, vnd √ȝ von 140 seind die supplementa, vnd hierumb ist diser numerus in potentia irrationalis. Sprechen wir, das geduplirt jm quadraten sey mit dem quaternario gequadruplicirt, vnd in cubo mit dem octonario geduplicirt, das ist die vorgelegt zal geoctuplicirt. Also das allewege der duplandus, triplandus, quadruplandus etc. an sich neme das vocabulum der vorgelegten zalen des radix, der do soll geduplicirt werden, getriplicirt oder gequadruplicirt werden, vnd also mugen wir sprechen gleichmessig jn der vngleichen benennungen. Also wir wollen duplirn 2√cℓ von 5. Wir cubicirn 2, werden 8, vnd 5 mal 8 macht 40, vnd √cℓ von 40 seind 2√cℓ von 5. Nun sollen wir 40 duplirn, so haben sie jre benenung vom cubic, darumb so wir √cℓ von 40 sollen mit 2 multiplicirn, vnd 2 vnbenent sein, hierumb benennen wir 2 a cubo, khumbt 8, vnd das multiplicirn wir jn 40, khumbt 320, vnd √cℓ von 320, das seind geduplicirt 2√cℓ 5, vnd also dergleichen in andern vnglicher benennunge, die wir also von kurtz wegen abschneiden, vnd wollen sagen von der Mediation, das ist die opposita speties diser beschriebenen. Vnd also | haben wir genuglich aufsgedruckt, 140 souil vns der duplatio not ist zu den surden.

Capitulum nonum de mediatione radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Mediatio vero, vel tertiatio, sive quaternatio radicum numerorum propositorum est, quemadmodum numerorum propositorum per ductionis vocabulum divisio. Radix huius quotientis propositae ductionis quaesitum divulget.[1])

Hie eruolget Algebras seine letzte spetiem der irrationalischen zaln, welche do ist die mediation, ein anfang der diuision, als do duplatio ist der multiplication, wann die cleinste merung wirdt mit 2, vnd die cleinste thailung mit 2, vnd laut der text zum teutschen also:

Die Mediation oder tertiation oder quaternation der radicum furgelegter zaln, ist gleich als die vorgelegten zaln durch das vocabulum der duction gemes gethailt wirdt. Vnd radix des quotienten furgelegter duction eroffnet die frage.

Als wir clerlich wollen berichten, wir wollen medirn √ȝ 64, so wissen

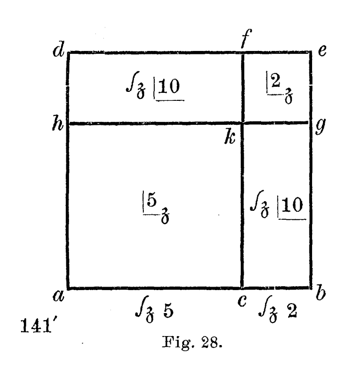
1) Die hier entwickelte Regel ist in moderner Bezeichnung

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^n}},$$

wieder für $b = 2, 3, 4$ und $n = 2$ und 3.

140′ wir, das vocabulum ist √ʒ, hierumb so mussen wir gleich ducirn 2, so wir | sprechen 2 mal 2 ist 4, also √ʒ 4 ist gleich in der duction 64. Hierumb thailen wir 64 in 4, khomen 16, vnd radix dauon, als 4, bericht die frage, vnd also ist es auch in der ternation, das wir allewegen similia similibus sollen opponirn. Als ich wolt tertioniren √ʒ von 7, so für der duction gemes die 3, wirdt 9, damit thail 7, facit $\frac{7}{9}$, vnd √ʒ bericht die frag, vnd deſsgleichen jn andern ductionibus. Als wir setzten, wir wollen quarternirn √cꝭ von 920. Wir nemen den principen, das ist den fursten der quaternation, ist 4, furen den der duction gemes, wird 64; damit thailen wir 920, steet $\frac{920}{64}$, vnd √cꝭ ist die quaternation.

Vnd ob aber kheme einem jtzlichen, der do lesendt were, zweifel, das sich solchs nicht finden soltt etc, wollen wir in nachuolgendem capitel beweysen von jtzlichen speties besonder, wie man die radices der surden extrahirn solt, damitt ein jtzlicher vorstehen mag, was wir hervorgesagtt haben vnd durch alle speties demonstrirt. Also mogen wir auch wie vor pey dem text einfuren, so die benennung vngleich were. Als ich wollte medirn 3 √cꝭ 5, so thun wir jme wie vormals. Wir reducirn die 3 radices 141 in einem radicem. Also | nachdem 3 kheine benente quantitet ist, so benennen wir sie der duction gemes, khumen 27, vnd multiplicirn 27 mit 5, khumen 135, seind 3 radices cubice von 5. Solche 135 thailen wir mit dem principi der mediation der duction gemes, seind 8, khumen $16\frac{7}{8}$, vnd radix cubica von disem beweist gemedirte 3 radices cubice von 5, vnd ist recht. Und alle natur, die die diuision hat, die hat auch die mediation, vnd doch auch mit vnterschid. Wann die diuision thailet numeros potentionales mit dem divisori ad longitudinem, wann der quotient allwegen ist das latus relativum des diuisoris, welcher, so er wider jn den quotienten gemultiplicirt wirdt, gebirt den vorigen numerum superficialem. Aber die mediation die halbirt die potentionalische zal vnd longitudines (Fig. 28), wann wir sprechen in die vorigen demonstrationes geometrice, das die zwei supplement dk vnd cg seind zusamen √ʒ 40, welche also in potentia seind. So sie wider gemedirt werden, khumbt wider √ʒ 10 wie vor, vnd pleibt in potentia, das ist in der division nicht. Also, wollen wir solchs wie vor jn der duplation demonstrirt haben, vnd also streckt sich die duplation vnd | Mediation ad potentiam vnd longitudinem, wiewol sich die



141′ Fig. 28.

diuision in numeris auch dahin zeuchett, das wir auch mugen longitudinem thailen, wir sind das aber hieher nicht gebrauchent, sondern wir nemen

ein zal gewenlich vnd thailen die, das ist in potentia, vnd der divisor latus relatiuum des quotienten, vnd die multiplication nemen wir producirt aus zweien numeris linearibus, welche, so die mit einander werden gemultiplicirt, producirn einen superficien. Aber die duplation vnd mediation hat ALGEBRAS gesatzt, darumb das sie sich strecken, als wir sie hie gebrauchen ad utrumque, das ist ad numeros potentionales vnd longitudines. Aber die additiones vnd subtractiones haben wir demonstrirt, wann wir mogen addirn radices oder subtrahirn der potentz oder longitudinem. Als wir dann in binomiis sagen werdenn, vnd wollen also vnsere speties hie haben beschlossen, die wir alle sembtlich zu probirn durch die numeros mutuatos fürnemen werden, damit ein jtzlicher muge sprechen vnd erkennen, das der numerus surdus ad instans, das ist in den letzten quadranten oder scherpf nicht moge quadrirt werden, vnd solche demonstration wollen wir in den binomiis einfuren, vnd sagen, jn welcher weise er | vngequadrirt pleiben 142 mus, vnd warumb es vnmuglich ist, surdum zu quadrirn, wiewol etzliche vornemen den surdum zu quadrirn durch wege der fraction radicis, sagen wir vnd noch kunfftig demonstrirt wirdet, das dj nicht zu hertzen nemen, das vnser vorfarn so grosse muhe gehabt haben jn den Binomiis vnd andern surden, vnnd so es muglich were, es auch demonstrirt hetten. Sag ich commentator, wo das muglich were, das der diameter commensurabilis costae, vnd do gar vnbillich wurde gesprochen bey den philosophis aus, so werden wir sunderlich hernach setzen von den Binomiis.

Capitulum decimum de propinquitate radicum numerorum irrationalium exstirpandarum numero mutuato.

Radicum exstirpationem numerorum irrationalium penitus ab arte reliquit natura; ea vero propinquitate quadam, qua praediximus, numero mutuato rationali, quod cum discrimine demonstrare licet. Quoniam quidem in simplicem, quadratum vero eius in denominationem si ducatur quantitatem propinquitatem quaesitae radicis. Radix huius de tanto propinquius ostendit, de quanto maior numerus millenarius mutuabitur. Sic reliquarum ductionum proponitur notitia propinquitatis radicum. | [1]) 142′

1) Die Fassung des lateinischen Textes giebt die Anweisung, zunächst aus $\sqrt[n]{a}$ die neue Aufgabe $\frac{\sqrt[n]{ab^n}}{b}$ zu bilden, und aus der neuen Zahl die Wurzel, so weit es in Ganzen möglich ist, auszuziehen. Der deutsche Bearbeiter benutzt als solche Hilfszahl stets 1000 oder überhaupt eine Potenz von 10, so dass er also Decimalbrüche erhält. Er zeigt die Art der Benutzung an Beispielen, die er bei den einzelnen Rechnungsarten früher gefunden hat.



Hie eruolget Algebras die extraction der numerorum surdorum, vnd wie man hie radices soll extrahirn mit dem numero mutuato, das ist mit einer gelehenten zal, welcher text zum teutschen laut also:

Die extrahirung des radicis der irrationalischen zaln hat die kunst der natur gantz vorlassen, das ist vnmuglich zu finden, aber von dem wir gesagt haben zu demonstrin sollen mit einer nahenden weis mit einer entlehnten zal, welche so sie in jr gleich gefurt wirdt, das ist die vnbenenth jn die vnbenenthe, vnd der quadrat derselbigen jn die benenthe, von welcher zal also radix die nahent vnd propinquitet des gesuchten radix beweist. Also ist naher, souil grosser ist die entlehente zal genomen mit den limiten der millenaren, also wirdt gefunden die propinquitet des radicis der andern duction, die wir gesatzt haben.

Von solchem text einen schrifftlichen sin einzufuren durch alle speties, vnd wie wir den text vorstehen sollen, gibt der text anzeigung der andern duction, das ist der quadratischen, vnd desgleichen jn andern, vnnd kurtzlich zu treffen zu der materien, heben wir an, als in andern Capiteln ge-143 satzt ist. |

Additio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.

Wir addirn √ȝ 8 zu √ȝ 18, soll machen geaddirt √ȝ 50. Das mochte einer dubitirn oder zweifeln, so wollen wir mutuiren millenarium, das ist 1000, wollen den nach dem text quadrirn, wirdt 1000000. So wir nun haben zwo benente quantiteten √ȝ 8 + √ȝ 18, so multiplicirn wir der jtzlichen eine in das quadratum, das ist in 1000000, khomen mit 8 jn numeris 8000000, vnd von solchen sollen wir extrahirn radicem ad propinquum, facit 2828 millesimas. Also so wir eine grossere zal hetten mutuirt, so were das residuum, so vber ist bliben, noch subtiliter resoluirt, vnd also fort, vnd dennoch khombt es nicht ad verum quadratum. Wir multiplicirn desgleichen 18 jn die zal, extrahirn, khomen 4242, die addirn wir zu 2828, wird 7070, vnd die zwey residua mogen vielleicht vnam millesimam machen. Wir extrahirn √ȝ 50, multiplicirn auch in die zal 1000000, extrahirn, soll radix bringen 7070 oder auf das negst 7071, dann ytzlicher extraction ist blieben ein gros Residuum. Wir mogen den radix noch subtiliter suchen, so wir den Millenarium noch grosser mutuiren, zugleich jn cubicis vnd andern ductionibus, doch khomen wir nimer ad ultimum quadratum oder scherpf.[1])

1) Verfasser hat früher gefunden $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{50}$. Um das zu prüfen sucht er, mit Hilfe der Zahl 1000, $\sqrt{8} = \frac{2828}{1000}$ und $\sqrt{18} = \frac{4242}{1000}$ nebst jedesmal

Additio radicum numerorum irrationalium incommensurabilium longitudine. | 143'

Wir haben gesatzt jn vnserm dritten Capittel der incommensurabilium, das ʃȝ 5 + ʃȝ 3 geaddirt seindt ʃcs |8 + ʃ60 ȝ.[1]) Das wollen wir durch mutuatum probirn. Wir suchen, was do seind vor ʃȝ 5 vnd ʃȝ 3, multiplicirn ytzliches jn 1000000, wie vor, vnd extrahirn, finden wir jn millesimis vor ʃȝ 5 2236 vnd residuum |304, das schreiben wir ad proprinquitatem also, wir duplicirn radicem, wird 4412, addirn vnitatem, wird 4473, das setzen wir vor den nenner. Also sprechen wir, der negste radix von 5 sei in millesimis $2236\frac{304}{4473}$. Zugleich den andern von 3, khomen $1732\frac{176}{3465}$. Solchs addirn wir ad propinquum jn den millesimen, khumen 3968, vnd so wir die fractionen solen zusamenbringen, thun sie kheinen gantzen Millesimam. Nun haben wir 8, ein vnbenenthe quantitet, darumb multiplicirn wir, als der text sagt, 8 darein jn den mutuatum simplicem, werden 8000, vnd in 60 multiplicirn wir quadratum, wann sie benant ist, vnd suchen radicem in gleicher form wie vor, khumbt 7745 vnd residuum 14975. vnd steet also $7745\frac{14975}{15491}$ zusamen facit 15745, vnd die fract macht beileuffig einen Millesimam vnd doch nicht gar. Nun saget der erste quadrat ʃcs, darumb multiplicirn wir 15746 in den mutuatum 1000 vnd extrahirn radicem, khumbt | 3968, die obgemelten Millesimen, vnd ist rechtt. Warumb wir 144 aber 15746 jn 1000 multiplicirn, dann dj millesimi seind nicht benent sondern allein von der gantzen quantitet. Vnd also mogen wir die andern ductiones auch probirn.

Subtractio radicum numerorum irrationalium communicantium longitudine.[2])

Wir haben gesatzt in der subtraction, das do restat ʃȝȝ 32, so ich subtrahire ʃȝȝ 5 von ʃȝȝ 405, so sehen wir an zum ersten die duction. Wir

einem Bruchtheil eines Tausendstel. Beides addiert giebt also nahezu $\frac{7071}{1000}$. $\sqrt{50}$ ist aber ebenfalls nahezu 7,071, also die Rechnung richtig ausgeführt. Noch genauer würde man die Wurzeln finden, wenn man eine noch höhere Potenz von 10 genommen hätte, ohne aber jemals zum vollen Werthe derselben zu gelangen.

1) Das Beispiel $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8 + \sqrt{60}}$ findet er so als richtig. $\sqrt{5}$ ist in obiger Weise gesucht $= 2236\frac{304}{4473}$ Tausendstel, wo der Bruch nach der Formel $\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2n + 1}$ gefunden ist. Ebenso ist $\sqrt{3} = 1732\frac{176}{3465}$ Tausendstel, das ist mit $\sqrt{5}$ zusammen gleich 3968 Tausendstel, wobei die Bruchtheile noch kein ganzes Tausendstel ergeben. Ferner ist $\sqrt{60} = 7745\frac{14975}{15491}$ Tausendstel, dazu 8 Ganze = 8000 Tausendstel, giebt 15745, oder des Bruches halber nahezu 15746 Tausendstel. Daraus die Wurzel, nachdem nochmals mit 1000 vervielfacht ist, giebt wie oben 3,968.

2) Hier verzichten wir, ebenso wie in den folgenden Beispielen, auf eine Wiedergabe in moderner Bezeichnung.



nemen quadratum de quadrato von 1000, facit 1000000000000, vnd in solche quantitet multiplicirn wir 5, extrahirn radicem, khumbt nach der duction gesatzt von dem ʒʒ 1499 millesimae. Wir multiplicirn auch 405 in die zal, extrahirn, khumen 4486. Von dem zihen wir ab 1499, bleiben 2987. Souil sollen auch khomen von ∫ʒʒ 32. So thun wir, wie gemelt, khumbt auch 2987, ist rechtt. Desgleichen operirn wir von den numeris, die do seind incommensurabiles longitudine.

Subtractio radicum numerorum incommensurabilum longitudine.

Als wir gesatzt haben jn der subtraction, so wir subtrahirn ∫ʒ 5 von ∫ʒ 12, restat ∫cs |17 — ∫240ʒ, also thun wir wie vor, vnd multiplicirn jn 144′ quadratum 1000, | das ist in 1000000, den ∫ʒ 5, werden 5000000, vnd ∫ʒ von dem ist $2236\frac{304}{4473}$ millesime; vnd gleicherweis suchen wir von 12, khomen in den mutuaten $3464\frac{704}{6929}$ millesime vff das negste. Wir subtrahirn von einander, pleiben 1228, die Bruche lassen wir faren, dann sie bringen khein jrrunge, angesehen, je grosser man den numerum mutuirt, je grosser der residuum wird, vnd weniger an seiner bedeutung ist. Vnd also khomen vom quadrat in potentia auch souil ∫cs |17 — ∫240ʒ. So nun 17 ist vnbenennt, das multiplicrn wir jn 1000, khomen 17000. Nun suchen wir ∫ʒ von 240. Also nach dem sie ist benent, so multiplicirn wir sie in das quadrat 1000000, khumbt 240000000, vnd ∫ʒ ist $15491\frac{28919}{30983}$. Das subtrahirn wir von 17000, als die negation des surden quadrat weist, bleiben 1509, die Bruch lassen wir stehen, als du vormals gehort hast. Sagt der quadrat ∫cs, also multiplicirn wir 1509 millesime, nachdem sie vnbenent sein, allein was sie von der gantzen quantitet sein, jn 1000, khumbt 1509000, vnd radix von dem khumbt 1228, vnd ist rechtt. Also mogen wir sprechen, das gemelter quadrat surd in seiner potentz der war restat ist. Vnd dergleichen magstu nemen experientiam jn andern ductionibus durch numerum 145 mutuatum. |

Multiplicatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben gesatzt in der multiplication zu multiplicirn ∫ʒ 5 mit ∫ʒ 7, vnd solte bringen ∫ʒ 35. Das probirn wir, bringen 5 ad numerum mutuatum, khomen $2236\frac{304}{4473}$, deſsgleich 7, khumbt jn millesimis $2645\frac{3975}{5291}$, vnd solche millesime multiplicirn wir mit einander, facit mit den Bruchen gemultiplicirt vnd wider gantz aufgehoben, als man in den Bruchen multiplicirt, 5916097, das Residuum lassen wir faren, vnd so wir mit 1000 aufheben, khomen 5916, das residuum lassen wir faren. Vnd so wir ∫ʒ von 35 extrahirn,

finden wir auch souil, vnd desgleichen magstu jn andern ductionibus alle surden radicen probirn, die wir weiter zu extrahirn jn der multiplication vormeiden von kurtz wegen, vnd wollen sagen von der division.

Divisio radicum numerorum irrationalium tam communicantium, quam incommensurabilium longitudine.

So wir thailen √ȝ 136 mit √ȝ 4, khumbt jm quotienten √ȝ 34, das sollen wir auch ad propinquitatem ostendirn. Wir suchen √ȝ 136, inmassen vormals gethan, khumbt $11661\frac{21079}{23323}$; | wir suchen √ȝ von 4, ist 2000; Wir **145′** multiplicirn 11661 in den radicem 1000, khumbt 11661000, vnd so wir das dividirn durch 2000, khomen 5830; das residuum lassen wir faren, vnd souil soll khumen, so wir extrahirn von 34 radicem, vnd khumbt gleich 5830, das residuum lassen wir bleiben, vnd also magstu propinquitatem noch neher finden, so du einen grossen numerum nimbst vnd den mutuirst. Vnd wie du dich also jm quadrat hellst, also magstu gleichmessig in andern ductionibus thun.

Duplatio radicum numerorum tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Also mogen wir sagen, das wir gesatzt haben zu duplirn √ȝ 12, vnd seind khomen √ȝ 48. Das sollen wir demonstriren durch numerum mutuatum. Haben wir vormals zu vorstehen geben, das do duplatio sich gleichmessig heltt in den multiplicationibus. Wir suchen √ȝ 12 aus gemeltem mutuato 1000, vnd multiplicirn 12 in seine quadraten, darumb sie eine benente quantitet ist, khumen pro radice $3464\frac{704}{6929}$; vnd so wir solche millesime duplirn, khomen 6928, vnnd souil khomen auch von √ȝ 48, vnd ist recht. Wir mogen solchs auch nach der multiplication vorfurn. Also wir wollen multiplicirn √ 12 mit 2. Also denominirn wir 2, wirdt 4, vnd **146** multiplicirn √ȝ 4 mit √ȝ 12, khumbt | √ȝ 48. Wir suchen auch √ȝ 4 durch das mutuatum, finden 2000, das multiplicirn wir in die millesime von 12, werden 6928000, vnd solches dividirn wir mit 1000, facit 6928, khumbt wie vor, vnd ist recht.

Mediatio radicum numerorum irrationalium tam communicantium quam incommensurabilium longitudine.

Wir haben anfengklich vormeldung gethun von der Mediation der surden vnd gesatzt zu tertionirn √ȝ von 7. Wir suchen √ȝ von 7 durch numerum mutuatum, das ist 1000000, khumbt √ȝ 7 in millesimis $2645\frac{3975}{5291}$ vnd $\frac{1}{3}$ von den millesimen ist $881\frac{2}{3}$ ad propinquum, vnd souil soll auch machen √ȝ $\frac{7}{9}$, als wir im Anfang gesatzt haben. Wann 7 ist 2645, das

multiplicirn wir in 1000, khumbt 2645000, vnd thailen das mit √ȝ 9 in millesimis, der do seind 3000, vnd khumbt wie oben $881\frac{2}{3}$, vnd desgleichen in andern ductionibus, mogen wir vns halten nach dem form der oben vermelten diuision; wann die mediation ist ein thailunge durch den minsten diuisor, als do ist duplatio eine multiplication durch den cleinsten multiplicatorem, vnd also wollen wir haben jnserirt um vorgesatzte speties vnd 146′ wollen also weiter melden von der extrahirung. Solln wir mercken drey namhafftige | stuckh. Zum ersten, wie man per numerum mutuatum khan erkhennen, welche zal irrationalis sey oder nichtt; zum andern wollen wir sagen, wie man vff das subtilest ein yede fract schreiben soll der residua so in den zaln vberpleiben der duction; vnd zum letzten wollen wir geben Anzaigung, jn welcher gestalt vnser vorfarn vnd maiores jn manigfaltige wege gebraucht haben die propinquitet der surden vnd numerum mutuatum, als sonderlich, so wir gebrauchen der Astronomie der sinuum vnd andern tabellen, als wir im andern tractat sagen werden, der Areen, das ist von den Commensuren (Continentzen) der Zirckel vnd ander superficien. Vnd zum ersten, wie wir sollen erkhennen durch den mutuatum numerum, ob ein zal rationalisch sey, wollen wir setzen ein mercklich beyspil.

Primus punctus annexus.[1]) Ich hab gefunden in einer furgab, das do ist valor cosse √ȝ von 121. Wolte ich gern wissen, was do radix were, vnd ob er kheinen rationalen hette, das man nichts dester weniger mochte wissen, was √ȝ von 121 were an schilling in goldt, das do eine gemeine rechnung ist in allen andern; vnd ob er schon radicem hett, das wir dann noch nichts desterweniger in der operatien abgienge. Also multiplicirn wir wie vor in quadratum von 20, machen 400; das mit 121 gemultiplicirt 147 facit | 48400. Also extrahirn wir radicem, finden wir 220, vnd gehet auf. Also sprechen wir, das sie hat einen rationalen radicem ex secunda parte secundae noni geometriae sagende, so ein quadrat ein zal multiplicirt, welche also vffgehet, so mus also dieselbige Zal sein gewesen ein quadrat. So wir suchen den radicem finden wir 220 schilling in goldt, vnd darumb ist es aufgangen, sagen wir, nachdem 20 ist gewesen der mutuant, also heben wir auf 220 schilling in goldt durch die mutuanten, khomen 11. Sagen wir, das √ȝ von 2121 ist 11; vnd also magstu uff yede operation operirn, als in cubicen, quadraten de quadratis vnd andern ductionibus.

---

1) Hier sagt der Verfasser, man solle eine Zahl, von der man nicht weiss, ob sie ein Quadrat ist, mit einem Quadrate multiplicieren, dann aus dem Produkte die Wurzel ziehen, geht dann die Wurzel auf, so ist auch die ursprünglich gegebene Zahl ein Quadrat gewesen, nach Euklides IX, 2: *Si vero ex ductu tetragoni in numerum aliquem tetragonus producatur, illum numerum aliquem esse tetragonum.*



Secundus punctus annexus.[1]) Zum andern wollen wir einpilden, wie man aus rechtem grunde die negste propinquitet schreiben soll der surden fraction. Wollen solchs erstlich in quadrato erclern. Sam also, wir extrahirn durch den mutuatum numerum 1000, finden wir in den millesimen ∫ʒ von 3 1732, vnd das residuum ist 176. Also duplirn wir 1732 vnd addirn vnitatem, wirdt 3465, das schreiben wir vor den nenner also $1732\frac{176}{3465}$. Vnd ist die vrsache, nachdem alle zalen zwischen allen quadraten surden sind, vnd alle quadrat distiren durch die impares, die wir nennen gnomones, also sagen wir, das zwischen dem quadrat von 1732, der do ist 299824, vnd dem quadrat | von 1733, der einer vnitet mehr ist, darin das vber- 147' pleibende residuum participirt 3003289. So wir sie von einander ziehen, pleiben 3465, der vorgemeldet nenner, jn welcher distantz die fract auf das negste proportionirt. Wann, so jme der zeler gleich were dem nenner, so erreicht es den negsten quadrat einer vnitet mehr, vnd also ist es allwegen, der radix geduplirt vnd einer vnitet mehr die distantz des negsten quadraten, wann der quadrat wechst mit zweien supplementen, die do seind der geduplirte radix erstlich, vnd mit dem gnomone, welche also circumscriptibilia thun ein imparem, wann alle zal geduplirt gerad oder vngerad mit zugebung der vnitet erwechst vngerade. Haben also genugsam vom quadraten gesagt, vnd defsgleichen in andern ductionibus. So khunen wir die fract nicht neher schreyben, dann durch die distantz der negsten zweien potentionalischen zaln vorgelegter duction werde gesatzt vor den nenner des Residui. Doch haben wir erkhennen geben vom cubic, als wir wolten suchen den nechsten ∫ce in mutuato 1000 von 2. Wir cubicirn 1000, khomen 1000000000, darin furen wir 2 vnd extrahirn, finden wir nach der propinquitet pro radix 1259. Nun fragen wir, wie wir sollen signiren die denomination des residui. Wir cubicirn 1259, | vnd was khumbt, be- 148

---

1) Die hier gegebene Anweisung, eine angenäherte Wurzel beliebigen Grades aus einer Zahl zu erhalten, kommt auf die Formel hinaus, welche H. Staigmüller in der Festschrift zu Cantor's siebzigstem Geburtstage bei Johannes Scheubel nachgewiesen hat, nämlich

$$\sqrt[n]{a^n + b} \sim a + \frac{b}{n_1 a^{n-1} + n_2 a^{n-2} + \cdots + n_{n-2} a + 1}.$$

Den Nenner nennt er die Distanz zwischen a^n und $(a+1)^n$, sie ist ja auch die Differenz beider. Für $n = 2$ ist so $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2n + 1}$ die schon den alten Griechen bekannte Formel, für $n = 3$, $\sqrt[3]{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2 + 3a + 1}$, oder wie Verfasser es noch darstellt, $= a + \frac{b}{3a(a+1) + 1}$ u. s. w.



halten wir vnd lassen den radix einer vnitet mehr sein, in welcher das residuum participirt, das ist 1260. Cubicirn den auch, vnd nehmen eins vom andern, vnd was pleibt, soll vor die denomination geschrieben werden des Bruchs, vnd also in allen ductionibus. Oder addir vnitatem zu dem radici, das ist 1260, solchs multiplicir mit dem extrahirten 1259, was khumbt, triplicire, vnd dem triplat gieb aber vnitatem, so khumbt die obgemelte distantz auch der zweier negsten cubic.

Tertius punctus annexus,[1]) Zum dritten wollen wir sagen, wie vnsere vorfarn solche mutuirung gebraucht haben. Khurtzlich der halbe zirkhel wer 1000 gethailt, vnd haben funden ein sin durch cordam vnd arcum; denselbigen zu extrahirn von 2000000: die frage, wieuil gradus der sinus habe in gemelten diametro. Also exstrahirn wir den radix, finden wir 1414 millesime des gemelten sinus jn diametro gestreckt. Solche millesime heben wir auf durch den mutuanten 1000, khumbt 1, vnd ist 1 gradus, Rest 414. Das multiplicir in 60, khumen 24840, das thail auch mit dem mutuanten 1000, khumen 24 minuten, vnd pleiben 840; das multiplicir wider mit 60, khumen 50400, vnd das dividir aber mit dem Mutuanten 1000, khumen 50 secund, pleiben 400, Die multiplicir mit 60, khumen 24000, thaile mit 148' dem Mutuanten, khumen 24 tertz, geht gleich auf. Also sagen wir, | das gemelte sinus in diametro hat 1 gradum, 24 minuta, 50 secunden vnd 24 tertz. Defsgleichen magstu suchen cordam et arcum per gradus in radicibus, vnd also magstu jn auch in die signa applicirn, das die erste vnitet ein gantz signum ist, die 404 resoluir mit 30, werden 12 gradus, restant 420, die resoluir in 60, vnd thaile allwegen mit dem mutuanten, khumen 25 minuten, pleiben 200, die resolvir mit 60, wie vor, khumen 12 secunden, vnd gehet auch auf; vnd so du solche resoluten reducirst in die secunden vnd thailest jrer gemeinsamen denomination, so khumbt der erste radix 1414 wider. Vnd also wollen wir beschliessen vnd gesagt haben, souil vns in der gebra geburlich ist gewesen von dem mutuirn.

---

1) Durch diesen dritten Anhang zeigt der Verfasser, weshalb man im Mittelalter jene merkwürdige Umwandlung der decimal in der vorher gezeigten Weise gefundenen Wurzel in Sexagesimalbrüche vornahm. Es war bei allen astronomischen Rechnungen, für die es ja nur Tafeln in Sexagesimaltheilung gab, nothwendig, die Resultate in derselben Form zu erhalten, wenn man solche Tafeln benutzen wollte. War also z. B. ein Sinus zu finden, der $= \sqrt{2000000}$ sein sollte für den Halbmesser gleich 1000, so fand man durch Wurzelausziehung zunächst dafür 1,414. Den Decimalbruch verwandelte man dann durch Multiplikation mit 60 und Division durch 1000 in Minuten, den bleibenden Minutenbruch in ähnlicher Weise in Sekunden u. s. f. Man erhält so $\sqrt{2} = 1$ Grad $24'50''24'''$, und konnte nun in der ebenso berechneten Sinustafel den Bogen finden, der dem Sinus zugehörte.

Capitulum undecimum de numeris irrationalibus potentia de eorumque perquirendis radicibus.

Omnium ductionum irrationalium perquirendas radices longitudine descripsimus. Earumque vero, quarum potentiae irrationales sunt et medialis numeri participantes naturam, similiter, ut diximus, his digestis spetiebus numeri irrationalis expediuntur, solum interceptum est, quod ad radicem radicis devenitur ductionis propositae in longitudine. | [1]) [149]

Nachdem Algebras declarirt hat die speties der numerorum irrationalium in longitudine, hie eruolget er sagende von den numeris irrationalibus, welche do seind potentia irrationales, vnd laut gemelter text zu vnserm teutschen also.

Aller duction radices zu finden jn der lenge, das ist in longitudine, haben wir anzeigung vnd beschreybung gegeben. Aber von den, welche potentz irrationalis ist, vnd die natur haben der numerorum medialium, als wir jnn ersten capitel gesagt haben, werden vns aufsgerichtt durch vorgemelte speties, allein das aufsgenomen, das man khumbt zu den radicibus der radicum der duction, welche dann furgegeben ist, jnmassen dann die natur des medials gelert ist.

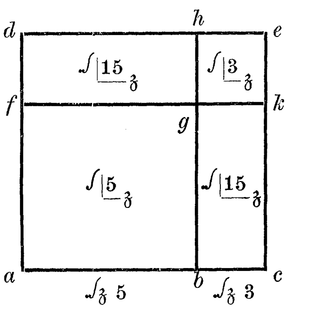
Von disem text einzufuren, wollen wir dich berichtenn mit rationalischen Exempeln, vnd wollen sie also more irrationalium setzen, dabej abzunemen ist, wie es mit den surden soll gehalten werden, welche do khein mensur haben. Als wir setzen zu addirn zwen quadrat $\surd\underline{|4}_{\mathfrak{z}}$ zu $\surd\underline{|9}_{\mathfrak{z}}$. Wir wissen, das die potentz der gemelten quadrat more irrationalium gesatzt ist, der quadrat 5, vnd radix von 5 ist die longitudo. Also addirn wir durch vnsere vorgesatzte speties, finden wir, als der text sagt, $\surd_{\mathfrak{z}}\,25$, vnd ist in potentia $\surd\underline{|25}_{\mathfrak{z}}$, vnd also radix radicis quadrati also figurirt $\surd\underline{|25}_{\mathfrak{z}}$, vnd also steet in der longitudine, das ist $\surd_{\mathfrak{z}}\,5$, vnd desgleichen in andern | ductionen. Als ich will setzen in zwei proportionalische Cubic [149′] $\surd\underline{|18}_{\mathfrak{ce}}$ vnd $\surd\underline{|27}_{\mathfrak{ce}}$. Wir wissen, das 8 ist der Cubic in potentia von jn zweyen, vnd also, so wir die cubic addirn nach vnsern vorgesatzten speciebus more surdorum, khumen $\surd\mathfrak{cs}\ \underline{|35+54+36}_{\mathfrak{ce}}$ vnd $\surd\mathfrak{ce}$ von dem ist der cubic

---

1) Hier wird das früher Gesagte auf mediale Grössen ausgedehnt, also auf solche, die auch in der Potenz irrational sind, wie $\surd\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$ und $\surd\underline{|3}_{\mathfrak{z}}$, sie geben natürlich als Resultat einer Addition $\surd\mathfrak{cs}\ \underline{|\surd\underline{|5}_{\mathfrak{z}}+\surd\underline{|3}_{\mathfrak{z}}+\surd\underline{|250}_{\mathfrak{z}}}$, das ist in unserer Bezeichnung:

$$\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}=\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt[4]{250}}.$$

in potentia vnd also radix radicis cubica, der do ist $\sqrt{}\,\underline{|35 + 54 + 36}_{c\ell}$, das ist $\sqrt{c\ell}\ 5$, das ist additio, vnd desgleichen in andern ductionibus allein, das do khumbt $\sqrt{}$ der furgelegten duction der vorgesatzten spetien. Vnd solche zal participanten vnd haben die natur der zal medialis, dann als die zal medialis allwegen ist irrationalis vnd radix radicis desselbigen seind die supplementa, also seind die numeri potentionales surdi die quadraten aber cubi, welche der diameter thailet durch mittel entzwey, als vns cleret quarta secundi Geometrie. So wir aber wollen setzen den quadrat $\sqrt{}\,\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$ vnd den quadrat $\sqrt{}\,\underline{|3}_{\mathfrak{z}}$ (Fig. 29), so wir sie nach den vorigen spetiebus addirn, khomen $\sqrt{cs}\,\underline{|8 + \sqrt{}60}_{\mathfrak{z}}$, vnd radix von dem ist die potentz vnd $\sqrt{cs}$ das ist in longitudine. Vnd also haben dise numeri allein ein vnterschied, das sie durch radicem radicis khomen ad longitudinem, vnd solche zal



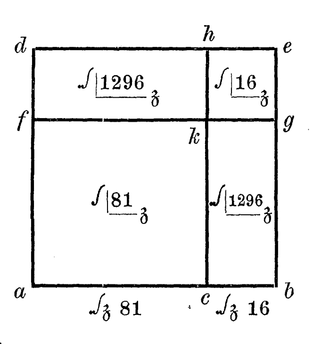


Fig. 29.

werden wir viel haben in den binomiis vnd den 13 zaln irrationaln, als
150 wir setzen werden mit sampt sonderlichen von dem numero | mediali. Vff das wir aber mogen khomen jn vorstandt der zaln, welche do potentia jrrationales seind, wollen wir setzen eine gemeine demonstration geometrie. Wir wollen addirn $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 5$ zu $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 3$. Also wir quadrirn $\sqrt{\mathfrak{z}}$ von 5, khumbt $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 5$, das ist der surd quadrat $\sqrt{}\,\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$; wir quadrirn $\sqrt{\mathfrak{z}}$ von 3, khumbt $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 3$, das ist der surd quadrat $\sqrt{}\,\underline{|3}_{\mathfrak{z}}$. Solche zwen quadraten surd mit sampt den zweien medialen zusamen geaddirt radix gantzer quantitet als $\sqrt{cs}\,\underline{|\sqrt{\mathfrak{z}}\ 5 + \sqrt{\mathfrak{z}}\ 3 + \sqrt{}\,\underline{|250}_{\mathfrak{z}}}$, radix von diesem gantzen quadrat ist zusamen addirt $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 5$ vnd $\sqrt{\mathfrak{z}}\ 3$, das ist in longitudine. So wir aber allein wollen addirn die zwei quadraten surden, als $\sqrt{}\,\underline{|5}_{\mathfrak{z}}$ vnd $\sqrt{}\,\underline{|3}_{\mathfrak{z}}$, sagen wir, jnmassen in vnsern vorgesetzten spetiebus, do wir sie genomen haben in longitudine, do waren sie zusamen $\underline{|8 + \sqrt{\mathfrak{z}}\ 60}_{\mathfrak{z}}$. Also was vor jn longitudine ist genomen, das ist hier potentia, dann $\sqrt{\mathfrak{z}}$ von 5 vnd $\sqrt{\mathfrak{z}}$ von 3 zusamen geaddirt, sie sein potentionales oder in longitudine, so machen sie $\underline{|8 + \sqrt{\mathfrak{z}}\ 60}_{\mathfrak{z}}$.

Wir nemen diese quantitet vor einen quadrat, so ist $\surd\mathfrak{z}$ von solcher gantzen quantitet die longitudo also gefigurirt: so wir sie | aber nemen $\surd$cs, den quadrat vom quadrat in potentia, so ist $\surd$cs $\underline{|\,8 + \surd 60}_{\mathfrak{z}}$ die longitudo, deſsgleichen, so wir ansehen radicem von dem quadrat $\surd$cs $\underline{|\,\surd\mathfrak{z}\,5 + \surd\mathfrak{z}\,3 + \surd\mathfrak{z}\,250}_{\mathfrak{z}}$ in potentia, so ist radix radicis der gantzen quantitet die longitudo. Vnd hierumb wollen wir mit dem text beschliessen, das der protentionalischen surdischen zalenn addirung vnd der longitudinen surden ist ein form, deſsgleichen durch andere speties, Dann allein mit dem seind sie vnternomen vnd vnterschieden was vor radix radicis ist gewesen der potentz in longitudine das ist der radix radicis. Vnd solchs magstu auch durch numerum mutuatum probirn, als wir dich vnterricht haben. Vnd wollen also hiemit beschliessen das dritt Buch Gebre vnd Almuchabole, vnd seind furter sagen im vierdten Buch von den potentionaliteten der rationaln sampt den jrrationaln proportionaliteten vnd medieteten, welche also dienende zu den Binomien, von den wir jm funfften sagen werden. 150′

Explicit tertius liber Algebrae. | 151

Librum quartum in alio volumine invenies. Siquidem quintum.

| *Liber quartus* Algebrae *Arabis de binomiis atque recisis, simul et omnium irrationalium numerorum, quorum sunt tredecim, et primo* Cod. Dresd. C. 405 Blatt 168

Capitulum primum de divisione eorundem in genere.[1])

Binomiorum disserere normas simul et recisorum una cum mediali et decem comitum praemissorum ducum praescripsimus, quorum omnium tredecim quantitates irrationales spetie differentes in genere continuarum ad numerum contrahuntur. Haec in ter geminas partes dogmate antiquorum et maiorum nostrorum distinguuntur.

1) Wie schon in der Einleitung gesagt ist, sollte dieses Fragment nicht als viertes, sondern als fünftes Buch bezeichnet sein, da nach dem Inhaltsverzeichnis des ganzen Werkes das vierte Buch von den Verhältnissen, Proportionen und Medieteten handeln sollte. Es ist sehr zu bedauern, dass der im Göttinger Manuskripte angezeigte zweite Band der Handschrift sich nicht ebenfalls gerettet hat. Das Fragment selbst giebt in etwas anderer Reihenfolge und abgekürzter Weise die Erklärungen Euklid's im X. Buche seiner Geometrie von den 6 Binomien und 6 Apotomen, während die Erklärung der dreizehnten Irrationale und die weitere Behandlung derselben verloren sind. Ich habe das Fragment mit aufgenommen, trotzdem die Erklärung des deutschen Bearbeiters fehlt, um wenigstens so weit als möglich über die Kenntnisse Rechenschaft zu geben, welche um die Mitte des XVI. Jahrhunderts in Deutschland in betreff der Arithmetik und Algebra bekannt waren.



Capitulum secundum de divisione bimembri in spetie binomorum et recisorum in sex normas.

Primo nosce distinguere geminas partes binomiorum et recisorum vel residuorum. Aut namque maius nomen tanto amplius minori portioni potest, quantum est quadratum communicantis, aut sibi incommensurabilis in longitudine. Hae ter sumptae distinxerunt normas sex binomiorum simul et 168′ recisorum eorundem. |

Capitulum tertium de sex normis binomiorum et recisorum seu residuorum secundum distinctionem tergeminam.

Tergeminae partes binomiorum et recisorum sunt: aut longior portio data rationali communicans et minor rationalis, sicque primum et quartum nominabitur; aut minus nomen rationali dato communicans et maius irrationale, sicque secundum et quintum vocabitur; aut neutri portionum eidem, sicque tertium et sextum appellabitur.

Capitulum quartum de modo inveniendi binomia et residua secundum sex differentias eorum.

Binomia atque recisa geminis partibus descriptis invenienda constant. Cum duobus numeris proportionalibus eorum primaeva fundamenta similibus proportione quatuor numerorum redigentur, et si primus amplius possit secundo quadrato aliquo communicanti maiori, aut incommensurabili in 169 longitudine, necesse est, quoque tertium | secundum illud esse posse quarto Palam itaque binomium atque recisum duobus numeris tantum potentia rationalibus constitui.

Capitulum quintum de radicibus inveniendis tam binomiorum quam residuorum secundum sex differentias.

Omnium binomiorum et recisorum radices investigemus, si maiorem portionem cuiuslibet in duas partes demetimur, quorum unius in alteram augmentum sit aequale quartae parti quadrati brevioris. Huius tunc radicem unius in alteram esse superficiem decem sequentium numeri medialis comitum distinguendam praemissorum ducum, quorum rationem geometricam subiecimus descriptam.

Capitulum sextum de duobus ducibus binomiorum et residuorum dicti binomium atque residuum absolutum.

Maiorem quidem portionem binomii primi atque sui residui si in duas partes, quemadmodum diximus, metimur, duoque hi numeri iuncti binomium

absolutum | atque idem residuum sub specie et differentia binomiorum con- 169′ stituunt. Ex hoc manifestum, binomium atque residuum absolutum duces geometrica ratione describendos subiecta esse necesse est.

Capitulum septimum de primis comitibus binomiorum et residuorum dicti binomiale primum et residuum mediale primum, deque eorum proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Secundi quidem atque sui residui sic eandem, ut diximus, binomii portionem permetimur, iunctique hi numeri bimedium primum et residuum mediale primum comitem componunt sub differentia bimembri prima binomiorum atque recisorum descripta. Mediales quidem sunt et rationalem unius in alterum duplum superficialem numerum continentes, quorum quadrata sunt mediale pariter accepta et potentia communicantia. | 170

Capitulum octavum de secundis comitibus binomiorum et recisorum dicti bimediale secundum et residuum mediale secundum, de eorumque proprietatibus et demonstrationibus geometricis.

Et tertii quidem eandem partitionem binomii maioris portionis discernimus, et bimedialem numerum secundum et residuum mediale secundum constituunt sub prima differentia bimembri binomiorum et recisorum inserta. Qui et mediale sunt et medialem superficiem continentes, quorum et quadrata mediale pariter accepta et potentia tantum, ut prius, communicantia.

Namensverzeichnis.

Sachregister
über Heft XII und XIII der Abhandlungen.

(Die Zahlen bis 336 beziehen sich auf Heft XII dieser „Abhandlungen“, die spätern auf das vorliegende XIII. Heft.)

C

Q

R

S

T

Y

Z

Folgende Druckfehler bittet man vor Gebrauch des Buches verbessern zu wollen.

340, 7 v. u.: AUGUSTINO. — *343*, 3 v. u.: Anfang. — *346*, 2: quando ela. — *351,* 32: Länge *gf*. — *354:* In der Figur o8o muss die auch im Original fehlende Stange ergänzt werden. — *360,* 4 v. u.: ita *cg*. — *383*, 6 v. u.: das besagt. — *389,* 1 v. u.: 49—38½. — *400,* 23: archo *hv*. — 25: archo *hv*. — grande. — 27: *hvc*. — 5 v. u.: pone *h*, *v*. — hoc. — *409,* 28: seien *d, q, o*. — *422,* 1 v. u.: 24,2487. — *431,* 5 v. u.: ARCHIMEDES. — *459,* 27: 4 der zens. — *480,* 1: decimum. — *504,* 26: restat.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR.

VIERZEHNTES HEFT.

MIT 113 FIGUREN IM TEXT.

INHALT:



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.



STUDIEN ÜBER MENELAOS' SPHÄRIK.

BEITRÄGE ZUR GESCHICHTE
DER SPHÄRIK UND TRIGONOMETRIE DER GRIECHEN

VON

AXEL ANTHON BJÖRNBO.

MIT 75 FIGUREN IM TEXT.

Vorwort.

Indem ich der Öffentlichkeit die vorliegende Abhandlung übergebe, habe ich die Verpflichtung, denen meinen Dank auszusprechen, die mir bei der Ausarbeitung derselben in der einen oder der anderen Weise behülflich gewesen sind. Aufser meinen Lehrern Herrn Prof. H. G. Zeuthen, der mir ursprünglich die Anregung zu dieser Untersuchung gab, und Herrn Prof. J. L. Heiberg, der mir aus seinen Kollationen Material entlieh, und die mir beide immer mit Rat und That beistanden, gebührt mein Dank in erster Reihe Herrn Dr. R. Besthorn, ohne dessen unschätzbare Auskünfte über die arabischen Menelaoshandschriften die Vollführung der wichtigsten Teile der Abhandlung nicht möglich gewesen wäre.

Dem K. Bayerischen Kultusministerium, sowie der Direktion der K. Hof- und Staatsbibliothek zu München, die mich mit der gröfsten Zuvorkommenheit in den Stand setzten, fünf der lateinischen Menelaoshandschriften aus Paris, Wien und Venedig gleichzeitig benutzen zu können, bringe ich meinen Dank dar; dem Vorstand der Handschriftenabteilung der K. Hof- und Staatsbibliothek zu München, Herrn Dr. F. Boll danke ich für alle von seiner Seite erwiesene Hülfe und Liberalität bei der Benutzung dieser Handschriften.

Meinem Freunde Herrn cand. mag. Raphael Meyer, der mir nicht nur durch eine vorläufige Untersuchung der Vatikanischen Menelaoshandschriften, sondern auch bei der Korrektur der ganzen Abhandlung beistand, sowie Herrn cand. phys. Ernst Wagner, der einen Teil meines Manuskriptes der mathematischen Terminologie wegen durchlas und kritisierte, danke ich freundlichst für ihre bereitwillige Hülfe.

Gröfsere Teile der Abhandlung sind in dem von Herrn Prof. A. v. Braunmühl geleiteten math.-histor. Seminar der K. Technischen Hochschule zu München vorgetragen worden, und die durch den Vortrag erregte Diskussion und gegen denselben ausgeübte Kritik sind meiner Arbeit sehr zuträglich gewesen, was jedermann, der sich mit den Braunmühlschen Arbeiten bekannt gemacht hat, leicht verstehen wird.

Die Abhandlung (jedoch ohne Nachtrag) wurde im Juni 1901 an die philosophische Fakultät, 2. Sektion der K. Ludwig-Maximilian-Universität zu München als Promotionsschrift eingereicht und von der Fakultät angenommen; als Inauguraldissertation dienten Teile des 1., 2. und 6. Kapitels.

Der Nachtrag, welcher erst nach der Drucklegung hinzugefügt ist, ist das Ergebnis von Untersuchungen in den Bibliotheken Roms. Die Form und der Umfang dieses Nachtrags, bei dessen Entstehung Zufälligkeiten eine Hauptrolle spielen mufsten, können mit vollem Recht kritisiert werden. Ich hoffe jedoch, dafs der Leser billigen wird, dafs ich den Inhalt dieses Nachtrags nicht in mehrere Spezialaufsätze und Notizen zerstückelt habe.

Was die Trigonometrie der Ebene betrifft, auf die ich in meiner Darstellung nur soviel Rücksicht genommen habe, als es mir durch den Inhalt von Menelaos' *Sphärik* geboten wurde, verweise ich den Leser, aufser auf die in der Abhandlung genannten Arbeiten, auf die Abhandlungen des Herrn Prof. Fr. Hultsch, und namentlich auf einen trefflichen Spezialaufsatz im *Weltall,* 2. Jahrg. Seite 49—55. Der Verfasser kommt hier Seite 53—54 zu Resultaten, die, was die Trigonometrie der Ebene betrifft, mit den meinigen in Bezug auf die sphärische vollständig parallel laufen.

Ob die Sinusfunktion, wie Hultsch Seite 55 annimmt, schon von den Griechen des 3. und 4. Jahrh. n. Chr., oder, wie ich annehme (vgl. Seite 86 —88), erst von den Indern eingeführt wurde, sagt meiner Ansicht nach weniger, da wir doch durch unsere von einander ganz unabhängigen Untersuchungen beide zu dem Schlufsergebnis gekommen sind, dafs die Kreissehne die einzige trigonometrische Funktion der älteren Zeit war, dafs die Ersetzung derselben durch den Sinus erst in der Weiterentwickelung der Trigonometrie mehr als eine lediglich formale Verbesserung wurde, und endlich, dafs diese Weiterentwickelung *nicht* den Griechen zuzuschreiben ist.

Dafs die Einführung der Sehnenfunktion sich historisch durch die Einrichtung und Anwendung der Hipparchschen Dioptra erklären läfst, möchte ich gegen Hultschs Annahme bezweifeln (vgl. Hultsch, l. c. Seite 55); dafs Hipparchs Ausrechnungen sich nicht auf die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks und dessen Scheitelwinkel, sondern auf die Kathete und den gegenüberliegenden Winkel eines rechtwinkligen richteten, ist nämlich selbstverständlich und braucht keineswegs ein Resultat der durch die Dioptermessung gegebenen Dimensionen (Dreieckselemente) zu sein; denn jedenfalls mufs das gleichschenklige Dreieck, um aufgelöst zu werden, in zwei rechtwinklige geteilt werden, ganz unabhängig davon, welche die gegebenen Dimensionen sind. Die Gründe dazu, dafs die Kreissehne die erste trigonometrische Funktion wurde, stecken auch viel tiefer, als dafs sie lediglich in den zufällig gegebenen Dimensionen bei einer bestimmten Art

von Messungen bestehen sollten. Wir müssen uns vor Augen halten, dafs das Skelett der trignometrischen Tafeln in der Form einzelner bekannten Kreissehnen schon gegeben war, dafs eine systematische Behandlung der Auflösung von Dreiecken, d. h. eine trigonometrische, immerhin (wie es auch heutzutage in unseren elementar-trigonometrischen Darstellungen geschieht) auf die Kreissehnenberechnung zurückzuführen war, und schliefslich, dafs die sphärischen Probleme, die eine trigonometrische Behandlung erforderten, die Aufmerksamkeit ganz direkt auf den Durchmesser lenkten, wie es in meiner Abhandlung Seite 116—118 und 129 dargelegt wird.

Auf den kürzlich erschienenen 3. Teil, *Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci,* von Herrn Prof. G. Lorias Werk: *Le scienze esatte nell' antica Grecia* habe ich leider keine Rücksicht nehmen können. In diesem Werk, in dem endlich der Versuch gemacht worden ist, zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften der Griechen eine Brücke zu schlagen, wird auch (Seite 55—62) Menelaos eingehend behandelt, und mehrere der Resultate, zu welchen meine Spezialuntersuchungen mich führten, werden hier in grofsen Zügen dargelegt. Nur die Darstellung des Inhalts der Trigonometrie in Menelaos' 3. Buch leidet an Mängeln, woran doch lediglich die schlechten Menelaosausgaben die Schuld haben. Die vorsichtige Weise, auf welche die Erfindung der Trigonometrie und überhaupt die Vorgänge vor Ptolemaios von Herrn Loria (Seite 64—67) behandelt werden, würde mich, selbst wenn die recht kläglich ausgefallene Ehrenrettung des Ptolemaios durch Herrn Prof. W. Förster (*Weltall* 2, Seite 16—18) nicht erschienen wäre, davon überzeugt haben, dafs mein Versuch, Delambres, Tannerys, v. Braunmühls und Hultschs Resultate mit Hilfe von Menelaos' *Sphärik* noch fester zu stellen, vielleicht doch nicht ganz wertlos ist.

Rom, Mai 1902.

Axel Anthon Björnbo.

Inhalt.

Druckfehler-Berichtigung.

Seite 19, Note 66, Zeile 6: *mutuatur Mihi* lies: *mutuatur. Mihi*
„ 45, Zeile 24: $\smile AB$ lies: AB
„ 102, „ 25: Basissegmente lies: Basensegmente.

Einleitung.

Während die Entwickelungsgeschichte der eigentlichen Geometrie der Griechen in den letzten Jahrzehnten von Forschern wie Paul Tannery, Cantor, Hultsch, Heiberg, Zeuthen u. a. immer mehr klar gelegt worden ist, und die Reihe der in neuen textkritischen Ausgaben vorliegenden griechischen Geometer immer wächst, giebt es ein anderes Gebiet, das noch ziemlich vernachlässigt ist. Es ist dies die Litteratur, die entweder als *„Einführung in die Astronomie“* zu bezeichnen ist, oder die ihre Entstehung hauptsächlich der Anwendung in der Astronomie zu verdanken hat. Nicht nur ist erst die Geschichte des Inhalts dieser Werke herzustellen, sondern aufserdem liegen dieselben in so schlechten Ausgaben vor, dafs eine ziemlich grofse Herausgeberthätigkeit vorausgehen mufs, bevor diese Geschichte sich erschöpfend behandeln läfst.

Diese Werke gehören fast alle der Sammlung an, die den Namen *μικρὸς ἀστρονομούμενος* — die mittleren Bücher — führt, weil dieselben ihrerzeit als Einleitung zum Studium des Ptolemaios verwendet wurden, nachdem der Schüler erst die Euklidischen Elemente inne hatte.

Von den Werken dieser Sammlung, die wir hier gebrauchen werden, liegt nur Autolykos[1]) in einer genügenden Ausgabe vor, dagegen Euklids *Phainomena*[2]) und Theodosios' drei Werke[3]) in schlechten Ausgaben, oder sogar nur in Übersetzungen.

Mit den Werken der eigentlichen Astronomie verhält es sich schon besser. Hipparchs *Kommentar zum Aratos,*[4]) Geminos' *Eisagoge*[5]) und die

1) Autolyci *de sphaera quae movetur et de ortibus et occasibus,* ed. F. Hultsch, Leipzig 1885.

2) Euclidis *phaenomena,* ed. D. Gregory, London 1703; deutsch von A. Nokk, Freiburg 1850.

3) Theodosii *sphaerica,* ed. Nizze, Berlin 1852; deutsch von Nizze, Stralsund 1826.

4) Hipparchi *in Arati Phaenomena Commentaria,* ed. C. Manitius, Leipzig 1894 (mit deutscher Übersetzung).

5) Gemini *elementa astronomiae,* ed. C. Manitius, Leipzig 1898 (mit deutscher Übersetzung).

Astronomie von Theon von Smyrna[6]) sind schon neu herausgegeben; die Hälfte von Ptolemaios' *Syntaxis*[7]) (*Almagest*) auch; dagegen bilden die Kommentare zu letzterer von Theon von Alexandria,[8]) für die wir in dieser Abhandlung vielfach Verwendung haben, in dieser Beziehung eine Ausnahme.

Der Verfasser, mit dem wir uns namentlich beschäftigen werden, Menelaos von Alexandria, gehört auch zu den von den Geschichtsschreibern der Mathematik ziemlich vernachlässigten. Sein Hauptwerk, die *Sphärik,* das auch zu den mittleren Büchern gerechnet wird, liegt nur in schlechten und aufserdem sehr seltenen Ausgaben vor. Wenn dieses Werk, trotz des interessanten Inhalts und der offenbaren Originalität des Verfassers, nur wenig beachtet worden ist, so kommt es hauptsächlich daher, dafs der griechische Text verloren gegangen und das Werk somit nur durch arabische Übersetzungen erhalten ist.

Über die unzweifelhafte Bedeutung dieses Werkes ist erst kürzlich Licht geworfen, und zwar von A. v. Braunmühl, der in seiner *Geschichte der Trigonometrie* dem Menelaos das ihm gebührende Lob gespendet, während er schon in zwei vorher erschienenen Abhandlungen[9]) mit Fug und Recht geschieden hat zwischen dem, was in der That dem Menelaos, dem Nassir-eddîn-Tûsi und dem Regiomontanus von den Erfindungen auf den Gebieten der Sphärik und der sphärischen Trigonometrie zuzuschreiben ist. Leider ist er doch mitunter durch den Gebrauch einer sehr schlechten Menelaosausgabe irre geführt worden.

Eine Geschichte der Sphärik ist bisher nicht hergestellt.[10]) Nur gelegentlich ist sie in der Geschichte der Astronomie, die sehr eng mit der der Sphärik zusammenhängt, behandelt worden. In Betracht kommen hier aufser Beiträgen von Nokk, Hultsch und Heiberg[11]) namentlich zwei gröfsere Werke, und zwar die von Delambre und Tannery.[12])

---

6) Theonis Smyrnaei *opera,* ed. Hiller, Leipzig 1878; Théon de Smyrne, par J. Dupuis, Paris 1892 (mit französischer Übersetzung).

7) Ptolemée, *l'Almageste,* par Halma I—II, Paris 1813 (mit französischer Übersetzung); Ptolemaei *Syntaxis mathematica,* ed. J. L. Heiberg, Pars I, Leipzig 1894.

8) Theonis Alexandrini *commentariorum libri XI,* Basel 1538; die Ausgabe von Halma (Paris 1822) stand mir nicht zur Verfügung.

9) A. v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I, Leipzig 1900; vgl. idem, *Nassîr Eddîn Tûsi und Regiomontan,* Abh. der k. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher **71**, 1897.

10) Vgl. P. Tannery, *La géométrie grecque,* p. 12.

11) Vgl. unten Kap. 4, b.

12) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* 1—2, Paris 1817; P. Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne,* Paris 1893. — M. Cantor,

Delambre giebt eine gute, sehr umfangreiche Darstellung der alten astronomischen Methoden mit den modernen verglichen. Seine Darstellung ist aber nicht immer deutlich, überhaupt nicht leicht zugänglich, und, was die geschichtlichen Erläuterungen betrifft, schon veraltet. Aufserdem steht er zu sehr auf dem Standpunkte des modernen Mathematikers, um die Alten richtig zu beurteilen; es fehlt ihm an geschichtlichem Sinn, z. B. eben dem Menelaos gegenüber.

Tannerys Werk ist ebenso klar und deutlich wie geistreich und interessant; doch scheint Tannery die *Sphärik* des Menelaos einer genaueren Prüfung nicht unterworfen zu haben.

Mitteilungen über die Überlieferung der *Sphärik* des Menelaos finden wir bei mehreren Verfassern, die die Thätigkeit der Araber behandelt haben.[13]) Die genaueste Zusammenstellung giebt uns M. Steinschneider.[14]) Die neuesten Aufschlüsse finden wir bei H. Suter.[15]) Bei den hebräischen Übersetzungen müssen wir uns wieder auf die Autorität Steinschneiders stützen.[16])

Ein Vergleich der mittelalterlichen lateinischen Übersetzung und der lateinischen Druckausgaben ist bis jetzt noch nicht unternommen; eine Untersuchung der arabischen und hebräischen Handschriften allerdings auch nicht; denn, was Steinschneider u. a. geben, ist lediglich eine Übersicht über die arabischen Berichte und das vorliegende Handschriftenmaterial. In einer Abhandlung über die mittleren Bücher in den Händen der Araber erwähnt Steinschneider[17]) doch eine Pariserhandschrift, die eine mittelalterliche lateinische Übersetzung der Sphärik enthält, und giebt uns als Anregung zu näherer Untersuchung verschiedene Aufschlüsse über den Inhalt.

Unser Zweck wird es sein, nachdem wir die Berichte über Menelaos gesammelt haben, zuerst zu versuchen, den Inhalt der Sphärik festzustellen, danach diesen Inhalt näher zu untersuchen, um das Werk des Menelaos

---

Geschichte der Mathematik, und R. Wolf, *Geschichte der Astronomie,* behandeln beide einen so grofsen Stoff, dafs sie auf Detailuntersuchungen verzichten müssen.

13) Z. B. Leclerc, *Histoire de la médécine arabe* I—II, Paris 1876; Hammer, *Litteraturgeschichte der Araber.*

14) M. Steinschneider, *Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen,* 2. Abschnitt Mathematik, § 111—112, Zeitschr. d. Deutsch. Morgenl. Gesellschaft **50**, p. 196 ff.

15) H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke,* Abh. z. Gesch. der math. Wissenschaften, Leipzig 1900.

16) M. Steinschneider, *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters* **1—2**, Berlin 1893, 2, § 319, p. 515 ff.

17) Idem, *Die mittleren Bücher der Araber und ihre Bearbeiter,* Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 456 ff.

in seinen Verhältnissen zu den Vorgängern und den Nachfolgern, sowie die Stellung, die es überhaupt in der Geschichte der Mathematik und der Astronomie einnimmt, zu beurteilen.

Erstes Kapitel.

Die Berichte über Menelaos.

1. **Plutarch** (Zeitgenosse des Trajan) *„de facie in orbe lunae"* cap. 17 (Plutarchi *moralia,* ed. Bernardakis V, p. 429).

Hier läfst der Verfasser eine der Personen der in Dialogform gehaltenen Abhandlung sich mit folgenden Worten an einen anwesenden Menelaos, in dem er den Mathematiker erkennt, wenden: *„Ich schäme mich fast, lieber Menelaos, in deiner Gegenwart eine mathematische Thesis, die als Basis für die katoptrischen Untersuchungen gilt, hervorzuheben . . .".*

2. **Ptolemaios** (thätig ca. 125—151 n. Chr.), *Syntaxis* VII, cap. 3 (ed. Halma II, p. 25 u. 27).

Hier werden zwei Observationen mitgeteilt, die „der Geometer Menelaos" im ersten Regierungsjahr des Trajan in Rom gemacht hat.[17a])

3. **Pappos** (3. Jahrh. n. Chr.) *συναγωγή* (*collectiones*):

a) IV, 36 (ed. Hultsch, p. 270): *„Von den Kurven, die Demetrios von Alexandria und Philon von Tyana untersuchten, und die manche merkwürdige Eigenschaften haben, ist eine von Menelaos besonders hervorgehoben und zwar die, die er ʽπαράδοξος' nannte."*[18])

b) VI, 1 (ed. Hultsch, p. 476): Eine Figur, die von drei gröfsten Kreisbogen umschlossen ist, nennt Menelaos in der *Sphärik* „*τρίπλευρον*".[19]) — An derselben Stelle beweist Pappos vier Sätze über sphärische Dreiecke, die wir in Menelaos' *Sphärik* wiederfinden.

c) VI, 55 (ed. Hultsch, p. 602): Über die Untergänge der Tierkreiszeichen hat „Menelaos der Alexandriner" eine Abhandlung (*πραγματεία*) geschrieben.[20]) — Diese Stelle gehört zum Kommentar zu Euklids *φαινόμενα*, wo ähnliche Probleme behandelt sind.

17a) Dieser Bericht wird in der späteren astronomischen Litteratur immer wieder reproduziert, zuerst in Proklos' *ὑποτύπωσις*.

18) Vgl. Chasles, *Aperçue historique,* p. 23.

19) Vgl. unten Kap. 4, a.

20) Die Übersetzung von Hultsch „*πραγματεία* = commentarium" ist nicht als Kommentar im modernen Sinn dieses Wortes zu verstehen.

4. **Theon von Alexandria** (ca. 365 n. Chr.) in den *Kommentaren zu Ptolemaios' Syntaxis*:

a) zu I, cap. 10 (ed. Halma, p. 110) sagt Theon bei der Erwähnung der Sehnentafel des Ptolemaios: *„Von Hipparch wurde nun auch eine Abhandlung in 12 Büchern über die Geraden im Kreise verfaſst, ferner auch von Menelaos eine in 6 Büchern.“* [21])

b) zu II, cap. 7 (ed. Halma, p. 266). Zur Bestätigung der Kongruenz zweier sphärischer Dreiecke fügt Theon hinzu: *„so wie es Menelaos in der Sphärik beweist“.* [22])

c) zu VI, cap. 11 (Baselerausgabe, p. 342—43) sagt Theon: *„Die von Ptolemaios hier vorgeführte Theorie läſst sich besser erörtern, wenn erst zwei Theoreme der Sphärik bewiesen werden.“* Danach referiert Theon zwei Kongruenzsätze sphärischer Dreiecke mit Beweis. Er schlieſst mit den Worten: *„Dies bewies also Menelaos im ersten Buche der Sphärik.“* [23])

5. **Proklos** (ca. 410—485 n. Chr.) im *Kommentar zum ersten Buche der Euklidischen Elemente* (ed. Friedlein, p. 345) bemerkt zu Euklid I, 25: *„Die Beweise dieses Satzes, die die anderen besorgt haben, wollen wir kurz berichten, und zwar zuerst den, welchen Menelaos der Alexandriner erfand und mitteilte.“* Nun folgt der neue Beweis von Menelaos, danach ein anderer von Heron dem Mechaniker. [24])

Weitere Berichte aus griechischen (oder römischen) Quellen habe ich nicht finden können. [25]) Aus den zitierten geht aber schon folgendes hervor:

Menelaos, aus Alexandria gebürtig, war in Rom zur Zeit des Regierungsantritts des Kaisers Trajan (25. Jan. 98 n. Chr.) *mit astronomischen Beobachtungen, und zwar mit solchen, die zunächst zum Gebrauch eines Fixsternkatalogs zuträglich waren, beschäftigt* (man schlieſst so wegen der Anwendung in Ptolemaios' *Syntaxis*). — *Menelaos' Zeitgenosse, der berühmte Schriftsteller Plutarch, kennt und schätzt einen Menelaos als tüchtigen Mathematiker. — Menelaos ist Verfasser einer Sphärik in mindestens zwei Büchern* (nach der arabischen Überlieferung wahrscheinlich drei). *In diesem Werk hat er dem sphärischen Dreieck den Namen τρίπλευρον gegeben, welcher Name später von den Griechen allgemein verwendet wurde* (vgl. unten Kap. 4, a u. c). *Im ersten Buche der Sphärik standen verschiedene Fälle von Kongruenz solcher Dreiecke. — Menelaos hat ferner wahrscheinlich eine*

21) Vgl. unten Kap. 6, a. 22) Vgl. unten Kap. 3.

23) Vgl. unten Kap. 3. 24) Vgl. unten Kap. 4, c.

25) Theon von Smyrna (Zeitgenosse des Menelaos) erwähnt ihn nicht; Nikomachos auch nicht. Spätere Verfasser wie Jamblichos (in dessen leider verlorenen *Sphärik* man zunächst Berichte über Menelaos hätte erwarten können), Porphyrios, Eutokios und Diophant auch nicht.



Sehnenberechnung in 6 Büchern verfaſst, sowie eine Abhandlung über Untergänge der Zeichen des Tierkreises. Er hat einen neuen Beweis zu Euklid I 25 irgendwo veröffentlicht und einer transcendenten Kurve, die er „die wunderbare“ nannte, seine besondere Aufmerksamkeit gewidmet.

Es giebt andere Berichte über Menelaos, nämlich die von den Arabern herrührenden, die jedoch mit gewisser Vorsicht aufzunehmen sind.

Auſser den Mitteilungen über die *Sphärik* und den Text derselben, denen wir ein eigenes Kapitel widmen wollen, sind es die folgenden:

1. Nach mehreren arabischen *Encyklopädien*[26]) hat Menelaos ein mechanisches Werk verfaſst, das ins Arabische übersetzt wurde. Über den Titel desselben gehen die Quellen auseinander.

So befindet sich nach Casiri[27]) im Escorial eine Handschrift (Cod. Escur. 905), wo (fol. 360) Menelaos gelobt wird. Es wird da gesagt: *„Seine Werke kamen erst in syrischer, dann in arabischer Übersetzung heraus. Er schrieb das Buch über sphärische Figuren und: ‘liber de quantitate et distinctione corporum mixtorum’.“*

Dagegen heiſst ein im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung enthaltenes Werk: *„Menelai ad Timotheum Regem Liber de Statica, ubi de Corporum mistorum quantitate et pondere.“*

Letzteren Titel nimmt Steinschneider als richtig an.[28]) Einen dritten hat Wenrich,[29]) nämlich: *„De cognitione quantitatis discretae corporum permixtorum.“* Dieser Titel ist nach Suters Ansicht der richtige, weil El-Chazini (ca. 1100) in einer Abhandlung über die spezifischen Gewichte einfacher und zusammengesetzter Körper Archimedes und Menelaos als Gelehrte nennt, die sich mit dieser Frage beschäftigt haben.[30])

2. In *Kitab-el-Fihrist* wird Menelaos als Verfasser zu *„Elemente der Geometrie“*, redigiert von Tâbit ibn Korrah in 3 Traktaten, genannt.[28])

---

26) Es sind dies: *Kitab-al-Fihrist* von Abul Farag Muh. b. Ishaq (el Nadim); *Tarich el hokama* von Ibn el Kifti und *Lexicon bibliogr. et encycl.* von Haji-Khalfa, ed. Flügel, Leipzig 1835—58. — Das Mathematikerverzeichnis im *Fihrist* ist von H. Suter ediert, Zeitschr. f. Math. u. Physik **37**, Supplement.

27) Casiri, *Bibl. Arabico-Hispan. Escurialensis* I—II, Codices Math. I, p. 339 ff.

28) Steinschneider, *Arab. Übers.* § 112.

29) Wenrich, de auct. Graec. verss. Syriac. Arab. p. 211.

30) Suter, l. c. p. 226. In Suters Übersetzung von *Fihrist* heiſst der Titel: *„Über die Kenntnisse der Gröſse und Einteilung der verschiedenen Körper, verfaſst im Auftrag des Kaisers Domitian“.* Daſs mit Körper nicht Himmelskörper gemeint sind, wie Suter damals vermutete, ist später klar gelegt worden. Über den Namen „Domitian“ thut man nach Steinschneider am besten zweifeln.



3. Dieselbe Bibliographie schreibt dem Menelaos ein *„Buch der Dreiecke“* zu, von welchem nur ein kleiner Teil ins Arabische übersetzt worden ist.[28])

Man mufs also annehmen, dafs ein bisher ganz unbekanntes mechanisches Werk von Menelaos, und zwar ein *hydrostatisches* im Cod. Escur. 955 in arabischer Übersetzung vorliegt. Es scheint uns dies nicht mit den übrigen Leistungen unseres Verfassers zu stimmen. Die griechischen Astronomen schrieben jedoch oft mechanische Werke, Hipparch z. B. *„περὶ τῶν διὰ βάρους κάτω φερομένων.“*[31])

Über den Titel: *„Elemente der Geometrie“* schreibt Steinschneider: *„Dieses sonst unbekannte, verdächtige Buch ist von Kifti weggelassen, und Chwolson erwähnt es in seinem Verzeichnisse von Thabits Schriften gar nicht.“* — Es würde aber mit der oben zitierten bisher unbeachteten Notiz von Proklos durchaus passen, dafs Menelaos ein solches Werk verfafst hat.[32])

Ob Menelaos vielleicht in diesem Buch oder in einem *„Buch der Dreiecke“* Reihen von Dreiecksätzen in der Ebene, die wir in Euklid nicht finden, den von ihm auf der Kugel bewiesenen analog, wie z. B. die vollständige Kongruenztheorie, gesammelt hat, lassen wir dahingestellt.

4. Im *„liber trium fratrum“* (ed. Curtze, p. 150)[33]) wird dem Menelaos *„in seiner Geometrie“* eine Würfelverdoppelung zugeschrieben, und zwar dieselbe, die man nach Eutokios allgemein dem Archytas von Tarent beilegt.

Der Erfinder dieser Würfelverdoppelung war jedenfalls Archytas; denn Eutokios[34]) sagt ausdrücklich: *„Ἡ Ἀρχύτου εὕρησις, ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ“*, und Eudemos, unsere beste Quelle, was die griechische Mathematik betrifft, lebte ca. 400 Jahre vor Menelaos.

Ob Archytas' Beweis vielleicht später in demselben Werke, in welchem Menelaos (nach Pappos' Bericht) die paradoxale Kurve behandelte, aufgenommen wurde, müssen wir dahinstellen. Archytas' Verfahren besteht in der Bestimmung des Schnittpunktes einer Kegelfläche mit einer cylindrischen Raumkurve (der sogen. Tore). Die paradoxale Kurve des Menelaos ist nach einer Hypothese von Tannery[34a]) dieselbe wie die Kurve des

31) Simplikios, *de coelo* I, p. 61 B.

32) Nachträglich erfahre ich, dafs Gino Loria in seinem Buch: *Le scienze esatte nell' antica Grecia* III, p. 60 den Bericht des Proklos zitiert.

33) *„Liber trium fratrum“* rührt von Muhammed, Ahmed und Alhasan, Söhnen des Mûsá ibn Schâkir, die in der ersten Hälfte des 9. Jahrh. lebten, her. Curtzes Ausgabe befindet sich in Nova acta der ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher **49**, Halle 1885.

34) Archimedis *opera omnia,* ed. Heiberg III, p. 98 ff.

34a) Vgl. Tannery, *Notes pour l'histoire des courbes et des surfaces dans l'antiquité,* Bullet. des sciences math. et astr. Tome VII—VIII.



Viviani, d. h. die Kurve von doppelter Krümmung, die durch Schnitt einer Cylinderfläche mit einer Kugel entsteht. Angenommen, dafs Tannerys Hypothese richtig ist, so würden wir uns allerdings leicht vorstellen können, dafs Menelaos den Beweis des Archytas reproduziert hat.[35])

Auch über die astronomische Thätigkeit des Menelaos finden wir Aufschlüsse bei den Arabern. Die in Frage kommenden Nachrichten habe ich anderswo (Bibl. math. 1901, p. 196 ff.) zusammengestellt. Die Resultate dieser Untersuchung werde ich hier kurz wiederholen:

1. Al-Battani († ca. 928) stützt seine Bestimmung der Präcession der Nachtgleichen (vgl. Albategnius, *De numeris et motu stellarum fixarum, transl. a Platone Tiburtino, Bononiae 1645, p. 201—202*) auf drei Observationen, die er dem Menelaos zuschreibt. Die eine dieser Observationen hat er der *Syntaxis* entnommen, wie er auch selbst sagt.

Für die zwei anderen scheint er sich auf ein Werk von Menelaos selbst zu stützen. Wenigstens geht es aus den Zahlenwerten dieser zwei Längenbestimmungen hervor, dafs dieselben kaum mit Hilfe der *Syntaxis* des Ptolemaios von Al-Battani unterschoben sein können. Dann werden wir aber gezwungen anzunehmen, dafs Al-Battani in der That authentische von der *Syntaxis* unabhängige Berichte über Fixsternbestimmungen des Menelaos besafs.

Es scheint zunächst, dafs Ptolemaios und Al-Battani aus den ihnen zur Verfügung stehenden menelaischen Bestimmungen nur einzelne für ihre Präcessionsberechnung besonders geeignete herausgegriffen haben. Die vier überlieferten Bestimmungen (Sirius, Regulus, Spica und β Scorpii) lassen uns auch annehmen, dafs Menelaos' Fixsternbestimmungen eine beträchtliche Anzahl ausgemacht haben. Dagegen scheinen sie nicht besonders gut gewesen zu sein, indem die Längen im allgemeinen ca. 1^0 zu klein geworden sind. Die Ursache ist wahrscheinlich ein Irrtum in Bezug auf den Unterschied des siderischen und des tropischen Jahres.

Die fehlerhafte Präcessionsberechnung in Ptolemaios' *Syntaxis* ist wahrscheinlich eine Folge dieses Irrtums, die auch die Präcession des Al-Battani beeinflufst haben dürfte, obwohl natürlich in minderem Umfang.

Bemerkenswert ist, dafs Al-Battani offenbar viel mehr Vertrauen zu Menelaos' Bestimmungen hatte als zu denen des Ptolemaios. Da die

---

35) Nach Curtze, l. c. p. 158 wird im *liber trium fratrum* auch die archimedische Berechnung der Kugel-Oberfläche und -Volumen der *„Geometrie“* des Menelaos zugeschrieben. Dies beruht aber lediglich auf einer unrichtigen Textkorrektur; vgl. meinen Aufsatz in Bibl. math. 1902, *Über zwei math. Hss. aus dem 14. Jahrh.*

von Ptolemaios angenommene Präcession nach Al-Battani falsch war, und man nach dem Inhalt von Ptolemaios' 7. Buch annehmen mufste, dafs sein Fixsternverzeichnis nicht ein Ergebnis eigener Beobachtungen, sondern eine Kompilation aus den Arbeiten seiner Vorgänger war, so war es notwendig, einen dieser Vorgänger als den eigentlichen Beobachter zu betrachten, und dementsprechend die Längen im Ptolemaios zu korrigieren. Al-Battanis Bericht zeigt uns, dafs man damals den Menelaos als diesen wahren Beobachter betrachtete. Noch bestimmter entschied sich ein Nachfolger des Al-Battani für Menelaos, nämlich:

2. Abul-Hosein Abdalrahman Al-Sûfi († 986). Er berichtet in seiner *„Abhandlung über die Fixsterne mit Figuren“* (ediert von Schjellerup St. Petersburg 1874, p. 42), dafs Ptolemaios sein Fixsternverzeichnis durch Addition von 25 Minuten zu den Längenbestimmungen des Menelaos herstellte, und zwar bei allen in seinem Katalog aufgenommenen Sternen. Es stimmt dies allerdings mit den Angaben in der *Syntaxis* in Bezug auf die zwei in diesem Werke referierten Beobachtungen des Menelaos. Es stimmt aber keineswegs für die zwei von Al-Battani dem Menelaos zugeschriebenen Längenbestimmungen, von denen die eine um 40′, die andere um 20′ von den Längen in Ptolemaios' Katalog abweicht.

Durch die Behauptung aber, dafs Menelaos ein grofses Fixsternverzeichnis verfafst hat, erreicht Al-Sûfi, den Katalog des Ptolemaios als einen für eine bestimmte Zeit gültigen verwenden zu können. Dementsprechend hat er auch mit Hülfe der Präcession des Al-Battani die Längen im Ptolemaios, nachdem er dieselben zuerst auf die Zeit des Menelaos zurückgeführt hat, zur Herstellung seines eigenen Fixsternkatalogs benützen können.

Aus diesen Gründen können wir dem Bericht des Al-Sûfi keinen Glauben schenken, sondern müssen ihn als eine aufgebauschte Interpretation betrachten, die Al-Sûfi brauchte, um sein eigenes Verfahren nicht in Mifskredit zu bringen.

Al-Sûfis Werk wurde um das Jahr 1256 ins Kastilianische unter dem Titel *„Abolfazen* (oder *Albohazen*): *Libro de las estrellas“* übersetzt, und der Bericht über Menelaos' grofses Fixsternverzeichnis wurde bis auf Copernicus und Tycho Brahe als authentisch betrachtet (vgl. die oben erwähnte Abhandlung in Bibl. Math. 1901, p. 196 ff.).

3. Haji-Khalfa (ed. Flügel III, p. 471) notiert in seinem Werkverzeichnis: *„observationes astronomicae a Menelao anno 854* (d. h. 107 n. Chr.) *factae.“*

Die vorhergehende Zusammenstellung der uns überlieferten Berichte über Menelaos zeigt, dafs seine Verfasserwirksamkeit wenigstens folgendes umfafst:

1. **Sphärik** (3 Bücher).
2. **Über die Geraden im Kreise** (6 Bücher).
3. **Hydrostatik.**
4. **Abhandlung über die Untergänge der Tierkreiszeichen.**
5. **Elemente der Geometrie** (3 Bücher?).

---

6. Irgend eine Publikation **über transcendente Kurven.**
7. Eine Reihe von **Fixsternbestimmungen.**
8. **Buch der Dreiecke?**

Zweites Kapitel.

Die Überlieferung der Sphärik.

Der griechische Text der *Sphärik* ist wie gesagt verloren, und unsere Kenntnisse derselben verdanken wir also lediglich den arabischen oder den nach denselben gemachten hebräischen und lateinischen Übersetzungen. Weil aber die Araber nach ihrer Gewohnheit das von ihnen hoch geschätzte Werk immer neu revidierten, ist die Überlieferungsgeschichte eine ziemlich verwickelte geworden.

Zu meinen Untersuchungen stand mir zuerst nur die Druckausgabe von Halley zur Verfügung.[36]) Ich fühlte aber bald, daſs ich nach einer ganz unsicheren Grundlage arbeitete. In einem Beweis wurde nach dieser Ausgabe die sinus versus-, in Corollaren die tangens-Funktion gebraucht. Die Griechen hatten aber, wie bekannt, keine Kenntnis dieser Funktionen. Überhaupt kam mir vieles in den Beweismethoden ungriechisch vor. Auſserdem war es mir überhaupt unmöglich, Halleys Zusätze von dem Text der *Sphärik* zu unterscheiden.

Es gelang mir dann, die Maurolycusausgabe[37]) zur Hand zu bekommen. Dieselbe war jedoch ganz unanwendbar. In der Vorrede sagt der Herausgeber selbst, daſs er „*nicht möglichst viele, sondern passende*“ Theoreme von ihm selbst hinzufügen würde. Die letzte Hälfte des dritten Buches

---

36) Menelai *Sphaericorum libri III*, quos olim, collatis MSS. Hebraeis et Arabicis Typis exprimendos curavit Vir. Cl. Ed. Halleius; Praefationem addidit G. Costard, Oxonii 1758.

37) Theodosii *Sphaericorum elementorum libri III* ex trad. Maurolyci Messanensis Mathemathici; Menelai *Sphaericorum libri III* ex trad. eiusdem; Maurolyci *Sphaericorum libri II* etc. Messanae 1558.

hat er nicht mitgenommen, weil er sie für eine genauere Erörterung in seiner eigenen *Sphärik* zurückhalten wollte.

Es wurde mir klar, dafs ich zu den Handschriften Zuflucht nehmen mufste, und zwar zu den lateinischen, weil ich die arabischen so wenig wie die hebräischen lesen konnte.

Nun steht im Verzeichnisse[38]) über die von Gerhard von Cremona am Schlufs des 12. Jahrhunderts zu Toledo erledigten Übersetzungen aus dem Arabischen:

„liber Milei tractatus III.“

„Mileus“ ist aber nur eine durch Mifsverständnis des Arabischen hervorgerufene Verdrehung von „Menelaos“.

Diese älteste lateinische Übersetzung vermutet Steinschneider[39]) in dem oben erwähnten Pariser Codex Nr. 9335 zu finden; denn da befindet sich ein *„liber Mileij de figuris spericis“* in 3 Traktaten (Büchern). Einzelne andere lateinische Menelaoscodices sind ihm und anderen bekannt, jedoch nur dem Namen nach.

Nach den Katalogen und Handschriftenverzeichnissen nahm ich mir vor, das vorliegende Material genauer zu konstatieren, und es gelang mir, die Existenz von 17 bis 18 lateinischen Handschriften festzustellen, die nach den Titeln alle Menelaos' *Sphärik* enthalten. Von 9 dieser Handschriften kann ich konstatieren, dafs sie alle Abschriften derselben mittelalterlichen lateinischen Übersetzung sind, indem ich 5 selbst kollationiert habe, während mir mein früherer Kollega cand. Raphael Meyer über die 4 anderen, die alle in Rom liegen, wertvolle Aufschlüsse gegeben hat. Die 5 von mir kollationierten sind:

1. Cod. Parisinus Arsenalis 1035, 15. Jahrh.[40])
2. Cod. Parisinus 9335 (Bibl. nationale), 14. Jahrh.[41])
3. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 90, 14. Jahrh.
4. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 63, 15. Jahrh.[42])
5. Cod. Vindobonensis 5277, ca. 1525.[43])

38) Vgl. Boncompagni, *della vita e delle opere di Gherardo Cremonese,* Roma 1851; Wüstenfeld, *Die Übersetzungen arabischer Werke in das Lateinische,* Abh. d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen **22**, u. a.

39) Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 483 ff.

40) *Catal. des manuscrits de la bibl. de l'Arsénal,* par M. Martin II, p. 246, Paris 1886; vgl. Leclerc, l. c. II, p. 410 u. 492.

41) *Inventaire des manuscrits latins conservée à la bibl. nat. sous les numéros 8823—18613*, par L. Délisle, Paris 1863—71, p. 28; vgl. oben Steinschneider und Leclerc. Eine Beschreibung ds. Hs. gebe ich in Bibl. math. 1902.

42) *Bibl. manuscripta ad S. Marc. Venetiarum* digessit J. Valentinelli, Venetiis 1871, Codd. mss. lat. IV, p. 218, 249 u. 266; vgl. unten Note 168.

43) *Tabulae codd. mss. praeter Graecos et orientales in Bibl. Palatina-Vindob.*

Die vier Handschriften, die nach den Aufschlüssen von Hrn. Meyer denselben Text enthalten, sind:

6. Cod. Vaticanus 4571 e Fondo Vaticano.

7. Cod. Vaticanus 1351 e Fondo Palatino.

8. Cod. Vaticanus 1261 e Fondo Reginae Sueciae.

9. Cod. Vaticanus 1268 e Fondo Reginae Sueciae.

Mit Sicherheit vermute ich denselben Text in folgenden 6 Handschriften:

10. Cod. Digby 168 (Oxford): *„Excerpta ex libris Milei sive Menelai Alexandrini de figuris sphaericis"*, 13. Jahrh. (nur Fragmente).

11. Cod. Digby 178 (Oxford): *„Propositiones in libris tribus Sphaericarum Menelai sive Milei additis hic illic demonstrationibus"*, 14.—15. Jahrh. (nur Fragmente).[44]

12. Cod. Rheno-Trajectoriae (Utrecht) 725 *„Mylaeus, opus de figuris sphaericis"*, 15. Jahrh.[45]

13. Cod. S. Marco Venetiar. Cl. XI, 5. *„Menelai de figuris sphaericis"*, 15. Jahrh.[42]

14. Cod. S. Marco Florent. 184. *„Tractatus Milaei et Campani"* (defekt).

15. Cod. S. Marco Florent. 203. *„Mileii Romani de figuris sphaericis."*[46]

Dagegen enthält:

16. Codex Parisinus 7251: *„Menelai Sphaericorum libri tres Fr. Maurolyco interprete"*, 16. Jahrh.[47] wohl entweder eine Abschrift der Maurolycusausgabe, oder aber gehört dieser Codex dem schriftlichen Nachlafs dieses Herausgebers.

17. Cod. Bodleianus 6556. 9. *„Menelai Sphaerica quamplurimis Maurolyci et Savilii propositionibus adaucta"*[48] ist ohne eine genauere Untersuchung überhaupt nicht zu beurteilen.

18. Aufserdem liegt vielleicht in Cuença (Spanien) eine sehr alte Menelaoshandschrift; denn im *„Inventario de las alaja Mueblas y libro"* des

---

IV, Wien 1870, p. 82—83. Diese Wienerhandschrift ist von Johs. Vögelin geschrieben.

44) *Catal. Mss. Angliae et Hyberniae*, Oxford 1697; und *Catal. Codd. Mss. Bibl. Bodleianae IX*, Codd. a Kenelm Digby anno 1634 donatos, confecit Macray, Oxford 1883; vgl. Steinschneider, Wenrich u. a.

45) *Cat. codd. mss. bibl. universitatis Rheno-Trajectoriae*, ed. Thiele, Utrecht 1887.

46) Boncompagni, *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, Atti dell' accad. pontif. de'nuovi lincei tomo IV, p. 279—280; Montfaucon, *Bibl. bibliothecarum mss. nova*, Paris 1739, I, p. 427; Steinschneider, *Zeitschr. f. Math. u. Physik* **10**, p. 484.

47) *Cat. codicum mss. bibl. regiae III*, Tome IV, Paris 1744; vgl. Fabritius IV, p. 24.

48) *Cat. Mss. Angliae et Hyberniae*, Oxford 1697.

Bischofs Palomeque vom Jahre 1273 befindet sich eine Bücherliste, worin als Nr. 29: „Alfagrano, Teodosio, Anarico, **Mileo,** *con otros libros de geometria.*“ Über die Sprache, worin sie verfaſst ist, wird nichts angegeben.[49])

Wir sehen also, daſs wir vor der Maurolycusausgabe[50]) nur *eine* lateinische Übersetzung finden, und daſs die Handschriften, die sie enthalten, meistens, ja bis zur Mitte des 15. Jahrhunderts ausschlieſslich den verdrehten Namen Mileus, Mileius, Milaeus oder Mylaeus haben. Wenn auſserdem die Mileushandschriften sich vom 13. Jahrhundert bis zum Anfang des 16. erstrecken, so stimmen diese Thatsachen durchaus damit überein, daſs diese Übersetzung von Gerhard von Cremona ist. Auch hat auſser Gerhard unseres Wissens niemand vor Maurolycus es versucht, Menelaos zu übersetzen.

Die Redaktion der *Sphärik,* die wir hier vor uns haben, ist durch folgende Eigentümlichkeiten gekennzeichnet:

1. Das Werk ist in 3 Bücher geteilt und zwar mit bezw. 44 oder 45, 8 und 15 Sätzen.

2. Definitionen fehlen ganz.

3. Das erste Buch ist in gewissen Beziehungen von den zwei folgenden verschieden; so wird *„sphärisches Dreieck“* (*τρίπλευρον*) im ersten Buche *„triangulus ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae“,* in den zwei letzteren *„trilatera figura“* genannt. Das erste Buch ist auſserdem genauer und umständlicher als die zwei anderen. Wir können deshalb vermuten, daſs wir hier eine Mischung von zwei verschiedenen Redaktionen oder eine Redaktion von zwei Bearbeitern vor uns haben.

4. Hiermit stimmt es durchaus, daſs I, 41—44 (oder nach anderen Mileushandschriften I, 42—45) als II, 1—4 wiederholt wird, und zwar in anderer Redaktion.

5. Für *„sinus“* wird *„nadir arcus“* gebraucht. In dem griechischen Text stand ohne Zweifel *ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν* (d. h. die Sehne des doppelten Bogens).

---

49) Francisco Martinez Marina, *Ensayo historico-critico sobre la legislacion,* Madrid 1834, I, p. 8; vgl. R. Beer, *Die Handschriftenschätze Spaniens,* Wien 1894, p. 127. — Anarico ist wahrscheinlich Anaritius, d. h. Al-Narizi, dessen *Euklid-Kommentar* kürzlich arabisch von Besthorn u. Heiberg, lateinisch von Curtze ediert wurde; vgl. Bibl. math. 1901, p. 364—65.

50) Deutschland, das sonst gar keine lateinischen Menelaoshandschriften zu besitzen scheint, hat wiederum eine Abschrift der Druckausgabe von Maurolycus und zwar in Erlangen, Cod. 909. Der Abschreiberlohn war 3 fl. 50 d., wie es der Katalog mitteilt.



Eine dem Griechischen entsprechende Bezeichnungsweise hat sich vielleicht in den älteren arabischen Menelaoscodices erhalten, wodurch der Gebrauch von *„nadir arcus“* in der Mileusübersetzung sich erklären läſst; denn *„nadir arcus“* wird so definiert: *„Et ego quidem non significo, cum dico nadir arcus, nisi lineam, qui subtenditur duplo illius arcus.“* — In späteren arabischen Menelaoshandschriften wird *„sinus“* gebraucht, ebenfalls in den beiden Druckausgaben, obwohl Maurolycus die Bezeichnung *„nadir arcus“* kennt.

6. Man spürt deutlich eine Einteilung des Textes in mehr als die erwähnten 44 (45), 8 und 15 Sätze, und zwar durch nach den einzelnen Beweisabschnitten eingeschaltenen: *„et illud est quod declarare uoluimus.“*

Diese älteste lateinische Gerhardsche Mileusübersetzung habe ich nun mit den Druckausgaben verglichen, und zwar mit dem Resultate, daſs der Text, den Halley zu seiner Druckausgabe gebraucht hat, von derselben arabischen Redaktion stammt, während dagegen der mit Zusätzen übersäeten Maurolycusausgabe eine andere arabische Redaktion zu Grunde lag.

Zur Basis meiner Untersuchungen habe ich nun hauptsächlich die Gerhardsche Übersetzung gebraucht, oder, was dasselbe ist, die Halleyausgabe nach dieser Übersetzung korrigiert.

Ich bin doch in der glücklichen Lage, Stellen, namentlich im dritten Buche, die ein besonderes Interesse haben, mit anderen Redaktionen vergleichen zu können, indem ich von Hrn. Dr. R. Besthorn verschiedene wichtige Aufschlüsse über zwei arabische Leidenercodices (399[51]) u. 930) bekommen habe. Überall, wo ich diese Codices erwähne, geschieht es also nur durch das freundliche Entgegenkommen Dr. Besthorns.

Durch seine Aufschlüsse wird es bestätigt, daſs die verschiedenen Menelaosrezensionen wenigstens stellenweise ziemlich viel von einander abweichen. Der sogenannte „Satz des Menelaos“ ist z. B. im cod. Leid. 930 und in der Redaktion, die Gerhard und Halley verwendeten, ganz verschieden redigiert.[52])

Eine genaue Untersuchung des Unterschiedes der Redaktionen läſst sich nur durch gewissenhafte Prüfung der arabischen Handschriften bewerkstelligen. Die Berichte der arabischen Encyklopädisten soundsovielmal wieder abzudrucken, ist dagegen eine ziemlich erfolglose Arbeit. Weil ich es aber nicht besser machen kann, beschränke ich mich auf eine ganz kurze Übersicht der verschiedenen Rezensionen in chronologischer Folge.[53])

---

51) c. 399 enthält die Redaktion von Al-Harawi, 930 die von Abu-Nasr-Mansur.

52) Vgl. unten Kap. 6, b.

53) Die wichtigsten Notizen über die Rezensionen des Menelaostextes stehen

Menelaos richtet seine Vorrede an einen Fürsten (El-Ládzi nach Haji-Khalfa) mit den Worten: *„O princeps! inveni ego rationem demonstrativam praestantem etc.“* So fängt nach Besthorn auch cod. Leid. 399 an.

Die Übersetzung rührt angeblich von Isak ben Honein († 910) her; dieser wird nämlich in mehreren Handschriften als Übersetzer genannt. Ob Tâbit ibn Korrah († 901), der im Anschlufs an Menelaos' *Sphärik* (doch ohne Menelaos zu nennen) eine Abhandlung verfafst hat, zu dieser ältesten Übersetzung beigetragen hat, lassen wir vorläufig dahingestellt.[54])

Die verschiedenen Redaktionen, die wohl durch Revision der ältesten Übersetzer entstanden sind, stammen von:

1. **Al-Maháni** (Zeitgenosse von Tâbit ibn Korrah); er nahm, um das Werk verständlicher zu machen, eine Revision vor, brachte aber nur das erste und die Hälfte des zweiten Buches zu Ende; der Rest ist von **Ahmed-ben-Said-al-Harawi** (Zeit unsicher) erledigt worden. — Diese Redaktion liegt im Cod. Leid. 399 vor und enthält zwei Bücher.

2. **Abu-Nasr-Mansur;** er beendigte eine neue Redaktion in den Jahren 1007—8. — Diese liegt im Cod. Leid. 930 vor und enthält drei Bücher.

3. Zeitlich folgt hier die lateinische Übersetzung von **Gerhard von Cremona** (1114—1187), deren Eigentümlichkeiten ganz mit denen übereinstimmen, die wir der Redaktion von Al-Maháni und Al-Harawi zutrauen möchten. Es scheint doch dies nicht aus den Handschriften hervor zu gehen.

4. **Nassir-eddîn-Tûsi** war mit den verschiedenen Redaktionen in Verlegenheit, blieb aber bei der von Nasr-Mansur, und beendigte seine durch Revision der vorigen gemachte Redaktion im Jahre 1265; sie enthielt drei Bücher.[55])

5. **Ibn-abu-Schukr** unternahm um 1265 wahrscheinlich noch eine Redaktion.[56])

---

in Haji-Khalfa, ed. Flügel I, p. 390 und V, p. 48 und rühren angeblich von Nassir-eddin-Tûsi her.

54) In Tâbit ibn Korrahs Werk: *De figura sectoris* finden sich nämlich keine sicheren Spuren davon, dafs er Menelaos' *Sphärik* gekannt hat. Tâbits Werk, von dem bisher nur Fragmente bekannt geworden sind, habe ich nach cod. Paris. Arsenal. 1035 (lateinisch) untersucht.

55) Diese Redaktion liegt im cod. Berol. M. f. 358 und M. q. 559 vor; vgl. Steinschneider, Bibl. math. 1898, p. 73 ff. Auch Cod. Palat.-Medic. 271 und 286 (Firenze) sollen diese Redaktion enthalten.

56) Diese Redaktion liegt in India Office (London) 741 vor; vgl. Loth, *Catalog of the Arabic Manuscripts in the library of the India Office,* London 1877. Steinschneider kennt im ganzen 15 arabische und 3 hebräische Menelaoshandschriften; vgl. *Arab. Übersetz.* Register.



6. Eine hebräische Übersetzung besorgte **Jacob ben Machir** (Prophiat) († 1307—9) aus der Familie Tibbon aus Marseille um das Jahr 1273.[57])

Über andere Bearbeitungen oder Übersetzungen vor der Maurolycusausgabe (1558) liegen keine Berichte vor.

Nach den Angaben von Nassir-eddîn-Tûsi war die Büchereinteilung und die Anzahl der Sätze sehr verschieden; letztere variierte im ganzen zwischen 85 und 91. Bei Halley treffen wir aber nur 63 und in der Übersetzung von Gerhard wegen der erwähnten Wiederholung von 4 Sätzen 67. Dieser Unterschied kommt aber nur davon, dafs die Araber die Beweise des griechischen Originaltextes zerteilt haben, und zwar nach den Figurbeschreibungen, sodafs sie meistens für jede neue Figur einen neuen Satz zählen. In der Halleyausgabe haben wir in den nach den einzelnen Beweisabschnitten hineingefügten „q. e. d.“ ein Kriterium für die arabische Einteilung.

Rechnet man nach der Araber Art, so bekommt man bei Gerhard, sowie bei Halley ca. 90 Sätze. Jeder in der griechischen Darstellungsweise bewanderte Forscher würde jedoch sogleich, wie es Gerhard gethan, die ursprüngliche Einteilung wiederherstellen.

Dafs aber auch die arabischen Redaktionen gegenseitig eine verschiedene Satzanzahl haben, kommt wohl, aufser von der Wiederholung der 4 Sätze im zweiten Buch, von verschiedener Scandierung der ursprünglichen Sätze und von hinzugefügten aliter-Beweisen, welche letztere nach Besthorn als selbständige Sätze numeriert sind.

Überhaupt, glaube ich, werden die Abweichungen sich auf ganz verschiedene Beweise einzelner Sätze beschränken, bei denen man leicht entscheiden kann, ob sie griechisch sind oder nicht, ferner auf aliter-Beweise, und übrigens auf formale Abweichungen, nämlich Sprach-Einteilungs- oder Figurdifferenzen, sodafs es mit Herannahme hinreichlichen Handschriftenmaterials nicht unüberwindliche Schwierigkeiten bieten wird, den realen mathematischen Inhalt des ursprünglichen Textes festzustellen.

---

57) Vgl. Steinschneider, *Hebräische Übersetzungen* II, p. 516.

Drittes Kapitel.

Die Druckausgaben der Sphärik.

A. **Die Halleyausgabe** (Oxford 1758).

Steinschneider[58]) giebt mehrmals seinem Bedauern darüber Ausdruck, dafs die Vorrede, mit der Costard diese Ausgabe (die erst 1758 erschienen ist, während Halley schon 1742 gestorben war) einleitet, in den ihm bekannten Exemplaren fehlt. Das mir zur Verfügung stehende Exemplar aus der kgl. Bibliothek zu Kopenhagen enthält glücklicherweise diese Vorrede.

Aus dieser geht folgendes hervor: Halley hat seine Übersetzung hauptsächlich nach der hebräischen gemacht. Nach verschiedenen Zeugnissen glaubt Costard, dafs er namentlich Codex Huntington 6270. 524[59]) (derselbe wie Bodl. Uri 433) gebraucht hat. Vermutlich hat er, meint Costard, auch Codex Huntington 6303. 557[59]) (Bodl. Uri 431) verwendet. Derselbe führt den Titel: *„Codex (Menelai) de figuris Sphaericis ex Versione R. Isaaci filii Honaini."* Die beiden Handschriften sind hebräisch, letztere defekt. — Aus Halleys Noten erhellt, dafs er auch arabische Handschriften verglichen hat. Costard glaubt, dafs es die im Archiv Selden A. Nr. 5 u. 6 sind (d. h. Bodl. Uri 875 u. 895). Im Schlufs der Vorrede polemisiert Costard gegen Pater Mersenne und die von diesem mit ganz ungenügenden Erläuterungen versehene, im Jahre 1644 besorgte Menelaosausgabe.

Ich glaube jedoch, dafs Halley die arabischen Codices sehr wenig benutzt hat. In seinen Noten sagt er stets, dafs er hier wie sonst den hebräischen Handschriften gefolgt ist; mehrmals referiert er hebräische Worte, nur einmal ein arabisches. Deshalb bezweifle ich nicht, dafs wir in der Halleyausgabe eine freie lateinische Übersetzung der hebräischen von Jacob ben Machir vor uns haben.[60]) Ob aber letzterer dieselbe arabische Redaktion wie früher Gerhard verwendet hat, oder ob er vielmehr Gerhards lateinische Übersetzung gebraucht hat, ist von geringerem Interesse; denn in beiden Fällen ist die direkt nach dem Arabischen vom gewissenhaften Gerhard unternommene Übersetzung zuverlässiger als der Text der Halley-

58) Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 481—482; *Hebräische Übersetzungen* II, p. 516.

59) Vgl. *Cat. Mss. Angliae et Hyberniae* und die Erläuterungen von Steinschneider.

60) Vgl. oben Seite 16.

ausgabe, der entweder den Weg arabisch-hebräisch-lateinisch oder gar arabisch-lateinisch-hebräisch-lateinisch zurückgelegt hat. Aus einem Vergleich zwischen den Texten Gerhards und Halleys ergiebt sich folgendes:

Halley beginnt mit 6 Definitionen[61]), die wir bei Gerhard nicht finden. Die Echtheit dieser Definitionen steht doch über allem Zweifel, denn:

1. finden wir sie in mehreren arabischen Codices (z. B. Leidensis 399),

2. ist der in der ersten Definition definierte Begriff „τρίπλευρον" (sphärisches Dreieck) nach Pappos von Menelaos benannt,[62])

3. liegt eben in der Umschreibung des Wortes τρίπλευρον im ersten Teil der Gerhardschen Übersetzung die Erklärung des Weglassens der somit unnotwendigen Definitionen.

4. läfst es sich leicht erklären, dafs die Definitionen mit der Vorrede weggefallen sind. Ein Vergleich mit anderen Übersetzungen von Gerhard zeigt nämlich, dafs dieser immer die arabische Vorrede ausschliefst.

Die Büchereinteilung, die ja in den arabischen Redaktionen sehr verschieden war, ist bei Halley die einzig natürliche, wenn überhaupt mehr als ein Buch da war, und dafür bürgen uns die Berichte des Theon.

Dafs wir bei Gerhard eine andere Einteilung fanden, kam davon, dafs die von ihm gebrauchte arabische Redaktion von zwei Rezensenten gemacht war. Halley aber folgt hier ausnahmsweise und mit Recht den arabischen Oxforder Codices und nicht der hebräischen Handschrift, wo übrigens die Bücherabteilung doppelt war.[63]) — Wir müssen also die Halleyausgabe als eine gewissermafsen kritische betrachten; leider hat er aber seine Quellen schlecht gewürdigt und die schlechteste zur Hauptquelle gewählt.

Folgende Teile aus der Halleyausgabe, meistens kursiv gedruckte Zusätze von Halley, sind unecht:

Die Corollaren zu I, 20, 29, 30, 31, 32, 33, 34 u. 35. — Die nach I, 30 Corollar 2, kursiv gedruckten 4 Zeilen. — Die 9 Seite 63 mit kursiv gedruckten Zeilen im Beweise zu II, 7. — Lemmata und Theorema nach III, 1. — Die Corollaren zu III, 2, 3, 5 u. 15. — Der ganze Beweis zu III, 5. — III, 11 Lemma. — Die Kursivzeilen Seite 106—7 in III, 14.

Die Scholien sind fast alle von Halley verfafst. — III, 1, der sogen. Satz des Menelaos, nimmt eine besondere Stellung ein.[64]) So wie dieser Satz in der von Gerhard und Halley benutzten Redaktion redigiert war, war er es nicht in der Sphärik; denn die Protase fehlt und die Figurbuchstaben fangen mit Δ, M, T u. s. w. an. Hier liegt entweder eine arabische

61) Vgl. unten Seite 25—26. 62) Vgl. oben Seite 4 und unten Seite 26.
63) Vgl. die vorhergehende Seite. 64) Vgl. unten Kap. 6, b.

Interpolation vor, oder aber gehört der Satz in dieser Form einem *astronomischen* Werke griechischen Ursprungs an. Wie der Satz ursprünglich war, können wir doch mit Hülfe von Cod. Leid. 930, Ptolemaios und Theon ausfindig machen. — Wie der ganz unechte Beweis III, 5 entstanden ist, werden wir in einem späteren Kapitel genauer erörtern.

Mit den hier genannten Korrektiven läſst sich nun die Halleyausgabe ganz gut verwenden, wenn man nicht ins Detail gehen will. Der mathematischen Beurteilung genügt es, daſs die Sätze *alle* und der Gedankengang der Beweise, mit Ausnahme von III, 1 u. 5, echt sind.

B. **Die Maurolycusausgabe**[65]) (Messina 1558).

Aus der Vorrede referiere ich folgenden Passus:

„*Hos Menelai libellos cum ego in antiquis ex membrana codicibus reperissem conatus sum eos, quoniam corruptissimum erat exemplar, emendare et restituere, nec non quam plurimis tum necessariis tum argutis adaugere proportionibus.*“[66])

Mehr erfahren wir über Maurolycus' Hülfsmittel und Arbeitsmethode nicht; das genügt aber vollständig, um die Anwendbarkeit, oder vielmehr die Unanwendbarkeit dieser Ausgabe zu beurteilen. Eine weitere Bestätigung dafür giebt uns der offenbare Unterschied zwischen dieser Ausgabe und der Gerhardschen Übersetzung. Dieser Unterschied zeigt uns auch, daſs die bisherige Vermutung, Maurolycus habe letztere ver-

65) Zur Zeit des Maurolycus war man sehr eifrig, eine Druckausgabe von Menelaos' *Sphärik* zu erledigen. Auria berichtet in der Vorrede zu seiner Ausgabe von Theodosios' *de diebus et noctibus* (Romae 1591, vgl. oben), daſs Herzog Ferdinand beabsichtigte, viele mathematische Klassiker im Druck erscheinen zu lassen, darunter auch Menelaos' *Sphärik;* schon Regiomontanus beabsichtigte, eine Menelaosausgabe herzustellen.

66) Genauere Aufschlüsse habe ich später in einem erst in der Neuzeit edierten Werke des Maurolycus erhalten. Es steht da (Bulletino Boncompagni **9**, p. 28): „*Post haec, locus dandus est Menelao, quem et Mileum quidam uocant, qui Traiani tempestate claruit; et reliqua de sphaericis ingeniosissime prosecutus est in totidem libellis: unde Ptolomeus astronomus praecipuas demonstrationes mutuatur Mihi olim libros curiose perquirenti oblata sunt exemplaria duo Menelai manu scripta in membranis: quorum utrumque mutilatum et mox male resartum fuerat: nam pro demonstrationibus, quae maximi fuerint momenti continebat inuolucra quaedam nihil concludentia. Neque author ipse, si reuixisset, suum agnouisset opus. Hoc ego, antea diu desideratum multo labore, vigiliisque reuisum restituere conatus compluribus tam iucundis, quam necessariis adauxi propositionibus. Ex hoc quidem pendet tota fere sphaeralium triangulorum doctrina, et tabularum primi mobilis calculus.*“

wendet, falsch ist. Am wahrscheinlichsten ist es, dafs er arabische Handschriften gebraucht hat; denn nach der vorhergehenden Untersuchung lagen zur Zeit des Maurolycus eben nur arabische Handschriften verschiedener Redaktionen, Gerhardsche Mileuscodices und einige hebräische Handschriften derselben Redaktion wie die Mileushandschriften vor. Dafs Maurolycus in der Vorrede *„nadir arcus“* erwähnt, sagt dagegen nichts; denn diese Bezeichnung für *„corda dupli arcus“* war schon von Gerhard eingebürgert; ebensowenig sagt es, dafs er den Namen Menelaos und nicht mehr Mileus verwendet; denn die Identität dieser Namen war schon dem mathematischen Kleeblatt: Kardinal Bessarion — Georg Peurbach — Johs. Regiomontanus in der Mitte des 15. Jahrhunderts bekannt.

Wie gesagt, bietet uns die Maurolycusausgabe kein anmutiges Bild. Als Beleg mögen folgende Beispiele genügen:

Menelaos' Definitionen „mit anderen hinzugefügten“ stehen in der „Vorrede“ (!).

Unecht ist: I, 1 — die Corollaren, aufser dem ersten, zu I, 2 — I, 7, 8 — der Beweis zu I, 11 — der letzte Beweis zu I, 12 — das Corollar zu I, 14 — I, 15, 16, 17, 18, 19 — I, 20 teilweise — I, 36 — das Lemma zu I, 42 — der Beweis zu I, 44 — II, 1—6 (bei Halley II, 1—2) hat Maurolycus ganz umgearbeitet.

Unecht ist ferner: II, 8, 11—16, 19—20, 23—26, 30—32, 34—36, 39—40, 43—44 u. 47—48, während ein Halley II, 9 entsprechender Satz fehlt. — III, 2 ist unecht. — III, 7—8 ist frei umgearbeitet. — III, 11^2, 12—14, Lemmata 1—4 zu III, 21, III, 22 mit Lemmata sind alle unecht. — Dagegen fehlen die Halley III, 7^2, 11—14 u. 15^{3-5} entsprechenden echten Sätze; sie finden sich aber in der *Sphärik* des Maurolycus, deren Kern sie bilden.

Man sieht sofort, wie wenig Wert der Maurolycusausgabe beizumessen ist. Es wäre durchaus besser gewesen, wenn sie nicht erschienen wäre, sodafs man auf die Gerhardhandschriften hingewiesen worden wäre.

Wir führen gleich an dieser Stelle an, zu welchen Mifsverständnissen diese Ausgabe Anlafs gegeben hat.

Cantor, *Geschichte der Mathematik* I, p. 349, schreibt dem Menelaos den Satz zu: *„Die Summe der drei Seiten jedes sphärischen Dreiecks ist kleiner als ein gröfster Kreis der Kugel.“* Dieser Satz ist aber ein Zusatz von Maurolycus (I, 7).[67] A. v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I, p. 15 ff. hat nicht wissen können, dafs die Definitionen des *„sphärischen*

67) Denselben Fehler finden wir auch bei R. Wolf, *Geschichte der Astronomie,* p. 118.

Dreiecks und Winkels", die in Maurolycus' Vorrede stehen, hauptsächlich dem Menelaos angehören; v. Braunmühls Beschreibung der Einführung dieser Begriffe ist daher nicht zutreffend. — Den Satz: *„Die Winkelsumme des sphärischen Dreiecks liegt zwischen zwei und sechs Rechten"*, schreibt er dem Menelaos zu; das stimmt aber nur in Bezug auf die erste Hälfte des Satzes. — Die Bemerkung, die Menelaos über eine Menge von Eigenschaften der sphärischen Dreiecke, die den ebenen nicht zukommen, nach v. Braunmühl hinzugefügt haben soll, rührt von Maurolycus her. — Der Satz, der Seite 28 dem Theon beigelegt wird, die erste Formel Seite 62 unten, die dem Ibn-Junos, sowie die Theorie, die Seite 152 ff. dem Maurolycus zu Ehren gerechnet werden, gehören meistens zu der Sphärik des Menelaos und zwar zu den Sätzen III, 11—15 derselben, die Maurolycus weggelassen hat.[68])

Die Sätze dagegen, die Delambre, *l'astronomie ancienne* I, p. 243—45, aus der Sphärik zitiert, sind alle echt, natürlich weil Delambre die Halleyausgabe verwendete.

Man sieht, wie viel Unfug eine schlechte Ausgabe anstiften kann, und mufs bedauern, dafs eben dem Verfasser, dem zuerst die Bedeutung des Menelaos in die Augen gefallen ist, nur diese Ausgabe zur Verfügung stand.

C. **Die Mersenneausgabe**[69]) (Paris 1644).

Wir sahen, wie Costard in der Vorrede zur Halleyausgabe den Pater Mersenne wegen seiner Menelaosausgabe tadelte. Jedoch verdient Mersenne die Rüge nicht in ihrem ganzen Umfange. Hätte Costard nur die Ausgaben von Mersenne und Maurolycus verglichen, so hätte er gleich gesehen, dafs Mersennes Verbrechen sich darauf beschränkt, dafs er mit anderen griechischen Werken die Vorrede und die Sätze (ohne Beweise) nach der Maurolycusausgabe abdruckt, allerdings (vermutlich wegen Druckfehler) mit Quellenangabe nur zu Menelaos' zweitem Buch.

D. **Die sogen. Huntausgabe** (Oxford 1707).

In Paulys *Realencyklopädie*,[70]) bei Hoffmann u. a. versiert die Nachricht, dafs Johs. Hunt seiner Theodosiusausgabe (Oxford 1707) hinten Menelaos' *Sphärik* hinzugefügt habe. In vier augenscheinlich ganz voll-

68) Vgl. unten Kap. 6, b.

69) *Universae geometriae mixtaeque mathematicae Synopsis*, studio et opere F. M. Mersenni, Parisiis 1644, p. 204—230.

70) Artikel „Menelaus".



ständigen Exemplaren dieser Ausgabe (aus der kgl. Hof- u. Staats-Bibl. zu München, der Bibl. Angelica, Casanatense und der Vatikanbibl. zu Rom) findet sich aber nur der griechische Text von Theodosios und hinten eine lateinische Übersetzung desselben. Die Nachricht über die Huntausgabe gehört also wohl zu den Irrtümern, die, einmal eingebürgert, immer wieder abgeschrieben werden. Es wäre ja auch sehr merkwürdig, wenn Costard 1758 in der Vorrede zur Halleyausgabe eine andere Oxforder Ausgabe von 1707 mit keinem Wort erwähnt hätte, obgleich er die andere frühere Ausgabe nennt.

Ehe ich zum ersten Buch Menelaos übergehe, möchte ich gern eine Bemerkung darüber einschalten, wie viel Vertrauen man überhaupt zu dem durch das Arabische vermittelten Menelaostexte haben kann. Zur Entscheidung dieser Frage haben wir zwei Mittel.

Das erste ist, in den arabischen Codices die Spuren des Griechischen gewissenhaft nachzuforschen. Das ist aber nur die Sache eines schon mit den arabischen Übersetzungen griechischer Mathematiker vertrauten Arabologen.

Das zweite Mittel ist, den überlieferten Text mit eventuellen Zitaten oder Analogen anderer griechischer Verfasser zu vergleichen. In Betracht kommen hier:

1. Ein Vergleich zwischen III, 1 (Satz des Menelaos) nach dem arabischen Texte und den griechischen Redaktionen desselben im Ptolemaios und Theon. Dieser Vergleich hat geringeren Wert, weil dieser Satz, der Hebel aller sphärischen Berechnungen der Griechen, schon im Altertum in vielen verschiedenen Redaktionen vorgekommen sein mag.

2. Ein Vergleich zwischen der arabischen Überlieferung von Menelaos I, 13—14 und dem Referat derselben im Theon. Diesen Vergleich habe ich mit Hülfe der Gerhardschen Übersetzung gemacht.

Menelaos I, 13 (Figur 1—2).

Nach Gerhard.

Cum aequantur duo anguli duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae, et aequantur arcus continentes duos angulos alios utrorumque, scilicet omnis arcus suo relativo, et est unusquisque duorum angulorum reliquorum non rectus;[1]) tunc arcus

1) Einige Handschriften haben statt „non rectus“: „maior aut minor recto“.

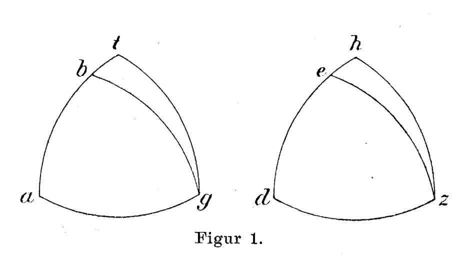
Nach Theon
(Baseler Ausgabe p. 342).

... *δυνατὸν δέ ἐστιν ἀκριβέστερον ταύτας ἐφοδεύειν, προλαμβανομένων τῶν τοιούτων δύο θεωρημάτων δειχθέντων ἐν τοῖς Μενελάου σφαιρικοῖς.*

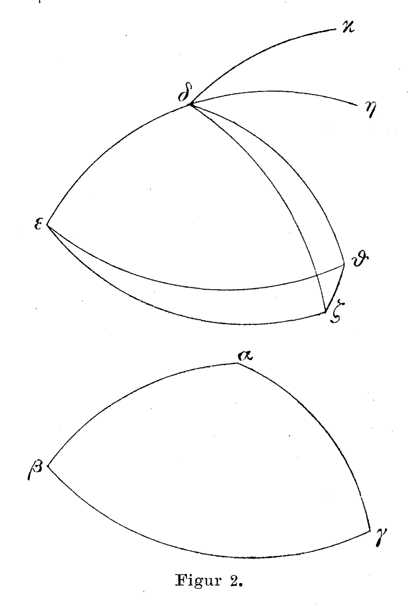
Ἐὰν δύο τρίπλευρα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἴσας ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς

reliquus unius duorum triangulorum est aequalis arcui reliquo alterius, et duo anguli reliqui sunt aequales duobus angulis reliquis, omnis angulus suo relativo.

δὲ λοιπὰς γωνίας ἅμα δυσὶν ὀρθαῖς μὴ ἴσας, καὶ τὰς λοιπὰς πάλιν ἴσας ἀλλήλας (sic!) ἕξει.



Figur 1.



Figur 2.

Der nun folgende Beweis dieses Satzes im Theon und in Gerhards Menelaosübersetzung ist ganz verschieden. Weil jedoch die arabischen Redaktionen in diesem Falle übereinstimmen, wagen wir zu vermuten, daſs Theons Beweis sein eigener ist, oder aber daſs zu Theons Zeit verschiedene Menelaosrezensionen vorlagen, wie es z. B. mit Euklids *φαινόμενα* der Fall[71]) war. Der nächste Satz giebt zum Vergleich besseren Anlaſs.

Menelaos I 14 (Figur 3—4).

Nach Gerhard.

Omnium duorum triangulorum ex arcubus circulorum magnorum super superficiem sphaerae si aequantur duo anguli unius duobus angulis alterius, unusquisque suo relativo, et duo arcus, super quos sunt anguli aequales, sunt aequales; tunc duo arcus reliqui sunt aequales duobus arcubus reliquis, omnis arcus suo relativo, et reliquus angulus reliquo angulo aequalis.

Nach Theon
(Baseler Ausgabe p. 342).

Ἐὰν δύο τρίπλευρα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ τὴν πρὸς ταῖς γωνίαις, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει.

71) Vgl. unten Kap. 5, b.

Cuius exemplum est, ut[1]) sint duo trianguli abg, dez super superficiem sphaerae, et angulus d sit aequalis angulo ā, et angulus z aequalis angulo g, et arcus dz sit aequalis arcui ag. — Dico ergo, quod arcus de est aequalis arcui ab, et arcus ze aequalis arcui gb, et angulus b aequalis angulo ē.

Cuius demonstratio haec est. Unusquisque duorum angulorum ā, d aut est rectus aut non rectus.

Sit itaque in primis unusquisque eorum rectus. Et arcus ag est aequalis arcui dz. Si ergo fuerit punctum g polus circuli ab, tunc punctum z iterum erit polus circuli de. Erit ergo arcus gb aequalis arcui ze, et arcus ab aequalis arcui de.

Et iterum non sit punctum g polus circuli ab, neque[2]) z polus circuli ed, et quia angulus ā est rectus, tunc arcus ag est super polos circuli ab; et producam arcum ag usque ad polum circuli ab supra t. Et similiter iterum arcus zd, cum producetur,[3]) transit super polum circuli de; producam ergo ipsum usque ad polum circuli de super h; et protraham duos arcus tb, he duorum circulorum magnorum.

Arcus igitur at est aequalis arcui hd; sed arcus ag est aequalis arcui dz; ergo arcus tg est aequalis arcui hz, et arcus tb aequalis arcui he, et angulus bgt aequalis angulo ezh, et

1) Andere Handschriften haben „Verbi gratia sint duo . . . etc.“

Einige Handschriften haben: 2) neque ergo erit, 3) producitur oder productus fuerit.

Ἔστωσαν δύο τρίπλευρα τὰ αβγ δεζ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, τὴν μὲν ὑπὸ αβγ [entspricht ā bei Gerhard] τῇ ὑπὸ δεζ [d], τὴν δὲ ὑπὸ βαγ[1]) [g] τῇ ὑπὸ εδζ[2]) [z], πλευρὰν δὲ τὴν βγ [ag] τῇ εζ [dz] ἴσην, λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει.

ἤτοι γὰρ ὀρθαὶ εἰσὶν αἱ ὑπὸ αβγ [ā] δεζ [d], ἢ ἐλάττους, ἢ μείζους.

ἔστωσαν πρότερον ὀρθαί, οἱ ἄρα τῶν αβ [ba] δε [ed] κύκλων πόλοι, ἐπὶ τῶν βγ [ag] εζ [dz] κύκλων εἰσί. καὶ εἰσὶν αἱ βγ [ag] εζ [dz], ἤτοι τετραγώνων, ἢ μείζονες, ἢ ἐλάσσονες. ἔστωσαν πρότερον τετραγὼνων. τετραγώνων ἄρα καὶ αἱ γα [gb] δζ [ez], δύο οὖν αἱ βγ [ag] γα [gb] δυσὶ ταῖς εζ [dz] ζδ [ze] ἴσαι εἰσί. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγα [agb] γωνίᾳ τῇ ὑπὸ εζδ [dze] ἴση ἐστί, βάσις ἄρα ἡ αβ [ba] βάσει τῇ δε [ed] ἴση ἐστίν.

ἔστωσαν δὲ ἐλάττονες τετραγώνων αἱ βγ [ag] εζ [dz], καὶ κείσθωσαν τετραγώνων ἴσαι αἱ βη [ah] εθ [dt]. καὶ διὰ τῶν η α ϑ δ [h b t ē] μέγιστοι κύκλοι γεγράφθωσαν οἱ ηα [hb] ϑδ [te]. τετραγώνου ἄρα ἑκάτεροι. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις αἱ βη [ah] εθ [dt], ὧν αἱ βγ [ag] εζ [dz] ἴσαι, καὶ λοιπαὶ ἄρα αἱ γη [gh] ϑζ [tz] ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ηα [hb] δθ [et] ἴσαι. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ αγη [bgh]

1) βαγ ist in βγα zu korrigieren.

2) εδζ ist in εζδ zu korrigieren.

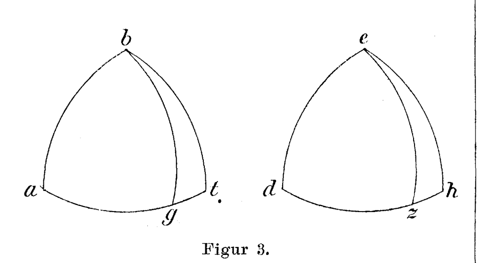
unusquisque duorum angulorum tbg, hez est minor recto, ergo arcus bg est aequalis arcui ez.

Sed arcus ga est aequalis arcui dz, et angulus agb aequalis angulo dze; ergo arcus ab est aequalis arcui de; ergo angulus b est aequalis angulo e. Et illud est, quod declarare voluimus.

Et iterum sit unusquisque duorum angulorum a, d non rectus.

Manifestum est igitur, quod . . . . .

Dem restierenden Teil des Beweises bei Gerhard hat Theon nichts Entsprechendes.



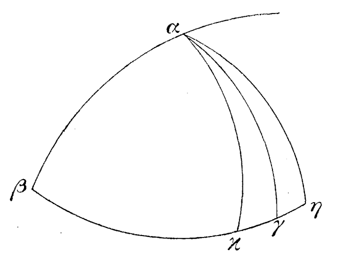
Figur 3.

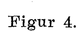
τῇ ὑπὸ δζϑ [ezt] *ἴση, διὰ τὸ καὶ τὰς ἐφεξῆς ἴσας εἶναι. δύο δὴ τρίπλευρά εἰσι τὰ αγη* [bgh] *δζϑ* [ezt], *μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ αγη* [bgh] *τῇ ὑπὸ δζϑ* [ezt], *περὶ δὲ τὰς ὑπὸ γηα* [ghb] *ζϑδ* [zte] *τὰς πλευρὰς ἴσας, τὰς δὲ λοιπὰς γωνίας τὰς ὑπὸ γαη* [gbh] *ζδϑ* [zet] *ἅμα δυσὶν ὀρϑαῖς ἀνίσους. διὰ τὸ τὸ* (sic!) *ὅλας τὰς ὑπὸ βαη* [abh] *εδϑ* [det], *δύο ὀρϑὰς εἶναι. καὶ αἱ λοιπαὶ ἄρα πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἡ αγ* [bg] *τῇ δζ* [ez]. *ἐστὶ δὲ καὶ ἡ βγ* [ag] *τῇ εζ* [dz] *ἴση. δύο δὴ αἱ βγ* [ag] *γα* [gb] *δυσὶ ταῖς εζ* [dz] *ζδ* [ze] *ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ βγα* [agb] *τῇ ὑπὸ εζδ* [dze] *ἴση, βάσις ἄρα ἡ αβ* [ba] *βάσει τῇ δε* [ed] *ἴση ἐστίν.*

ἔστωσαν δὴ πάλιν αἱ βγ [ag] *εζ* [dz] *μείζονες τετραγώνων. καὶ*

. . . . . .

Zu diesem dritten Falle hat Gerhard keinen entsprechenden.





Figur 4.

Während das im Theon Bewiesene mehr umständlich dargestellt ist als das Entsprechende bei Gerhard, ist im Theon überhaupt nur ein Spezialfall bewiesen. Den nur halb vollendeten Beweis schliefst Theon mit folgendem Passus: „*ταῦτα δὲ Μενέλαος ἀπέδειξεν ἐν τῷ πρώτῳ τῶν σφαιρικῶν.*“

Wir hätten mit Fug eine bessere Übereinstimmung erwarten können, umsomehr, weil wir nach Theons Worten, wenn uns der Text der *Sphärik* sonst nicht bekannt gewesen wäre, keinen Augenblick bezweifelt hätten, daſs Theon die Sätze wörtlich nach Menelaos zitiert. Nun müssen wir doch dies in Abrede stellen. Einen gewissen Trost finden wir darin, daſs Theon auch nicht die sphärischen Beweise des Ptolemaios so genau referiert, wie wir es nach seinen Worten hätten erwarten dürfen.

3. Ein Vergleich zwischen dem arabisch überlieferten Menelaostext und den vier Sätzen aus Menelaos, die Pappos beweist, ist für textkritische Zwecke ohne Wert; denn Pappos giebt offenbar nicht die Sätze wörtlich an, sondern referiert sie möglichst kurz.

Viertes Kapitel.

Menelaos' erstes Buch und Euklids Elemente.

a. Menelaos' Definitionen.

Nach Halley sind die Definitionen, deren Echtheit wir schon festgestellt haben[72]), folgende:

I. *Triangulum Sphaericum est spatium comprehensum sub arcubus circulorum magnorum in superficie Sphaerae.*

II. *Atque hi arcus, qui semper minores sunt semicirculo, dicuntur latera vel crura Trianguli.*

III. *Anguli autem eorum sunt anguli, quos continent circuli magni in superficie Sphaerae.*

IV. *Et hi Anguli aequales dicuntur, quando inclinantur ad invicem plana arcuum eosdem continentium aequali inclinatione.*

V. *Et si duorum arcuum plana inclinentur ad invicem maiori inclinatione quam duorum aliorum arcuum plana inter se, erit angulus ab iisdem arcubus contentus etiam maior.*

VI. *Et si plana arcuum contineant angulum rectum, ipsi arcus etiam dicuntur continere angulum rectum.*

---

72) Vgl. oben Seite 18.

Menelaos beschränkt sich also auf die Definitionen, die sich auf das sphärische Dreieck beziehen, obwohl er für verschiedene Definitionen aufser den in den Elementen vorkommenden Verwendung hat, so z. B. Kugelpol, Gröfster Kreis, Zirkelpol auf der Kugel, die aber alle in Theodosios' *Sphärik* stehen. Es scheint dies nicht ein Zufall zu sein. Menelaos hat eben nur die von ihm selbst neu erfundenen Begriffe definieren wollen; wie triumphierend hebt er diese und nur diese Definitionen hervor. Er hat eingesehen, wie fruchtbar die in der Aufstellung des Begriffes *„Dreieck auf der Kugel“* enthaltene Abstraktion ist, und hierauf beziehen sich wohl die stolzen Worte seiner Einleitung: *„inveni ego rationem demonstrativam praestantem“*.[73]) Dafs Menelaos unzweifelhaft der Erfinder dieses Begriffes ist, dafür bürgen uns also nicht nur Pappos' Worte: „καλεῖ δὲ τὸ τοιοῦτο σχῆμα Μενέλαος ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τρίπλευρον“, und der Umstand, dafs wir diesen Begriff nie vor, dagegen allgemein nach Menelaos verwendet finden, sondern die Definitionen selbst durch ihre Beschränkung.

Wie wir später sehen werden, strebt Menelaos immer, sogar Sätze, die ihrer Natur nach sich nicht auf Dreiecke beziehen, als Dreieckssätze zu formulieren. Deswegen bezweifeln wir auch nicht, dafs *es Menelaos war, der zuerst die Lehre vom sphärischen Dreieck (Kugelgeometrie), wie auch die sphärische Trigonometrie aus der Astronomie und der älteren, ganz stereometrischen Sphärik ausgeschieden hat.* Es dürfte dies das gröfste Verdienst unseres Verfassers sein.

Menelaos fand in Euklids *Elementen* schon das Wort τρίπλευρον (I, def. 6—7), womit Euklid *„eine ebene dreiseitige Figur“* bezeichnet. Das ebene Dreieck nennt Euklid jedoch in der Praxis immer τρίγωνον; also stand das Wort τρίπλευρον zur Verfügung, weil die Anwendung dieses Wortes zur Bezeichnung sphärischer Dreiecke nicht mit Euklids Anwendung kollidiert. — Wenn erst das sphärische Dreieck als von gröfsten Kreisbogen umschlossen definiert ist, überträgt Menelaos die Begriffe πλεύρον (Seite) und γωνίον (Winkel) von der Ebene auf die Kugel. — Um die Gleichheit der sphärischen Winkel zu definieren, mufs er zu Euklid XI, def. 6—7 oder Theodosios I, def. 6, d. h. zu den Definitionen der Raumwinkel Zuflucht nehmen. — In den Definitionen 5 und 6 sucht Menelaos die nämlichen Definitionen des Euklid zu ergänzen.

b. Übersicht des ersten Buches.

Betrachten wir nun die Sätze im ersten Buch, und beginnen wir mit einem Résumé über dieselben nach ihrem Inhalt gruppiert, damit wir gleich einen Überblick gewinnen.

---

73) Vgl. oben Seite 15.

1. Einen sphärischen Winkel, einem gegebenen gleich, zu konstruieren. Dieses Problem mufs als ein Hülfssatz betrachtet werden, der nur deswegen mitgenommen wird, weil Menelaos denselben gebraucht, um die drei folgenden Theoreme zu beweisen.

Mit Anwendung moderner Zeichen bezeichnen wir im sphärischen Dreiecke ABC die den Winkeln A, B, C gegenüberliegenden Seiten bezw. mit a, b, c und haben nun folgende Satzgruppen:

2. Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind gleich, d. h. wenn $\smile a = b$, wird $\angle A = B$.
3. Umgekehrt, wenn $\angle A = B$, wird $\smile a = b$.
9. Wenn $a > b$, wird $A > B$.
7. Umgekehrt, wenn $A > B$, wird $a > b$.

5. Die Summe zweier Seiten ist gröfser als die dritte, d. h. $a + b > c$.
10. Je nachdem $a + b \gtreqless 180^0$, wird $180 \div A \lesseqgtr B$, und umgekehrt.
11. Die Nebenwinkel eines Dreieckswinkels sind kleiner als die Summe der zwei anderen Dreieckswinkel, d. h. $B + C > 180^0 \div A$, oder aber: Die Winkelsumme des Dreiecks ist gröfser als zwei rechte: $A + B + C > 180^0$.

Diese Sätze geben die Haupteigenschaften des sphärischen Dreiecks. 2, 3, 7 und 9 bilden eine Gruppe; 5, 10 und 11 eine zweite. Letztere behandelt die dreiseitige körperliche Ecke.

In den Sätzen der folgenden Gruppe werden die Stücke zweier sphärischen Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ verglichen.

6. Wenn $c = c_1$, $A > A_1$ und $B > B_1$, wird $b + c > b_1 + c_1$.
19. Wenn $c = c_1$, $A > A_1$, $B < B_1$ und $C \geqq 90^0$, $C_1 \geqq 90^0$, wird $a > a_1$ und $b < b_1$.
8. Wenn $b = b_1$, $c = c_1$ und $A > A_1$, wird $a > a_1$, und umgekehrt, wenn $b = b_1$, $c = c_1$ und $a > a_1$, wird $A > A_1$.
18. Wenn $A = A_1$, $B = B_1$ und $C > C_1$, wird, je nachdem $a + a_1 \gtreqless 180^0$, auch $b_1 \gtreqless b$, und jedenfalls $c > c_1$.

6 und 19 sind Erweiterungen von bezw. 5 und 7. — 18 und 19 stehen mit 4 und 17 in der folgenden Gruppe in enger Verbindung. Diese nthält die Kongruenzsätze.

Menelaos macht keinen Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie. Er beweist ganz einfach, dafs, wenn diese und jene Dreieckselemente gleich sind, werden auch die übrigen gleich. Auf diese Weise gelangt er zu folgenden Kongruenzsätzen:

Zwei sphärische Dreiecke sind kongruent, wenn:

4 a. zwei Seiten und der von ihnen gebildete Winkel gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $b = b_1$ und $C = C_1$;

4 b. alle drei Seiten gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $b = b_1$ und $c = c_1$;

14. eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel gleich sind, d. h. wenn $a = a_1$, $B = B_1$ und $C = C_1$;

17. alle drei Winkel gleich sind, d. h. wenn $A = A_1$, $B = B_1$ und $C = C_1$;

12. ein rechter Winkel, die gegenüberliegende Seite und einer der anderen Winkel gleich sind, letzterer jedoch nicht recht, d. h. wenn $A = A_1 = 90^0$, $a = a_1$ und $B = B_1 \gtrless 90^0$;

16. eine Seite, der gegenüberliegende Winkel und einer der anderen Winkel gleich sind, vorausgesetzt, daſs die Summe der zwei den letzteren Winkeln gegenüberliegenden Seiten nicht 180^0 ist, d. h. wenn $A = A_1$, $a = a_1$, $B = B_1$ und $b + b_1 \gtrless 180$;

13. ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und eine der anderen Seiten gleich sind, vorausgesetzt, daſs die jenen zwei Seiten gegenüberliegenden Winkel beide entweder stumpf oder spitz sind, d. h. wenn $a = a_1$, $A = A_1$, $c = c_1$ und entweder $C > 90^0$ und $C_1 > 90^0$ oder $C < 90^0$ und $C_1 < 90^0$;

15. zwei Seiten und die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, vorausgesetzt, daſs diese Stücke nicht alle recht sind.

Von diesen Sätzen geben 14 und 17 zu keinen Bemerkungen Anlaſs. — 12 ist ein spezieller Fall von 16. — In 13 ist ein speziellcr Fall eingeschlossen ($a = a_1$, $c = c_1$ und $A = A_1 = 90^0$), der schon oftmals vor 13 vorausgesetzt wird; dieser Spezialsatz ist nämlich in Theodosios' *Sphärik* bewiesen (II. 11), jedoch nicht als Dreieckstheorem. — In Menelaos 13 ist übrigens ein anderer Spezialfall weggelassen, der nämlich, welcher hervorgeht, wenn die Winkel C und C_1 beide $= 90^0$ sind. Wahrscheinlich haben wir hier die Ursache zur Aufstellung des Satzes 15, wo dann die Kongruenz im erwähnten Spezialfall mitgenommen ist. Dieser überbestimmte Satz 15 mit vier gleichen Elementen ist jedoch nicht notwendig, weil wir für den in 13 vernachlässigten Fall ($C = C_1 = 90^0$, $A = A_1 \gtrless 90^0$) schon durch 12 die Kongruenz beweisen können, und weil, falls sowohl der Winkel C als $A = 90^0$, die Kongruenz nicht existiert, eben was Menelaos in 15 bemerkt.

Vom ersten Buche bleiben uns noch die Sätze 20—35 übrig. Von diesen sind:

21. Wenn $B \geqq 90^0$, $a < 90^0$ u. $c < 90^0$, wird $A < 90^0$ u. $C < 90^0$, und

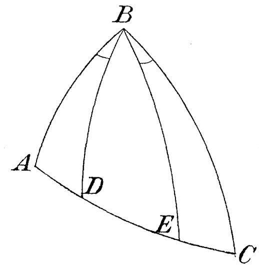
22. Wenn $A \geqq 90^0$, $a < 90^0$ u. $c < 90^0$, wird $b < 90^0$, $B < 90^0$ u. $C < 90^0$

eingeschaltene Hülfssätze.

23. Wenn M die Mitte von a, N von b, wird $MN > \frac{1}{2} c$,

24. Wenn M die Mitte von a, N von c und $B \geqq 90^0$, wird $\angle BMN < C$ und $\angle BNM < A$ und

25. Wenn $A \geqq 90^0$, M, N, P bezw. die Mittelpunkte von a, b, c, wird $\angle MNC < A$ und $MPB < A$



Figur 5.

bilden eine Gruppe für sich.

20. Wenn M die Mitte von a ist, wird $AM \lesseqgtr \frac{1}{2} a$, je nachdem $A \gtreqless B + C$

ist ein isolierter Satz, der sich zunächst der Gruppe 26—35 anschliefst.[74]) Die Sätze dieser Gruppe, aufser dem Hülfssatz 32, können wir auf folgende Weise zusammenfassen:

Seien (Figur 5) vom Scheitel B die Bogen BD uud BE gezogen, die den Bogen b in D und E treffen, so haben wir:

	Wenn:	So wird:
[33 / 27.1 / 33 coroll.]	$a + c \lesseqgtr 180^0,\ a > c,\ AD = EC,$	$\angle ABD \gtreqless EBC,\ BD + BE \lesseqgtr a + c,$
[34 / 27.2 / 34 coroll.]	$a + c \lesseqgtr 180^0,\ a > c,\ \angle ABD = EBC,$	$AD \lesseqgtr EC,\ BD + BE \lesseqgtr a + c,$
[35 / 28 / 35 coroll.]	$a + c = BD + BE \lesseqgtr 180^0,\ a > c,$	$AD \gtreqless EC,\ \angle ABD \gtreqless EBC,$

Fallen die Punkte D und E in D zusammen, bekommt man Spezialfälle, die im Menelaos doch vor den allgemeinen Fällen bewiesen werden.

	Wenn:	So wird:
[29 / 26 / 29 coroll.]	$a + c \lesseqgtr 180^0,\ a > c,\ AD = DC,$	$\angle ABD \gtreqless DBC,\ 2BD \lesseqgtr a + c,$
[30 / 26 / 30 coroll.]	$a + c \lesseqgtr 180^0,\ a > c,\ \angle ABD = DBC,$	$AD \lesseqgtr DC,\ 2BD \lesseqgtr a + c,$
[31 / (26) / 31 coroll.]	$a + c = 2BD \lesseqgtr 180^0,\ a > c,$	$AD \gtreqless DC,\ \angle ABD \gtreqless DBC.$[75])

74) Das Corollar zum Satz 20 ist ein Zusatz von Halley.

75) Das Resumé ist hier nicht ganz zutreffend. Etwas von dem, was wir unter 30 aufgeführt haben, ist eigentlich schon in 29 bewiesen. — (26) bedeutet, dafs der Fall (gegeben $\cup a + c = 2BD = 180^0$, $a > c$, zu beweisen: $\cup AD = DC$

Es dreht sich also hier um die drei Elementpaare, die Bogen AD und CE, die Winkel ABD und EBC und die Bogensummen $BD + BE$ und $a + c$. Wenn die Gleichheit eines dieser Elementpaare gegeben ist, wird die Gleichheit oder Ungleichheit der zwei anderen Paare bewiesen, je nachdem $a + c \gtreqless 180^0$, also für drei verschiedene Gattungen sphärischer Dreiecke.

Das Mittel zu den Beweisen für die allgemeinen Fälle leistet der Hülfssatz 32, welcher sagt:

Sei D die Mitte von b und E ein beliebiger Punkt auf BD, und sei ferner $a + c < 180^0$ und $a > c$, so kann man beweisen, dafs $\angle BAE > BCE$.

Sollte man den Inhalt dieses ersten Buches charakterisieren, könnte man sagen, dafs das Buch uns die allgemeine Theorie über konvexe dreiseitige Ecken und über die Kongruenz sphärischer Dreiecke giebt nebst einem Anhang solcher Sätze, die wir wohl eher als Übungsbeispiele hinzufügen möchten. Dieser Inhalt überschreitet nirgends, was man in einem modernen Lehrbuch über die elementare Stereometrie zu finden erwartet; dagegen vermissen wir die neuere Lehre von Polardreiecken und die obere Grenze der Winkelsumme (540^0).

Dennoch mufs man bewundern, dafs mit einem Schlag von demselben Manne, der zuerst den Begriff „sphärisches Dreieck" definierte, doch so viel geleistet wird.

In der That würden wir vergebens in der griechischen Geometrie vor Menelaos *eine Folge* von Sätzen suchen, die ganz oder teilweise mit denjenigen bei Menelaos zusammenfallen. Für die Beweise hat Menelaos allerdings vieles von den älteren Arbeiten über Sphärik vorausgesetzt; was dagegen die Theoreme betrifft, so liefert die ebene Geometrie ihm dieselben. Nichtsdestoweniger finden wir hie und da stereometrische oder sphärische Sätze, die mit denjenigen im Menelaos zufälligerweise zusammenfallen.

XI, 20 in Euklids *Elementen* fällt mit Menelaos I, 5 zusammen, während wir im Menelaos keinen Satz finden, der Euklid XI, 21 entspricht. Die Beweise bei Euklid und Menelaos sind ganz verschieden, die Satzformulierung ebenfalls: das Zusammenfallen ist offenbar ein zufälliges. Ohne Zweifel erhält Menelaos seinen Satz I, 5 vom analogen in der Ebene, Euklid I, 20.

Theodosios' *Sphärik* III, 3 ist fast genau derselbe wie Menelaos I, 4a, wie verschieden die Sätze auch formuliert sind. Die Gleichheit geht jedoch

---

und $< ABD = DBC$), den einzigen, den Menelaos vernachlässigt, hier einzufügen ist. Maurolycus fügte den fehlenden Fall als Satz I, 36 in seiner Menelaosausgabe ein.



ganz deutlich hervor, wenn wir den Gebrauch von Theodos. III, 3 in Theodosios' περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν II, 10—14 betrachten. Wie wir sehen werden,[76]) ist der Satz übrigens schon in Euklids φαινόμενα 12 vorausgesetzt.

Theodosios' *Sphärik* II, 11 kann man leicht in Menelaos I, 4a umbilden. Den umgekehrten Satz Theodos. II, 12, Spezialfall von Menelaos I, 13, verwendet Menelaos, wie oben erwähnt, oft.

Diese Zusammenfälle sind ganz sporadisch, und ich finde hierin eine Stütze meiner Annahme, *nicht* daſs das erste Buch Menelaos mit Hülfe des ersten Buches Euklid entstanden ist, denn das kann man überhaupt nicht bezweifeln, sondern daſs Menelaos der erste ist, der diese Übertragung von der Ebene auf die Kugel unternommen.

Ich möchte nun nachweisen, wie und in welchem Umfang Menelaos, um die sphärischen Dreieckstheoreme zu erhalten, das erste Buch Euklids gebraucht hat, und zwar in der Voraussetzung, daſs er versuchte, Euklids *Dreieckstheoreme* jedes für sich zu übertragen.

c. Übertragung der Dreieckssätze aus der Ebene auf die Kugel.

Euklid I, 1, ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebenen Seite zu konstruieren, hat keinen entsprechenden Satz bei Menelaos. Dies macht nicht Wunder, wenn man beachtet, daſs eine Reihe von solchen ganz einfachen Konstruktionen von Menelaos ohne Beweis vorausgesetzt werden, gerade als ob sie bewiesen wären.[77]) Für diese Konstruktion hat Menelaos übrigens keinen Gebrauch.

Euklid 2 ist kein Dreiecksproblem; folglich berührt Menelaos es nicht.

Euklid 3 ist auch kein Dreiecksproblem; Menelaos setzt es aber oft als Satz auf der Kugel ohne Beweis voraus.

Euklid 4, analog Menelaos I, 4a sagt: „*Wenn zwei (ebene) Dreiecke zwei Seiten und den von ihnen gebildeten Winkel gleich haben, werden die Dreiecke gleich.*" Euklids Beweis läſst sich nicht übertragen, weil er die Deckungsmethode verwendet, die auf der Kugel für symmetrische Dreiecke unverwendbar ist. — Wenn also Menelaos den Deckungsbeweis nicht überträgt, haben wir darin ein Zeugnis dafür, daſs er den Unterschied zwischen Kongruenz und Symmetrie auf der Kugel erkannt hat. Eben deswegen sagt er nie (wie mitunter Euklid von ebenen Dreiecken), dass die Dreiecke

---

76) Vgl. unten Kap. 5, b.

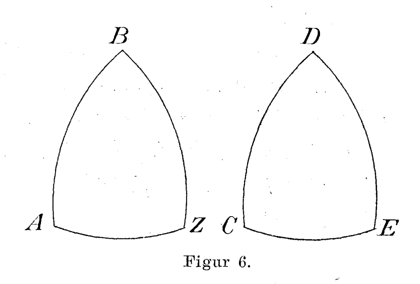
77) Vgl. Euklid, *Elementa* I, 9—15. — Euklid I, 1 trug Maurolycus auf die Kugel über und setzte das so erhaltene Problem als Satz I, 1 in seiner Menelaosausgabe ein.

gleich werden, sondern immer: *„wenn diese und jene Stücke gleich sind, dann werden auch die anderen gleich."*

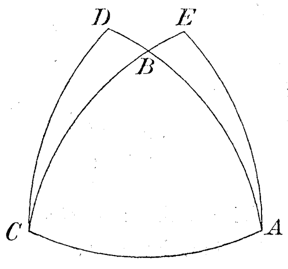
Euklid 5, 6, 8 sind von 4 abhängig und entsprechen bezw. Menelaos 2, 3, 4b, während Euklid 7, der lediglich als Mittel zum Beweise von 8 dient, von Menelaos nicht mitgenommen wird. Also entsprechen Euklid 4—8 den Sätzen Menelaos 2—4; nur die Reihenfolge ist verschieden, weil der Beweis des Hauptsatzes (Euklid 4) nicht übertragbar ist. Für diesen hat Menelaos indessen einen neuen Beweis gefunden und zwar durch die Sätze Theodosios II, 11—12 (vgl. oben), deren Anwendung nahe liegt, weil Theodosios 12 und Euklid 4 fast ganz analog sind. Der Unterschied ist nur, daſs im Theodosios 12 die Winkel am Scheitel recht sind.

Deshalb kann Menelaos die zwei Sätze im Theodosios sehr leicht benutzen, um damit Euklid 4—6 und 8 zu beweisen, nur muſs er wegen der speziellen Annahme bei Theodosios über die Scheitelwinkel die Konstruktion Euklid I, 23 vorausschicken. So erklärt sich folgende Satzfolge und Beweisart im Menelaos:

Menelaos I, 1 = Euklid I, 23: *Auf der Kugeloberfläche einen Winkel zu konstruieren, der einem gegebenen gleich ist* (Figur 6).



Figur 6.



Figur 7.

Seien gegeben $\angle CDE$ und Punkt B; dann zieht man mit D und B als Pole gleiche Kreise CE und AZ. Der Bogen AZ wird gleich EC gemacht. Die Schnittlinien von den Ebenen AB und BZ, sowie die von CD und DE stehen senkrecht bezw. auf den Ebenen der Bogen AZ und CE [Theod. I, 15 und Euklid XI, 19]. Die Winkel jener zwei Paare von Ebenen sind gleich den Bogen CE und AZ [Euklid III, 26]. Die Winkel jener Ebenen sind aber gleich den Winkeln B und D [Euklid XI, def. 6]. Also [def. 4] $\angle B = D$.

Corollar. *Auf derselben Figur wird folglich, wenn* $\smile AZ = CE$, *auch* $\angle B = D$, *und umgekehrt.*

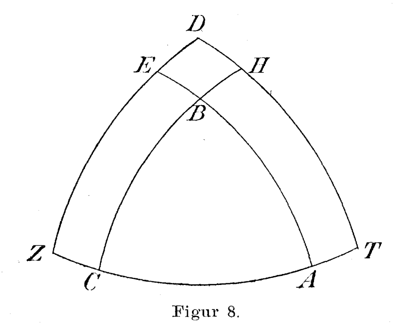
I, 2 = Euklid I, 5 (Figur 7):

Die Winkel an der Basis in einem gleichschenkligen sphärischen Dreieck sind gleich.

Sei gegeben: $\smile AB = BC$.

Zu beweisen: $\angle CAB = BCA$.

Man zieht die Kreise AE und CD bezw. mit den Polen C und A, folglich $\angle D = E = 90^0$ [Theod. I, 15]; die Bogendifferenz $DB = BE$, und $\smile CB = BA$ (gegeben), folglich $\smile CD = AE$ [Theod. II, 11]; also $\angle A = C$ [1, corollar].



Figur 8.

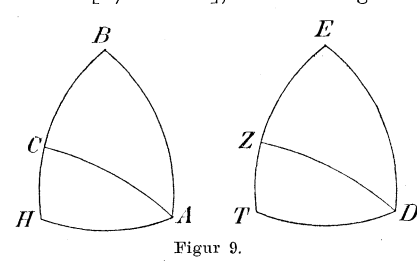
I, 3 = Euklid I, 6 (Figur 8):

Ein sphärisches Dreieck, dessen zwei Winkel gleich sind, ist gleichschenklig.

Sei gegeben: $\angle BAC = BCA$.

Zu beweisen: $\smile AB = BC$.

Man zieht die gröfsten Kreise ZED und DHT bezw. mit den Polen A und C. Dann wird D der Pol des Bogens CA,[78]) d. h. $\smile ZD = DT$. Ferner $\smile EZ = HT$ [1, corollar], und die Bogendifferenz $ED = DH$, und weil $\angle E = H = 90^0$ [Theod. I, 15], wird $\smile EB = BH$ [Theod. II, 11], und die Differenzen $\smile AB = BC$.



Figur 9.

I, 4a = Euklid I, 4 (Figur 9):

Wenn in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich sind, wird die dritte Seite auch gleich.

Sei gegeben: $\angle B = E$, $\smile BC = EZ$, $\smile BA = ED$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$.[78a])

Die Bogen HA und DT, mit den Polen B und E gezogen, sind einander gleich (1, corollar), $\angle H = T = 90^0$, die Bogendifferenz $CH = ZT$, dann wird die Gerade $AC = DZ$ [Theod. II, 11], d. h. $\smile AC = DZ$.

I, 4b = Euklid I, 8 (Figur 9):

Wenn zwei sphärische Dreiecke alle drei Seiten gleich haben, werden auch die Winkel gleich.

Der Beweis folgt durch die entgegengesetzten Schlufsfolgerungen des vorigen Beweises [statt Theod. II, 11 wird somit Theod. II, 12 gebraucht].

Wir sehen, wie mit Hülfe des vorhergehenden Problems (Menel. I, 1),

78) Hier setzt Menelaos folgenden Satz voraus: *„Die Durchschnittspunkte zweier gröfsten Kreise sind die Pole eines gröfsten Kreises durch ihre Pole."* Dieser Satz findet sich weder in Theodosios' *Sphärik* noch in den älteren astronomischen Werken.

78a) Satz I, 4a ist kein vollständiger Kongruenzsatz; das Fehlende ($\angle A = D$ u. $\angle C = Z$) folgt offenbar durch I, 4b.

seines Corollars und Theodosios II, 11—12 die Sätze 4—6 und 8 aus Euklid mit einfachen und von einander ganz unabhängigen Beweisen versehen worden sind. Hätten aber die Sätze des Theodosios nicht so bequem zur Verfügung gestanden, wäre die Beweismethode ganz anders ausgefallen. Eine Frage stellt sich doch ein: Warum hat Menelaos nicht das Problem I, 23 (Euklid) ohne Beweis vorausgesetzt, so wie er es mit den Euklidischen Problemen zu thun pflegt? Die Antwort ist diese: Weil das Problem bei Euklid von eben dem Kongruenztheorem (Euklid I, 8) abhängig ist, wegen dessen Beweises im Menelaos (I, 4b) es vorausgeschickt ist.

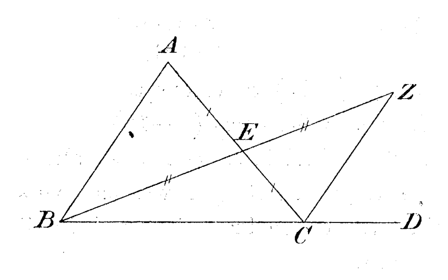
Demnächst Euklid I, 9—15. Dies sind Probleme (9—12) oder Theoreme (13—15), die sich nicht auf Dreiecke beziehen; sie können alle ohne Änderung der Beweisführung auf die Kugel übertragen werden. Obwohl man in den älteren sphärischen Werken von diesen Propositionen keine Spur findet, gebraucht Menelaos sie doch sehr oft ohne jeglichen Beweis. Bei Euklid dienen diese Sätze als Existenzbeweise, und wir müssen die Sache so betrachten, als ob Menelaos die Sätze dem Euklid entliehen, was für ihn hinreichend war, um die Existenz auf der Kugel zu sichern. Als Beispiel des gelegentlichen Gebrauches dieser Sätze mögen aus der Halleyausgabe folgende Stellen zitiert sein:

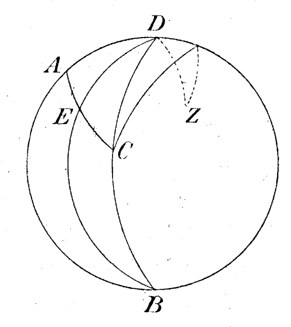
	vorausgesetzt im Menelaos:		
Euklid I:	Satz:	Seite:	Zeile:
9	I, 30	36	16 von unten
10	I, 24	29	21 von oben
11	I, 22	27	16 von oben
	II, 2	49	5 von unten
12	I, 32	41	11 von oben
		42	4 von oben
13	I, 11	11	20 von oben
15	I, 12	12	8 von oben.

Eine andere Konstruktion, die Menelaos oftmals ohne Beweis vorausgesetzt (z. B. Halleyausgabe II, 1. 2. 4 u. III, 7 Seite 92 Zeile 14—15 ff.), ist diese: *„Auf der Kugeloberfläche von einem gegebenen Punkt aufserhalb eines gegebenen Bogens einen Bogen zu ziehen, der mit dem gegebenen einen gegebenen Winkel bildet.“* Die entsprechende Konstruktion in der Ebene finden wir nicht in Euklids *Elementen;* sie ist aber in den *Daten* (Satz 30) von demselben Verfasser vorausgesetzt.

Betrachten wir ferner Euklid I, 16: *In jedem Dreieck, wo die eine Seite verlängert ist, wird der dadurch entstandene Aufsenwinkel gröfser als jeder einzelne der gegenüberliegenden Innenwinkel.“*

Indem Menelaos es versucht, den Beweis dieses Satzes zu übertragen, stöfst er (Figur 10) auf die Ungleichheit: $\angle ECD > ECZ$. Auf der Kugel gilt dies aber nur, wenn $\smile BE < 90^0$; denn nur dann wird $\angle ECZ$ ein Teil von $\angle ECD$ (Euklid, κοιναὶ ἔννοιαι 8). Der Satz läfst sich also nur mit verändertem Resultate übertragen. In dem Spezialfall, dafs das Dreieck





Figur 10.

gleichschenklig ist, $\smile AB = AC = 90^0$, sieht man aber sofort, dafs der Aufsenwinkel $180^0 \div C = B = 90^0$ wird. Wenn man die Figur auf der Kugel derjenigen in der Ebene analog ergänzt, erhält man offenbar das sphärische Zweieck. So kommt man auf ganz natürliche Weise zur Bildung des Zweiecks und zur Zerteilung des Problems in mehrere Fälle mit einem Grenzfall, wo $180^0 \div C = B$. Durch Figurenbetrachtung erhält man nun $\smile AC = AD$, wenn $\smile AB + AC = 180^0$, und umgekehrt, und ferner mit Benutzung des Satzes Menelaos I, 2, indem ja $\angle B = D$, dafs die Bedingung für $\angle 180^0 \div C = B$ eben $\smile AB + AC = 180^0$ wird. Wenn aber $\smile AB + AC \gtrless 180^0$, wird $\smile AC \gtrless AD$, und man braucht nur, um die zwei allgemeinen Fälle zu erhalten, den Satz Euklid I, 18: *„Einer gröfseren Seite gegenüber liegt ein gröfserer Winkel,“* zu übertragen; dann folgt ja, dafs $180^0 \div C \lesseqgtr B$, je nachdem $\smile AB + AC \gtreqless 180^0$. Erst mufs aber Euklid I, 18 für das sphärische Dreieck bewiesen werden. In der Ebene hängt dieser Satz von Euklid I, 16 ab, bei dessen Übertragung wir gerade verweilten. Deshalb wird Menelaos gezwungen, einen neuen Beweis für Euklid I, 18 zu suchen.

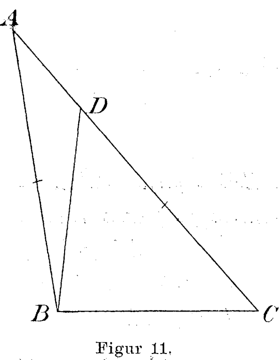
Er legt (Figur 11) nun die kleinere Seite AB auf die gröfsere AC, jedoch von C und nicht wie Euklid von A aus; dann wird: $AC = AB + AD > BD$ (Euklid I, 20), und wenn er Euklid I, 25 in Bezug auf die Dreiecke ABC und DCB, die zwei Seiten gleich, die dritte aber ungleich haben, in Anwendung bringt, folgt $\angle B > C$, und somit ist der neue

Beweis erledigt, allerdings mit Hülfe der noch nicht übertragenen Sätze Euklid I, 20 und 25.

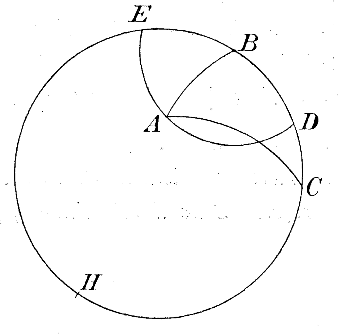
Indem nun Euklid I, 21 eine direkte Folge oder Erweiterung von 20 ist, und 24 und 19 die umgekehrten von 25 und 18 sind, stellt sich folgende Ordnung bei Menelaos als die natürliche dar:

Menelaos:		Euklid:	
5	analog	20	
6	„	21	
8 a	„	24	invers
8 b	„	25	
9	„	18	invers
7	„	19	
10	„	16.	

Sonderbar ist es allerdings, daſs 8 (Menelaos) zwischen die inversen Sätze 7 und 9 eingeschaltet ist. Dies erklärt sich vielleicht dadurch, daſs



Figur 11.



Figur 12.

Satz 7 im Menelaos durch 5 auf eine ähnliche Weise wie 6 bewiesen wird. Jedenfalls haben die Sätze Menelaos 5—10 folgende Ordnung:

Menelaos I, 5 = Euklid I, 20 (Figur 12):

In einem sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröſser als die dritte.

Seien gegeben: $\smile BC > BA$ und $\smile BC > AC$.

Zu beweisen: $\smile BA + AC > BC$.

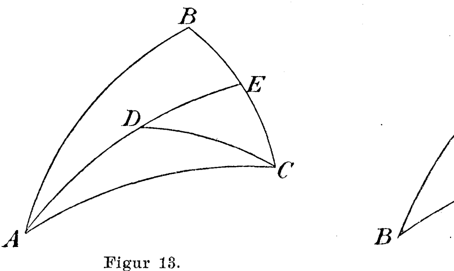
Man zieht den Kreis EAD mit B als Pol, also $\smile CA > CD$ [Theod. III, 1]; man addiert $\smile BA = BD$, und erhält $\smile BA + AC > BC$.[79])

79) Durch Verlängerung der Bogen AB und AC bis zum Schnitt in dem A entgegengesetzten Pol H wird man beweisen können, daſs die Summe der Seiten jedes sphärischen Dreiecks kleiner ist als ein gröſster Kreis der Kugel; vgl. oben Seite 20.

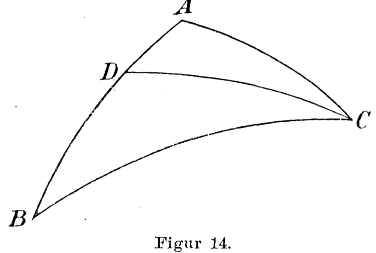
I, 6 = Euklid I, 19 (Figur 13):

Durch 5 erhält man:

$$\smile \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} > AE + EC > \boldsymbol{AD} + \boldsymbol{DC}.$$



Figur 13.



Figur 14.

I, 7 = Euklid I, 19 (Figur 14):

In jedem sphärischen Dreieck liegt eine gröfsere Seite einem gegebenen gröfseren Winkel gegenüber.

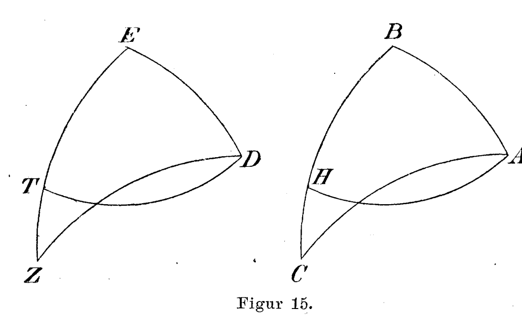
Sei gegeben: $\angle C > B$.

Zu beweisen: $\smile AB > AC$.

Sei $\angle BCD = B$ konstruiert (1), so wird $\smile BD = DC$ (3), folglich $\smile \boldsymbol{AB} = AD + DC > \boldsymbol{AC}$ (5).

I, 8 = Euklid I, 24—25 (Figur 15):

In zwei sphärischen Dreiecken, die zwei Seiten gleich haben, wird eine dritte gröfsere Seite durch einen gegenüberliegenden gröfseren Winkel bedingt.



Figur 15.

a. Sei gegeben: $\smile AB = DE$, $BC = EZ$ und $\angle B > E$.

Zu beweisen: $\smile AC > DZ$.

Seien gezogen die Kreise TD und HA mit E und B als Pole; dann wird die Bogendifferenz $TZ = HC$. Dagegen $\smile DT < AH$, weil $\angle B > E$ (def. 5 und prop. 1). Dann wird aber die Gerade und also auch der Bogen $AC > DZ$ [Theod. III, 1].

b. Sei gegeben: $\smile AB = DE$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AC > DZ$.

Zu beweisen: $\angle B > E$.

Dies wird durch die umgekehrte Schlufsreihe von **a.** bewiesen (vgl. Seite 45).

Anm. Vor dem Beweise 8a steht im Cod. Leid. 399, bei Gerhard und Halley, dafs der Beweis dieses Satzes sowie der des umgekehrten 8b wie in der

Ebene geführt werden kann. Wenn diese Bemerkung nicht eine spätere Interpolation ist, was nicht wahrscheinlich ist, liefert sie uns den direkten Beweis der Übertragung von Euklids Sätzen auf die Kugel.

I, 9 (invers von 7) = Euklid I, 18 (Figur 16):

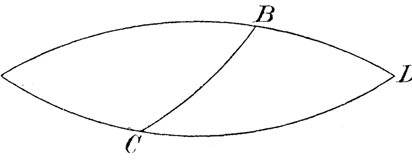
In jedem sphärischen Dreieck liegt ein gröfserer Winkel einer gegebenen gröfseren Seite gegenüber.

Sei gegeben: $\smile BC > BA$.

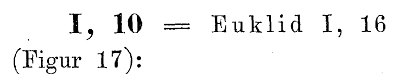
Zu beweisen: $\angle A > C$.

Figur 16.

Mache $\smile CD = AB$, dann wird $\smile BC = AB + BD > AD$ (5), und mit Anwendung von 8 auf die Dreiecke ACD und CAB wird bewiesen $\angle A > C$.



Figur 17.



I, 10 = Euklid I, 16 (Figur 17):

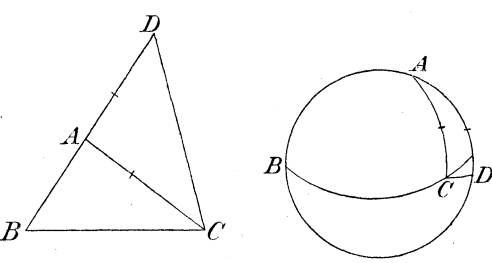
Ein Aufsenwinkel eines sphärischen Dreiecks ist $\lesseqgtr$ als der Innenwinkel am anderen Endpunkte der verlängerten Seite, je nachdem die Summe der zwei anderen Seite $\gtreqless$ als 180⁰ ist, und umgekehrt.

Sei gegeben: $\smile AB + BC \gtreqless 180^0$.

Zu beweisen: $\angle 180^0 \div C \lesseqgtr A$.

Indem D der dem Pol A entgegengesetzte Pol ist, wird $\smile AB + BC \gtreqless AD = 180^0$ [Theod. I, 11], d. h. $\smile BC \gtreqless BD$, wodurch $\angle BCD = 180^0 \div C \lesseqgtr D = A$ (9 und 2). Der umgekehrte Satz wird ohne Beweis postuliert.

Wie man sieht, ist Menelaos I, 5 nicht wie der analoge Satz I, 20 im Euklid bewiesen. Es kommt daher, dafs Menelaos beim Übertragen des Beweises aus der Ebene, in dem Falle wo $\smile BA + AC > 180^0$, auf ein Dreieck BCD stöfst (Figur 18), das nach seiner Definition kein sphärisches Dreieck ist; jedenfalls wird in den Definitionen in der Halleyausgabe ausdrücklich vorausgesetzt, dafs die Seiten des sphärischen Dreiecks kleiner als der Halbkreis sein sollen.



Figur 18.

Menelaos I, 6 dagegen ist durch 5 bewiesen, ganz wie der analoge Euklid I, 21 durch 20.

Für 7 (Euklid 19) hat Menelaos den Euklidischen Beweis gebrauchen, d. h. die Sätze 2 (Euklid 5) und 9 (von 7 unabhängig) zum Aufbau eines antithetischen Beweises benutzen können. Nichtsdestoweniger giebt er einen neuen Beweis durch 3 (Euklid 6) und 5 (Euklid 20). Für Menelaos, der ja doch gezwungen war, Euklid 20 so früh zu beweisen, wird der Beweis durch diesen einfacher. Hier wie immer, wo die Beweismittel der Übertragung wegen sich für Menelaos anders stellen, giebt er gern neue, einfachere Beweise; die antithetischen vermeidet er immer.

Bis jetzt haben wir die Sätze Euklid I, 1—16, 18—21 und 23—25 mit Menelaos parallelisiert. 17 und 22 haben wir übergangen.

Euklid I, 17: *„In jedem (ebenen) Dreieck ist die Summe von irgend zwei Winkeln kleiner als 180⁰“* folgt direkt aus Euklid 16, dem Satze über den Aufsenwinkel, der, auf die Kugel übertragen (Menelaos I, 10), drei Fälle giebt. Deshalb läfst sich 17 nicht übertragen; er gilt nicht auf der Kugel.

Euklid I, 22: *„Ein Dreieck von drei gegebenen Seiten zu konstruieren“* ist übertragbar, wenigstens wenn die Seiten (Bogen) gewisse Bedingungen erfüllen. Konstruktionen wie diese setzt Menelaos (vgl. oben) ohne Beweis voraus. Gerade diese braucht er aber nirgends.

Wir kommen nun zu Euklid I, 26. Seine verschiedenen Teile entsprechen den Sätzen 12, 14 und 16 im Menelaos. Dieser hat also seinen Satz 11 eingeschaltet, dem wieder Euklid 32 entspricht.

Euklid I, 32 ist der Hauptsatz über Dreiecke: *„Ein Aufsenwinkel ist der Summe der zwei gegenüberliegenden Innenwinkel gleich.“* Ein Versuch, den Beweis des Euklid zu übertragen, würde zu dem Beweise führen, dafs auf der Kugel der Aufsenwinkel kleiner als die Summe der Innenwinkel sei. Der Beweis aber, weil er im Euklid mit Hülfe der Parallelentheorie geführt wird, würde hier stereometrisch und nicht sphärisch werden, und eine Untersuchung über die von gröfsten und parallelen Kreisen gebildeten Dreiecke erfordern. Dies hat für Menelaos keinen Zweck. Er findet leicht einen Beweis auf der Kugeloberfläche, denn der Inhalt des Satzes bindet denselben auf der Kugel ganz naturgemäfs an den ähnlichen Satz 10, mit dessen Hülfe er leicht bewiesen wird. Somit haben wir:

Menelaos I, 11 = Euklid I, 32 (Figur 19):

In jedem sphärischen Dreieck ist:

$$\angle\, 180^0 \div C < A + B, \quad \textit{oder aber} \quad \angle\, A + B + C > 180^0.$$

Sei nämlich D der dem Pol A entgegengesetzte Pol, so erhält man $\angle\, A = D = DCE$ (1), ferner $\smile ED = EC$ (2) oder $\smile BE + EC < 180^0$. Zur Un-

gleichheit $\angle BCE < B$ (10) addiert man $\angle A$, wodurch $\angle BCE + A = BCE + DCE = \mathbf{180^0 \div C < A + B}$. Ferner durch Addition von $\angle C$ erhält man:

$$180^0 < A + B + C.$$ [80])

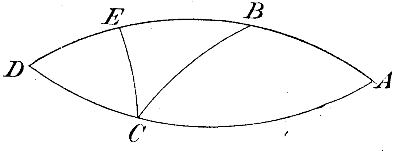
Euklid I, 26 ist in zwei Teile geteilt:

a. *Zwei Dreiecke, die eine Seite und die dieser anliegenden Winkel gleich haben, sind gleich.*

Dieser Satz mit Beweis kann auf die Kugel übertragen werden. Der analoge sphärische Satz im Menelaos (I, 14) ist jedoch auf eine andere, und zwar eine schwierigere Weise durch die eingeschalteten Sätze 12—13 bewiesen.

b. *Zwei Dreiecke, die einen Winkel, die gegenüberliegende Seite und noch einen Winkel gleich haben, sind gleich,*

entspricht Menelaos I, 16 mit 12 als Spezialfall. Der Euklidische Beweis kann nicht übertragen werden wegen seiner Abhängigkeit von Euklid I, 16, der auf der Kugel drei Fälle hatte. Einen neuen Beweis erhält Menelaos durch den 26a entsprechenden Satz (Menelaos I, 14). Der Spezialfall 12 ist aber offenbar aufgestellt wegen des Beweises von 13. Mit Anwendung von 12 und 13 zum Beweis von 14 wird die Ordnung der Sätze 12—16 ganz natürlich; es wäre aber leichter gewesen, mit 14 (wie im Euklid bewiesen) zu beginnen, dann 16, der nur von 14 abhängig ist, und zuletzt 12, 13, 15 folgen zu lassen. Wie dem auch sei, die schwierigere Methode steht da, und wir werden aus diesem und anderen Gründen gezwungen zuzugeben, daſs Menelaos von der Kongruenztheorie aus freier gearbeitet hat. Ihm ist diese Theorie das Ziel, dem Euklid dagegen nur ein Mittel; im Gegensatz zu Euklid hat er dann diese Theorie erschöpfend behandelt, wie es übrigens seine Gewohnheit ist (vgl. die Sätze I, 26—35). Gelegentlich bemerken wir, daſs Menelaos sich bemüht, die inversen Sätze mitzunehmen und die Dualitätsfälle aufzustellen (I, 17—18). In dieser Beziehung kontrastiert er mit Euklid, von dem es oft genug hervorgehoben worden ist, daſs er alles Überflüssige vermeidet. Der Unterschied der Ziele und der Entwickelungsstandpunkt der Mathematik zur Zeit der zwei Verfasser machen aber, daſs man sagen kann, beide seien in ihrem guten Rechte.



Figur 19.

Von Euklid 26 aus arbeitet Menelaos nur gelegentlich unter Euklids Einfluſs. Auch würde er nunmehr in den *Elementen* nur sehr wenig Sätze

80) Hier schaltet Maurolycus seinen Beweis, daſs $\angle A + B + C < 540^0$ ist, ein; vgl. oben Seite 31. I, 11 ist in Gerhards Übersetzung verstümmelt oder miſsverstanden. Ich folge deswegen der Halleyausgabe.

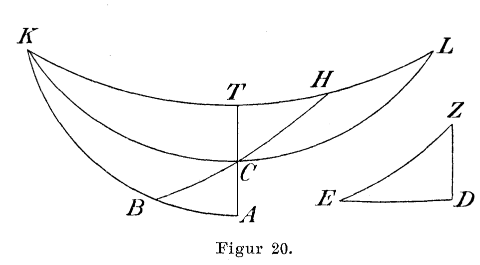
finden, die zur Übertragung geeignet wären. Weder die Theorie der Parallele und der Parallelogramme im 1. und 2., noch die Kreistheorie im 3. und 4., noch die Ähnlichkeitstheorie im 6. Buche sind zur Bildung sphärischer Dreieckssätze geeignet. Nachdem also Menelaos nach Euklid die sphärischen Fundamentalsätze gebildet, sucht er seine weiteren Sätze hie und da in der Geometrie der Ebene, oder er findet sie selbst. Was in jedem einzelnen Falle stattgefunden hat, läſst sich natürlich nicht leicht entscheiden. Bevor wir diese einzelnen Fälle von Abhängigkeit nachzuweisen versuchen, geben wir ein Résumé über die Kongruenzsätze.

Menelaos I, 12.

Sei gegeben: $\angle A = D = 90^0$, $\angle C = Z \lesseqgtr 90^0$, $\smile BC = EZ$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$, $\smile AB = DE$, $\angle B = E$.

Sei (Figur 20) $\smile CH = BC$, $\smile CT = DZ$, so wird $\triangle CHT \cong ZED$ (4), d. h. $\angle THC = E$, $\angle HTC = D = 90^0$ und $\smile HT = ED$. Da $\smile KT$ und KA beide senkrecht auf TA stehen, ist K Pol für TA [Theod. I, 13]. Also $\triangle KBC \cong LHC$ (4), ferner die Bogendifferenz $\boldsymbol{AB} = HT = \boldsymbol{DE}$, und $\angle \boldsymbol{B} = THC = \boldsymbol{E}$, und da $\triangle HCT \cong BCA$ (4), wird $\smile \boldsymbol{AC} = CT = \boldsymbol{DZ}$.

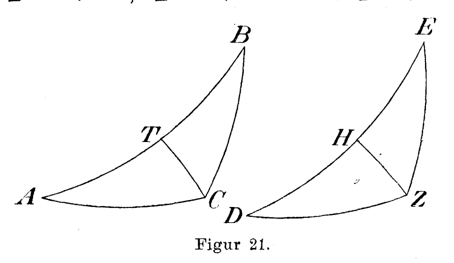


Figur 20.

I, 13 (Figur 21):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\smile BC = EZ$, $\smile AC = DZ$ und entweder $\angle B < 90^0$, $\angle E < 90^0$ oder $\angle B > 90^0$, $\angle E > 90^0$.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\angle C = Z$, $\angle B = E$.



Figur 21.

a. $\angle A = D \lesseqgtr 90^0$. Seien $\smile CT$ und HZ senkrecht auf $\smile AB$ und DZ getällt, so wird $\triangle ACT \cong DZH$ (12), d. h. $\smile CT = HZ$, dadurch $\smile BT = HE$ [Theod. II, 11] und addiert man $\smile AT = DH$, so wird $\smile AB = DE$. Dann folgt $\angle C = Z$ und $\angle B = E$ (4).

b. $\angle A = D = 90^0$. In diesem Falle kann man den letzten Teil des Beweises **a** von „$\smile CT = HZ$" aus benutzen.

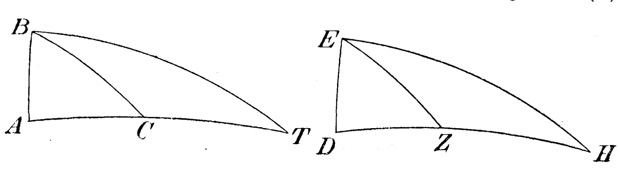
I, 14 = Euklid I, 26, 1 (Figur 22):

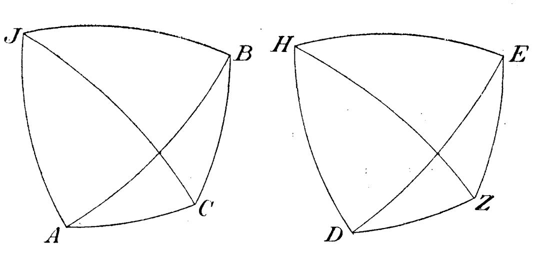
Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile AC = DZ$.

Zu beweisen: $\angle B = E$, $\smile AB = ED$, $\smile BC = EZ$.

a. $\angle A = D = 90^0$, *C und Z Pole für bezw. AB und ED.* Dann wird $\smile BC = EZ = 90^0$ und die betreffenden Dreiecke werden kongruent (4).

b. $\angle A = D = 90^0$, *C und Z nicht Pole für AB und ED.* Dann sind z. B. T und H diese Pole, so wird $\triangle CBT \simeq ZEH$ (13), denn $\smile CT = ZH$ (gleiche Bogendifferenzen), $\smile BT = EH = 90^0$, $\angle BCT = EZH$ (sie haben gleiche Supplementwinkel) und $\angle B$ u. $E < 90^0$. Weil also $\smile BC = EZ$, hat man $\triangle ABC \simeq DEZ$ (4 oder 12).





Figur 22.

c. $\angle A = D \gtrless 90^0$. Seien J und H Pole bezw. für AB und ED, so wird $\angle JAC = HDZ$, $\triangle JAC \simeq HDZ$ (4), d. h. $\smile JC = HZ$, $\angle JCB = HZE$, woraus, da $\angle JBC$ und HEZ beide entweder spitz oder stumpf sind, folgt $\triangle JBC \simeq HEZ$ (13), d. h. $\smile BC = EZ$, also $\triangle ABC \simeq DEZ$ (4).

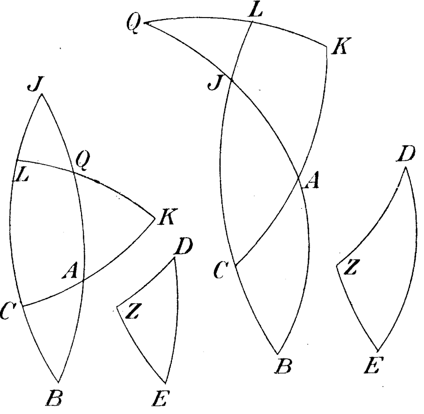
I, 15 (Figur 23):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AB = DE \gtrless 90^0$.

Zu beweisen: $\smile AC = DZ$.

a. $\smile AB = DE < 90^0$.

b. $\smile AB = DE > 90^0$.



Figur 23.

Sei J der dem Punkte B entgegengesetzte Kugelpol, und $\smile AK = DZ$, $\smile AQ = DE$, dann wird **a.** u. **b.** $\smile DE \lessgtr AJ$, ferner $\triangle AKQ \simeq DZE$ (4), also: $\smile KQ = ZE = BC$, $\angle K = Z = C$, woraus (da (13) für den Fall $\angle A = D = 90^0$ unbrauchbar ist):

$$\smile KL + LC = 180^0 = \smile BCJ. \tag{10}$$

a. subtrahiert man $\smile LC$, **b.** subtrahiert man $\smile JC$, so erhält man:

$$\smile BC + LJ = KL, \qquad \smile BC = KL + LJ,$$

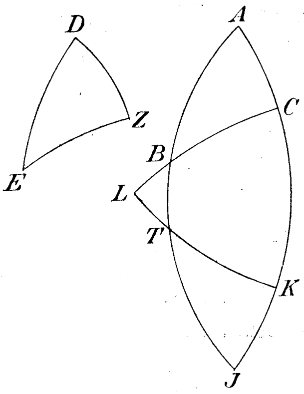
und weil $\smile BC = KQ$, wird $\smile LQ = LJ$ und $\angle Q = J = B$, d. h. $\triangle AKQ \cong ACB$ (4), oder $\smile \boldsymbol{AC = AK = DZ}$.

I, 16 = Euklid I, 26, 2 (Figur 24):

Sei gegeben: $\angle A = D$, $\angle C = Z$, $\smile BC = EZ$ und $\smile AB + DE \gtrless 180^0$.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\smile AC = DZ$, $\angle B = E$.

Sei J der dem Punkte A entgegengesetzte Kugelpol, $\smile JT = DE$ und $\smile JK = DZ$, dann wird, da $\angle D = J$, $\triangle DEZ \cong \triangle JTK$ (4), oder $\angle TKJ = EZD$, woraus $\smile CL = LK$ (3), $\smile TK = EZ = BC$, also die Differenzen $\smile LB = LT$, $\angle B = T$, d. h. $\triangle ABC \cong JTK \cong DEZ$ (14).



Figur 24.

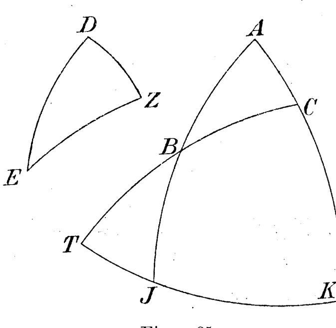
I, 17 (Figur 25), ungültig in der Ebene.

Seien gegeben: $\angle A = D$, $\angle B = E$, $\angle C = Z$.

Zu beweisen: $\smile AB = DE$, $\smile AC = DZ$, $\smile BC = EZ$.

Seien $\smile BT = ZE$ und $BJ = ED$; dann wird $\triangle DEZ \cong JBT$ (4), d. h. $\angle J = D = A$, $\angle T = Z = C$ und $\smile TJ = ZD$. Da nun $\angle C$ (als Aufsenwinkel des Dreiecks CTK) $= CTK$, hat man $\smile CK + KT = 180^0$ (10) und analog $\smile JK + KA = 180^0$; da also $\smile KA \div CK = KT \div JK$, bekommt man $\smile AC = TJ = ZD$ und ferner $\triangle ABC \cong DEZ$ (14).

Zu dem 13. Theorem des Menelaos finden wir bei Euklid keinen entsprechenden Satz; man kann ihn jedoch mit dem analogen Ähnlichkeitssatz in der Ebene VI, 7 vergleichen. Dieser zeigt uns die Methode, die Euklid wahrscheinlich verwendet hätte, um Menelaos I, 13 in der Ebene zu beweisen. Er würde sicher Euklid I, 17 und 32 gebraucht haben. Diese gelten nicht auf der Kugel, sodafs Menelaos aus Euklid VI, 7 jedenfalls keinen Beweis für Menelaos I, 13 hat ableiten können.



Figur 25.

Die beiden folgenden Sätze, Menelaos I, 18 und 19, stehen wie I, 8 in enger Verbindung mit der Kongruenztheorie. Sie sagen nämlich: wenn diese und jene Stücke zweier Dreiecke gleich sind, diese und jene ungleich, so werden

auch diese und jene ungleich. I, 18 (vgl. das Résumé oben Seite 28) mit einem langen dreiteiligen Beweis knüpft sich dualistisch an 17, hat aber kein Analogon in der Ebene.

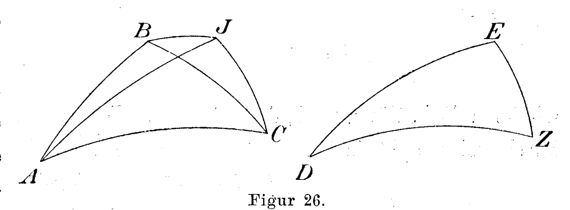
I, 19 (Figur 26):

Gegeben: $\smile AC = DZ$, $\angle A > D$, $\angle C < Z$ und $\angle B \geqq 90^0$, $\angle E \geqq 90^0$.

Zu beweisen: $\smile BC > EZ$, $DE > AB$.

Sei konstruiert $\triangle AJC \cong DEZ$. Weil nun die Winkel CBJ und AJB spitz sind, wird $\angle ABJ > AJB$, folglich $\smile \boldsymbol{AB} < AJ = \boldsymbol{DE}$ (7); durch denselben Schlufs $\angle BJC > CBJ$ und $\smile \boldsymbol{BC} > CJ = \boldsymbol{ZE}$.

Trotz unermüdlichen Suchens in den Werken von Euklid, Archimedes, Apollonios, Pappos u. a. ist es mir nicht gelungen, den analogen Satz in der Ebene zu finden. Der Satz, eine direkte Folge von Euklid I, 19 (Menelaos I, 7), ist somit wahrscheinlich eine Erfindung von Menelaos. Für Sätze dieser Art hatte er offenbar eine besondere Vorliebe. Ein Theorem derselben Art war es, welches nach Proklos' Bericht von ihm anders als von Euklid bewiesen wurde, nämlich Euklid I, 25 = Menelaos I, 8b. Jedoch ist der Beweis, den Menelaos für diesen Satz in der *Sphärik* gab, nicht derselbe, den er nach Proklos in der Ebene aufstellte, wie ein Vergleich zeigen wird.



Figur 26.

Sei nämlich gegeben: $\smile AB = DE$, $AC = DZ$, $BC > EZ$, so wird es auf folgende Weise bewiesen, dafs $\angle A > D$:

Euklids Elemente
I, 25 (Fig. 27).

Wäre $\angle A = D$, so wäre auch $BC = EZ$ [Eukl. I, 4 = Menel. I, 4a], was unmöglich ist. Wäre $\angle A < D$, so wäre auch $BC < EZ$ [Eukl. I, 24 = Menel. I, 8a], was unmöglich ist. Also $\angle \boldsymbol{A} > \boldsymbol{D}$.

Menelaos nach Proklos
(Figur 28).

Sei $BH = EZ$, $\angle HBT = E$ [Eukl. I, 23 = Menel. I, 1] und $BT = DE$, so wird $\triangle EDZ \cong BTH$ [Eukl. I, 4 = Menel. I, 4a], d. h. $HT = AC = DZ$, also $TK > AC > AK$, d. h. $\angle KAT > KTA$ [Eukl. I, 19 = Menel. I, 7]; addiert man $\angle BAT = BTA$ [Eukl. I, 5 = Menel. I, 2], hat man $\angle \boldsymbol{A} > BTK = \boldsymbol{D}$.

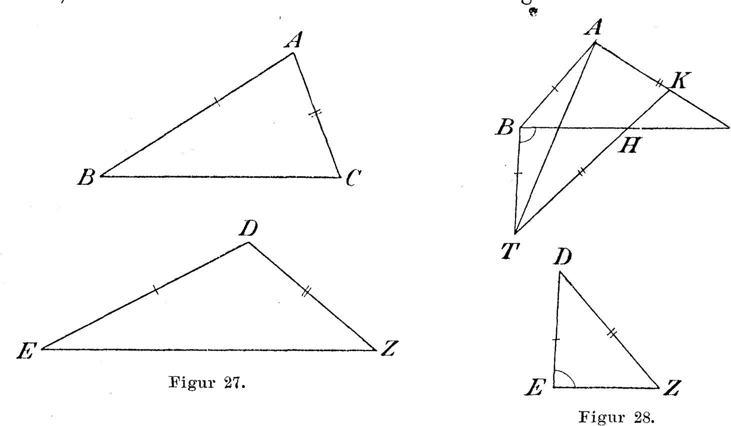
Menelaos' Sphärik
I, 8b (Figur 29).

Ziehe die Kreise HC und ZT mit bezw. A und D als Pole, so wird $\smile HB = ET$, und weil $\smile CB > EZ$, wird $\smile CH > ZT$ [Theod. III, 1], d. h.

$\angle \boldsymbol{A} > \boldsymbol{D}$.

Anm. Theod. III, 1 ist durch Euklid I, 47 u. III, 7 bewiesen. Letzterer ist von Euklid I, 20 = Menel. I, 5 abhängig.

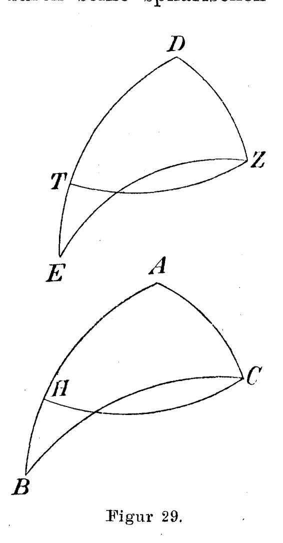
Euklid beweist also den Satz antithetisch durch den vorhergehenden (I, 24), letzteren durch I, 4, 5, 19, 23. Was Menelaos gethan, ist lediglich, daſs er I, 25 mit einem dem des Satzes 24 analogen Beweise versehen hat,



Figur 27.

Figur 28.

wieder mit Hülfe von I, 4, 5, 19, 23. Den neuen Beweis hat er also kaum durch seine sphärischen Untersuchungen gefunden; in der *Sphärik* giebt er ja dem kürzeren direkten Beweis durch den oft benutzten Theodosios III, 1 den Vorzug. Vielmehr gehört der von Proklos referierte Beweis einem Werk von Menelaos über die Geometrie der Ebene an, das als ein Ergänzungsbuch zu den *Elementen* gedacht war, und wo namentlich oder ausschlieſslich Dreieckstheoreme sich befanden, ein *Buch der Dreiecke,* wie es die Araber dem Menelaos beilegen. Daſs Proklos' Bericht falsch ist, ist an sich unwahrscheinlich, umsomehr, weil man von der *Sphärik* weiſs, daſs Menelaos immer die antithetischen Beweise vermeidet und analoge Sätze analog beweist, wie die Beispiele Menel. I, 4a u. b, 2 u. 3, 8a u. b, 7 u. 9 zeigen. Jedenfalls, wenn irgend jemand, beeinfluſst von den wenigen Fällen übereinstimmender Beweise im Euklid und Menelaos, vielleicht die intime Verwandtschaft der beiden Werke bezweifeln möchte, so kann er diesen Zweifel Proklos' Bericht gegenüber nicht gut aufrecht halten. — Gelegentlich bemerken wir, daſs es an sich interessant ist, zu wissen, daſs man schon zu Menelaos' Zeit die *Elemente* kritisierte und ergänzte.



Figur 29.

Der letzte Teil vom 1. Buch Euklids gab, sagten wir, zur Übertragung keinen Anlaſs. Nichtsdestoweniger können die Paralleltheoreme in der Ebene

sphärische Sätze ergeben, wenn wir überall für *„parallele Gerade“ „parallelen Kreis“* und für *„schiefe Gerade“ „gröfsten Kreis“* substituieren. Als Beispiel nennen wir Euklid I, 33, 1 und Theodosios II, 13, 2. Das Beispiel steht ganz isoliert, und Sätze, die man durch diese Art von Übertragung erhalten kann, fallen so in die Augen, dafs sie durch Übertragung aus der Ebene nicht entstanden zu sein brauchen.

Vom 3. Buch Euklids, welches die Kreise in der Ebene und die bei ihnen vorkommenden Winkel behandelt, können die meisten Sätze übertragen werden, indem man die Begriffe *„sphärisches Zentrum“* und *„sphärischen Abstand“* einführt[81]) und dann folgende Substitutionen macht:

„Kreis auf der Kugel“ für *„Kreis in der Ebene“*,
„Zirkelpol“ für *„Kreiszentrum“*,
„gröfster Kreis“ für *„Gerade“*.

Die so erhaltenen Theoreme sind der Art, wie wir sie im Theodosios und überhaupt in den Sphäriken vor Menelaos treffen. Folgende Beispiele dieser Art von Korrespondenz springen namentlich in die Augen.

Euklid III, 11.	Theodosios' Sphärik II, 4.
Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. III, 12. *Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.*	*Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, ὁ διὰ τῶν πολῶν αὐτῶν μέγιστος κύκλος γραφόμενος καὶ διὰ τῆς συναφῆς αὐτῶν ἐλεύσεται.*

III, 17.	II, 15.
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.	*Κύκλου δοθέντος ἐν σφαίρᾳ ἐλάσσονος τοῦ μεγίστου, καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ὅ ἐστι μεταξὺ αὐτοῦ τε καὶ τοῦ ἴσου τε καὶ παραλλήλου αὐτῷ, γράψαι διὰ τοῦ σημείου μέγιστον κύκλον ἐφαπτόμενον τοῦ δοθέντος κύκλου.*

Vielleicht hat die ältere Sphärik auf diese Weise durch Übertragung einige Propositionen errungen. Weil sie sich nicht auf Dreiecke beziehen,

81) Dafs in der That diese Begriffe dem Theodosios bekannt waren, zeigen die Definitionen in seiner *Sphärik* I, def. 4—5.

haben sie für Menelaos keinen Zweck; das in dieser Beziehung Notwendige findet er auch bei seinen Vorgängern.

Euklids 4. Buch kann wie das dritte übertragen werden; von einer solchen Übertragung treffen wir jedoch keine Spur.

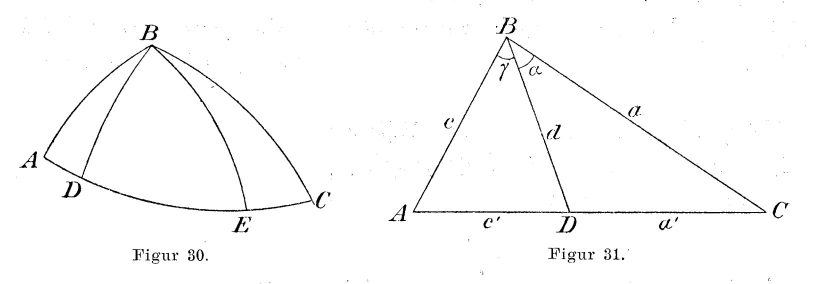
Euklids letztes geometrisches Buch, das 6., behandelt ähnliche Figuren; solche existieren nicht auf der Kugel. Wahrscheinlich hat doch die Transversalentheorie, namentlich Euklid VI, 2, die Idee zu den sphärischen Sätzen Menelaos I, 23—25 gegeben (vgl. oben Seite 30).

Mit Ausnahme von Menelaos I, 20—22, die nur auf der Kugel gelten, restiert uns vom ersten Buch lediglich die Satzgruppe 26—35. Die Theoreme dieser Gruppe vergleichen die drei Elementenpaare (siehe Figur 30):

$$\smile AD \quad \text{und} \quad EC$$
$$\angle ABD \quad \text{und} \quad EBC$$
$$\smile BA + BC \quad \text{und} \quad BD + BE.$$

Vorausgesetzt, dafs $\smile BC > BA$, und dafs die Elemente eines dieser Paare gleich sind, beweist man die Gleichheit oder die Ungleichheit der anderen zwei. Je nachdem $\smile BA + BC \gtreqless 180^0$ ist, bekommt man verschiedene Fälle.

Ein Scholion von Halley im Schlufs des ersten Buches fügt hinzu: *„Die Sätze 30—35 gelten auch in der Ebene; denn die kleinsten sphärischen Dreiecke haben die Form und Natur der ebenen Dreiecke."* Der Herausgeber hat sagen wollen, dafs die Fälle $\smile BA + BC < 180^0$ entsprechende Resultate in der Ebene haben, nämlich:



Figur 30. Figur 31.

Spezialfall (Figur 31):

Gegeben:	Zu beweisen:	entsprechen im Men.
1. $c' = a'$	$\angle\gamma > \alpha,\quad a + c > 2d$	I, 30
2. $\angle\gamma = \alpha$	$a + c > 2d,\quad c' < a'$	I, 30
3. $a + c = 2d$	$\angle\gamma > \alpha,\quad c' > a'$	I, 31.

Voraussetzung: $a > c$.

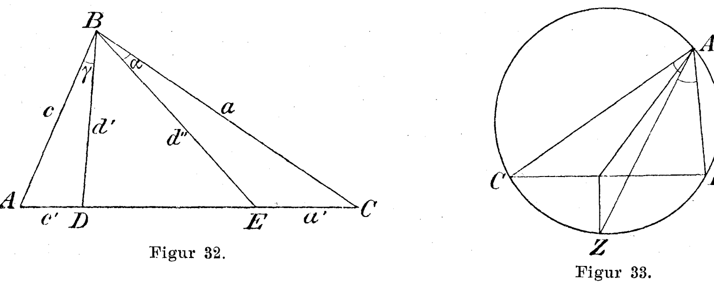
Allgemeiner Fall (Figur 32):

Gegeben:	Zu beweisen:	entsprechen im Men.
4. $c' = a'$	$\angle\gamma > \alpha$, $a + c > d' + d''$	I, 33
5. $\angle\gamma = \alpha$	$a + c > d' + d''$, $c' < a'$	I, 34
6. $a + c = d' + d''$	$\angle\gamma > \alpha$, $c' > a'$	I, 35.

Voraussetzung: $a > c$.

Finden wir nun diese Theoreme in der Geometrie der Ebene vor Menelaos? Es ist mir nicht gelungen, sie als Ganzheit zu finden; nur hie und da habe ich ihrer verschiedene entweder als Sätze oder Voraussetzungen angetroffen, nämlich:

Euklid, Optik 4[82]) „*Τῶν ἴσων διαστημάτων καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντων τὰ ἐκ πλείονος διαστήματος ὁρώμενα ἐλάττονα φαίνεται*“, d. h. es wird



Figur 32.

Figur 33.

hier dasselbe bewiesen, wie im obenerwähnten Falle 1a, Menelaos I, 30, 2 entsprechend.

Euklid, Optik 7 „*Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ὄντα ἴσα μεγέθη μὴ ἐφεξῆς ἀλλήλοις τεθέντα καὶ ἄνισον διεστηκότα τοῦ ὄμματος ἄνισα φαίνεται*“, ist eine Erweiterung des vorigen Satzes für den Fall, wo die Linienstücke, die betrachtet werden, nicht kontinuiert sind, also 4a oder Menelaos I, 33, 1.

Euklid, *περὶ διαιρέσεων* **28**[83]): „Die Figur *ABZC* (Figur 33) mittels einer Geraden in zwei gleiche Teile zu teilen.“ Die Figurenkonstruktion zeigt uns, daſs Euklid 1a und 2a der obigen Fälle gekannt hat.

Archimedes, *περὶ ἑλίκων* **13.**[84]) Hier wird vorausgesetzt, daſs das Doppelte der Halbierungsgeraden eines Dreiecks kleiner als die Summe der zwei einschlieſsenden Seiten ist, d. h. 2a oder Menelaos I, 30, 3. Der Fall 2b (Men. I, 30, 1) ist als bekannt vorausgesetzt in

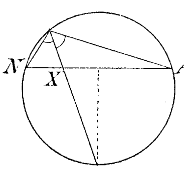
82) *Euclidis opera omnia,* ed. Heiberg VII, p. 6 ff.

83) Woepcke im Journal asiatique 1851, p. 240.

84) *Archimedis opera,* ed. Heiberg II, p. 57, Note 2; vgl. Heiberg, *Einige von Archimedes vorausgesetzte elementare Sätze*, Zeitschr. f. Math. u. Physik **24**, hist.-litter. Abt., p. 178 unten.

Apollonios, *κωνικά* **VI, 32**[85]) (Halleyausgabe p. 90), wo vorausgesetzt wird $NX < XA$ (Figur 34).

Die obengenannten Fälle 1a, 2, 4a haben wir also als Theoreme (Euklid) oder Voraussetzungen (Archimedes und Apollonios) nachweisen können. Möglicherweise hat ein Werk existiert, wo diese Fälle bewiesen wurden, vielleicht vor Euklid, jedenfalls vor Archimedes. Unwillkürlich müssen wir hier an die voreuklidischen Elemente denken, deren Inhalt wir ja gar nicht kennen; ohne Zweifel ist es nicht das geringste Verdienst des Euklid, dafs er solche Satzreihen, die ohne prinzipales Interesse waren, aus dem Bereich der Elemente verwiesen hat.



Figur 34.

Wahrscheinlich ist es doch Menelaos selbst, der die Elemente $a + c$ und $\smile BD + BE$ in die Untersuchung hineingezogen hat; denn diese Figurenteile hatte er im zweiten Buch (II, 10) nötig, und diesem Umstand verdanken wir offenbar die ganze Satzgruppe 26—35 im ersten Buche.

Die langatmigen sphärischen Beweise dieser Sätze können aus der Ebene übertragen worden sein. Durch Euklid VI, 3 erhält man jedoch in der Ebene viel leichtere Beweise. Die Beweise in der Optik geben in dieser Beziehung keinen Aufschlufs.

Als Erfolg der Untersuchung über Menelaos' 1. Buch ergiebt sich:

„Menelaos hat den Begriff 'sphärisches Dreieck' in die Mathematik eingeführt, definiert und demselben einen Namen gegeben (τρίπλευρον). Mit Hülfe des ersten Buches der Euklidischen Elemente hat er die elementare Lehre dieser Dreiecke gegründet. Zu diesem Zweck hat er die übertragbaren Dreieckssätze aus Euklid auf die Kugel übertragen. Die Anzahl dieser Sätze hat er mit den reziproken und dualistischen Sätzen ergänzt. Die Kongruenztheorie hat er im Gegensatz zu Euklid erschöpfend behandelt. Was die Beweisführung betrifft, hat er eher von Euklid gelernt, als er ihm gefolgt ist. Euklids antithetische Beweise vermeidet er immer und zieht die analogen vor. Sonst hat er immer den leichtesten Beweisen den Vorzug gegeben und deshalb oft Sätze aus den früheren sphärischen Werken vorausgesetzt. Ein besonderes Interesse hat er für die Gattung von Sätzen, die wir in Euklid I, 24—25 finden. In Verbindung mit seiner Arbeit über die Sphärik steht eine Arbeit über ebene Dreiecke, die als eine Ergänzung des ersten Buches Euklids dienen sollte, und wo er auch die Euklidischen Sätze

---

85) *Apollonii Pergaei conica,* ed. Halley, Oxford 1710.

gelegentlich mit neuen Beweisen versehen hat. — Das ganze erste Buch des Menelaos ist als ein originelles zu betrachten."

Bei Menelaos' nächstem Nachfolger, Ptolemaios, kann man erwarten, die Sätze dieses ersten Buches als Voraussetzungen zu finden.

In dieser Erwartung wird man nicht getäuscht. Als Beispiele nennen wir die Sätze Menelaos I, 2, 4a u. 4b, deren Gebrauch in Ptolemaios' *Syntaxis* deutlich genug ist.[86]) Deswegen hegen wir kein Bedenken, zu behaupten, dafs Menelaos' *Sphärik* für das Studium der *Syntaxis* von Bedeutung war, was Tannery zu leugnen scheint.[87])

Pappos referiert, wie oben erwähnt, Menelaos I, 5, 6, 30 u. 33[88]); Theon von Alexandria I, 4, 13 u. 14.[89]) Letzterer gebraucht aufserdem oft Sätze aus Menelaos' erstem Buch ohne Quellenangabe. — Überhaupt, wo man den Namen τρίπλευρον im Ptolemaios, Pappos und Theon findet, bezieht sich der Text meistens auf eine Anwendung von Menelaos' erstem Buch.

Fünftes Kapitel.

Menelaos' zweites Buch.

a. Übersicht des zweiten Buches.

Dieses Buch, das mathematisch ganz ohne Bedeutung ist, bietet dagegen vielerlei Interessantes, wenn man es mit den älteren sphärischen oder astronomischen Werken vergleicht. Deshalb brauchen wir den Inhalt nur kurz zu referieren, um ihn dann mit dem Inhalt anderer Werke vergleichen zu können. Entweder müssen wir nämlich mehrere der „mittleren Bücher" in unsere Untersuchung mit hineinziehen, oder aber können wir ebenso gut Menelaos' zweites Buch stillschweigend übergehen. Um nicht die Untersuchung zu weit auszudehnen, möchten wir sie gern auf die Sphärik beschränken und die Astronomie ausschliefsen. Das geht aber nicht. Die

86) *Ptolemaei Syntaxis math.*, ed. Heiberg I, p. 96, 24 — 119, 7 — 148, 3 — 149, 3 — 155, 2 — 161, 18 — 163, 15.

87) Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, p. 35, Note 2.

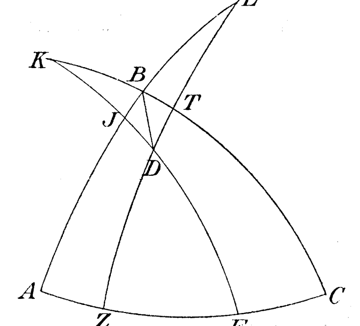
88) Pappus, ed. Hultsch, p. 476; vgl. oben Seite 4 und unten Seite 55.

89) Vgl. oben Seite 5 und 22 ff.

griechische Sphärik und Astronomie sind, wie wir sehen werden, so eng mit einander verbunden, daſs man sie nicht einzeln behandeln kann. Es ist jedoch nicht unsere Absicht, eine erschöpfende Geschichte der griechischen Sphärik zu geben; dazu fehlen auſserdem genügende Ausgaben der betreffenden Werke. Wir beschränken uns auf die Hauptprobleme, die wir von einem Verfasser auf den anderen verfolgen, um somit die Entwickelung bis Ptolemaios klar legen zu können. Zuerst aber resumieren wir den Inhalt des zweiten Buches Menelaos'.

II, 1—2: *„Von einem beliebigen Punkte der einen Seite eines sphärischen Dreiecks einen gröſsten Kreisbogen zu ziehen, der mit der Basis einen Winkel bildet, einem der an der Basis liegenden Dreieckswinkel gleich."*

Diese Konstruktion ist für verschiedene Gattungen von Dreiecken ausgeführt, für solche nämlich, wo dieses Problem den Existenzbeweis der in den folgenden Theoremen behandelten Figuren bildet.



Figur 35.

II, 3. Seien (Figur 35) im Dreieck ABC, wo $\angle B \leqq 90^0$, $\smile AB < 90^0$ u. $\smile BC < 90^0$, gezogen die Bogen JDE und TDZ (J auf AB, T auf BC), so daſs $\angle DZE = A$ u. $\angle DEZ = C$.

Dann ist zu beweisen, daſs:

$\smile BT < DJ$ und $\smile BJ < DT$.

Beweis: Man verlängert die Bogen AB und ZT, CB und EJ bis zum Schnitt bezw. in L und K. Dann wird $\smile LA + LZ = 180^0$ (I, 10) oder $\smile BL + LD < 180^0$, wodurch $\angle JBD > BDL$ (I, 10). Analog wird $\angle TBD > BDK$ d. h. $90^0 \geqq B > TDJ$ $(= D)$, oder $\angle B + D < 180^0$. Weil nun im Viereck $BTDJ$ die Winkelsumme $> 4R$ (durch Erweiterung von I, 11), wird $\angle T + J > 180^0$, und somit (durch Erweiterung von I, 19)

$$\smile \boldsymbol{BT < DJ}, \quad \smile \boldsymbol{BJ < DT} \quad \text{q. e. d.}$$

Es ist dies der Fundamentalsatz des zweiten Buches, mit dessen Hülfe alle die folgenden bewiesen werden.

Die Sätze **II, 4—9** können wir in Bezug auf eine und dieselbe Figur (36) so zusammenfassen:

Vorausgesetzt, daſs im sphärischen Dreieck ABC mit den Seiten a, b, c

1. $\angle B \leqq 90^0$, $\angle A = A_1 = A_2 = A_3$ und $a < 90^0$, $c < 90^0$,

so wird,

wenn:	auch:
$b_1 = b_2, \quad a \geqq c$	$a_1 < a_2$ und $c + c_3 < c_1 + c_2$ [II, 4^2 u. 5],
$a_1 = a_2$	$b_1 > b_2$ und $c + c_3 \lesseqgtr c_1 + c_2$,
	je nachdem $a \gtreqless c$ [II, 4^1, 6 u. 7^3],
$c + c_3 = c_1 + c_2$	$b_1 > b_2$ und $a_1 \gtrless a_2$,
	je nachdem $a \gtrless c$ [II, $7^{1, 2 \text{ u. } 4}$].

2. Wenn $\angle A < 90^0, \quad \angle C < 90^0, \quad \angle A = A_1 = A_2 = A_3,$

$$a < 90^0, \quad c < 90^0 \quad \text{und} \quad c \geqq a,$$

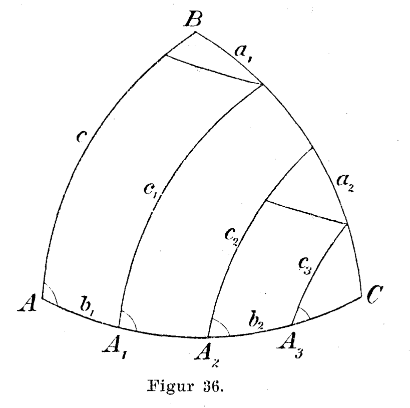
so hat man für $a_1 = a_2$, dafs $b_1 > b_2$ [II, 9].

3. Wenn $\angle B \leqq 90^0, \quad \angle A_2 = A, \quad 90^0 \geqq a > c,$

$$a_1 = a_2 \quad \text{und} \quad b_1 = b_2,$$

so hat man, dass $\angle A_3 > A$, wenn $\angle A_1 = A$, und
dass $\angle A_1 < A$, wenn $\angle A_3 = A$ [II, 8].

Es ist dies eine bunte Mischung von Sätzen, die aufserdem so wenig erschöpfend behandelt sind, dafs sie nicht einmal eine zusammenhängende Theorie bilden. Man ahnt sofort, dafs es mit diesen Sätzen eine ganz besondere Bewandtnis haben mufs; und so ist es in der That. Das, worauf es ankommt, wird erst in den letzten 4 Sätzen (10—13) bewiesen; dieselben sind eigentlich nur Wiederholungen der oben zitierten, die diesmal nur nicht als Dreieckssätze formuliert werden. II, 10, 12 u. 13 können wir so zusammenfassen:



Figur 36.

Seien (Figur 36) gegeben die gröfsten Kreise AC und CB, $\angle C$ spitz, und seien auf BC ($\leqq 90^0$) genommen zwei gleiche Bogen $a_1 = a_2$. Durch die Endpunkte dieser Bogen a_1 und a_2 sind gezogen Kreise parallel mit AC und ferner gröfste Kreise, die

II, 10 senkrecht auf AC stehen, also durch den Pol der Parallelkreise ($\perp \smile AC$) gehen, oder

II, 12 mit AC gegen C gleiche stumpfe Winkel bilden, also einen Parallelkreis, kleiner als den von AB berührten, tangieren, oder

II, 13 mit AC gegen C gleiche spitze Winkel bilden, also einen Parallelkreis, gröfser als den von AB berührten, tangieren, aber auf entgegengesetzter Seite.

In allen drei Fällen wird bewiesen, daſs die Bogen auf AC ungleich werden und zwar: $b_1 > b_2$ [II, 6 u. 9],

ferner daſs die Differenzen der Bogen zwischen AC und BC ungleich werden, und zwar:

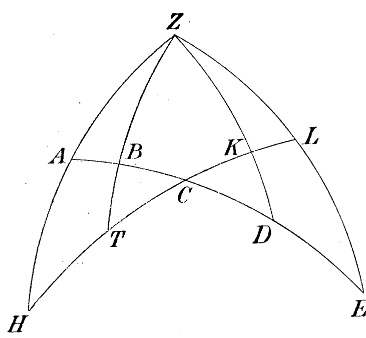
$$\left.\begin{array}{l}\text{in 10 für } A = 90^0 \\ \text{in 12 für } A > 90^0\end{array}\right\} c \div c_1 < c_2 \div c_3 \text{ (II, 6)}$$

$$\text{in 13 für } A < 90^0 \quad c \div c_1 > c_2 \div c_3 \text{ (II, 9)}.$$

Satz **II, 11** endlich sagt:

Wenn (Figur 37) zwei gröſste Kreise AE und HL einander in C schneiden, und auf dem Kreise AE die Stücke $CB = CD$ (B auf AC, D auf CE), ferner auch die Stücke $AB = ED$, und wenn durch A, B, D, E vier gröſste Kreise gezogen werden, die durch den Pol Z entweder von AE oder von HL gehen, so schneiden diese gröſsten Kreise in beiden Fällen auch von HL gleiche Stücke ab, also $HT = KL$.

Bei Menelaos diese 4 Sätze (II, 10—13) zu treffen, die ganz im Gegensatz zu allen seinen anderen Sätzen nicht als Dreieckstheoreme formuliert sind, ist in dem Grade auffällig, daſs wir unwillkürlich hier astronomische Anwendungen und Wiederholungen aus älteren Werken zu spüren glauben. So verhält es sich in der That auch. Um die Verhältnisse klar zu legen, müssen wir uns folgende Thatsachen vor Augen halten.



Figur 37.

1. Theodosios' *Sphärik* III, 5 fällt mit Menelaos II, 10^2, Theodosios III, 6 mit Menelaos II, 10^1 zusammen, nur daſs bei Theodosios die Bogen a_1 und a_2 (siehe Fig. 36) kontinuiert liegen. Diese Beschränkung findet aber bei Theodosios III, 9 nicht statt, welcher Satz somit ganz mit Menelaos II, 10^1 zusammenfällt. — Theodosios III, 7—8 fallen mit Menelaos II, $12^{1,2}$ zusammen, doch mit der eben erwähnten Beschränkung. — Menelaos II, 11 ist eine Erweiterung von Theodosios III, 13. — Die Beweise dieser Sätze sind bei Theodosios und Menelaos ganz verschieden, bei ersterem meistens sehr langatmig.[90])

90) Menelaos weist selbst darauf hin und verspricht die Darstellung des Theodosios verbessern zu wollen. Eine Übersetzung der betreffenden Stelle findet sich unten Seite 64—65.

2. Die, wie wir sehen werden, in der Geschichte der Astronomie wichtigsten dieser Sätze, Theodosios III, 7—8 (Menelaos II, 12) setzt schon Euklid (in den *φαινόμενα*) als bekannt voraus, um damit zwei astronomische Hauptsätze zu beweisen.[91])

3. Pappos giebt im 6. Buche seiner *συναγωγή* einen umfangreichen Kommentar zu mehreren der Werke des *μικρὸς ἀστρονομούμενος*.[92]) Er fängt hier mit Theodosios' *Sphärik* an, und als Hülfssätze zu diesem Werke führt er gleich an:

Pappos VI, 1: *„Wenn auf der Oberfläche einer Kugel drei gröfste Kreise, deren jeder kleiner als ein Halbkreis ist, einander schneiden, ist die Summe je zweier gröfser als der dritte."*

Dieser Satz ist aber mit Menelaos I, 5 identisch. Den Beweis führt Pappos im Gegensatz zu Menelaos auf Euklid, *elem.* XI, 20 zurück; letzteren haben wir auch oben mit Menelaos I, 5 identifiziert.[93]) Nun folgen die schon mehrmals erwähnten Worte: *„Eine solche Figur nennt in der Sphärik Menelaos τρίπλευρον."*

Pappos VI, 2—4 sind identisch bezw. mit Menelaos I, 6, 30^3 u. 33. Die Beweise führt Pappos wie Menelaos.

Danach sagt Pappos: *„Wenn dieses bewiesen ist, können wir Theodosios III, 5 anders beweisen."* Dieser neue Beweis folgt als Pappos VI, 5. VI, 6 beginnt mit den Worten: *„Beweisen wir es, wenn die gleichen Bogen nicht kontinuiert sind; dies bewies nämlich Theodosios nicht."* Der Beweis folgt und ist mit dem in Menelaos II, 10^2 identisch.

Mit anderen Worten: Pappos hat Menelaos' Sphärik wie die des Theodosios vor sich gehabt; er hat erkannt, dafs Menelaos den Hauptsatz III, 5 des Theodosios verallgemeinert und mit einem neuen Beweise versehen hat, und durch die notwendigen Excerpte aus Menelaos hat er seinen Schülern beim Studium von Theodosios' Sphärik dies klar gemacht.

4. Erinnern wir uns aufserdem des schon oben erwähnten Berichtes[94]) des Pappos, dafs die in Euklids *φαινόμενα* behandelten Probleme über Auf- und Untergang der Tierkreiszeichen auch von Menelaos behandelt und von Hipparch numerisch gelöst wurden, so schliefsen wir mit Grund folgendes: Menelaos' zweites Buch behandelt eigentlich ein astronomisches Problem, das man auf die Zeit des Euklid zurückführen kann. Dasselbe ist in den *φαινόμενα* erörtert und von Hipparch trigonometrisch gelöst. Auch Me-

91) Vgl. unten Seite 57 ff.

92) Pappos, ed. Hultsch, p. 474—632.

93) Vgl. oben Seite 4 und 31.

94) Vgl. oben Seite 4 und unten Seite 70.

nelaos hat eine *astronomische* Abhandlung darüber verfaſst. — Das Problem veranlaſste sehr früh die Aufstellung sphärisch-astronomischer Sätze, die dann in rein mathematischer Form in Theodosios' *Sphärik* reproduziert wurden und zuletzt den Gegenstand des *ganzen* zweiten Buches von Menelaos' *Sphärik* bildeten, wo mit Hülfe der neugefundenen sphärischen Dreieckssätze die alten Sätze neu bewiesen werden.

Gelegentlich können wir schon hier noch mehr Schlüsse ziehen, von denen wir später Gebrauch machen werden, nämlich:

1. Zu Pappos' Zeit war Theodosios' *Sphärik* das klassische, das allgemeine sphärische Lehrbuch, während die schwerer zugängliche *Sphärik* des Menelaos wahrscheinlich nur von den weiter vorgeschrittenen gebraucht wurde.

2. Es besteht wahrscheinlich ein kausaler Zusammenhang zwischen den Problemen, die wir von Euklids *φαινόμενα* durch Theodosios bis zu Menelaos verfolgen können, und der ältesten sphärischen Trigonometrie.

Wir werden deswegen versuchen, zuerst den Umfang der älteren Sphärik möglichst genau festzustellen, um dann die weitere Entwickelung bis auf Ptolemaios klar zu legen, weil wir erst dadurch eine sichere Grundlage erhalten werden für die Untersuchung der viel wichtigeren Frage, worauf uns Menelaos' 3. Buch hinweist, der Erfindung der Trigonometrie.

b. Die voreuklidische Sphärik.

Nokk[95]) hat zuerst bemerkt, daſs Euklid in den *φαινόμενα* mehrmals sphärische Sätze vorausgesetzt hat, und daſs sie fast alle sogar mit demselben Wortlaut, mit dem sie Euklid zitiert, im Theodosios sich finden. Er schlieſst daraus, daſs eine *voreuklidische Sphärik* existiert haben muſs. In der Autolykosausgabe und anderswo hat Hultsch[96]) bewiesen, daſs mit Autolykos, einem älteren Zeitgenossen von Euklid, ganz dasselbe der Fall ist. Was die *φαινόμενα* betrifft, so hat Heiberg[97]) sie unabhängig von Nokk aufs neue eingehend erörtert. Die beiden letzten Forscher sowie Tannery[98]) stimmen darüber überein, daſs die *voreuklidische Sphärik* der Schule in Kyzikos oder gar deren Gründer, dem berühmten Eudoxos, zuzuschreiben ist.

95) A. Nokk, *Über die Sphärik des Theodosios,* Karlsruhe 1857.

96) Fr. Hultsch, *Bericht der phil.-hist. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften* 1885, p. 167—174; *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, Neue Jahrbücher 1883, p. 415—420; Autolycus, ed. Hultsch, Leipzig 1885, Praefatio, p. XI ff.

97) J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid,* Leipzig 1882, p. 41—52.

98) P. Tannery, *La géométrie grecque,* p. 133—134; *L'astronomie ancienne,* p. 57 ff.; Rezension im Bulletin des sciences mathématiques 2e série, X, 1, Paris 1886, p. 195 ff.

Euklids φαινόμενα.

Aus diesem Werke zitiert Heiberg eine Reihe von Anwendungen sphärischer Sätze und stellt die entsprechenden Sätze des Theodosios daneben. So konstatiert er, daſs Theodosios I, 1, 12, 13, 15; II, 5, 9, 13, 15, 17, 18, 19, 22; III, 7 von Euklid wörtlich zitiert sind. Zu diesem Vergleich wendet Heiberg jedoch nur φαινόμενα 1—8 an, weil der Gregoryausgabe, wie er nachweist, eine jüngere, wahrscheinlich von Theon aus Alexandria herrührende Redaktion zu Grunde liegt, während im Codex Vindob. graec. 103 eine sehr abweichende, aber weit ursprünglichere Redaktion vorliegt. Diese Handschrift hat Heiberg kollationiert; er hat sie aber nicht benutzen wollen, ohne sie herauszugeben. Daher kommt es, daſs er die Vergleiche, wozu die Sätze 9—18 Anlaſs geben können, nicht mitgenommen hat, weil eben hier die zwei Redaktionen ganz von einander abweichen. Seine Kollation hat er mir freundlichst zur Verfügung gestellt, damit ich das Material zum Feststellen des Inhalts der *voreuklidischen Sphärik* ergänzen kann.

Auſser den von Heiberg zitierten Stellen gebe ich also aus seiner Kollation des Codex Vindob. gr. 103 folgende:

c. Vindob. prop. 12 (Figur 38).

. . . ἐπεὶ οὖν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ $\overline{αβγ}$ κύκλου τινὸς τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ τοῦ $\overline{ρστ}$ ἐφάπτεται· ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος ὁ $\overline{αηγ}$ μείζων[1]) ἐφάπτεται, ἢ ὧν ὁ $\overline{αβγ}$ ἐφάπτεται; καὶ ἀπειλημέναι[2]) εἰσὶν ἴσαι περιφέρειαι αἱ $\overline{αθ}$, $\overline{θκ}$, $\overline{κη}$ ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων τοῦ $\overline{βηλ}$· διὰ τῶν $\overline{θ}$, $\overline{κ}$ σημείων μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν οἱ $\overline{σφ}$, $\overline{τχ}$ ἐφαπτόμενοι τοῦ $\overline{ρστ}$ κύκλου, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς $\overline{αβγ}$ ἐφήπτετο, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν $\overline{σ}$, $\overline{τ}$ ἐπαφῶν ἡμικύκλια ὡς ἐπὶ τὰ $\overline{κ}$, $\overline{θ}$ μέρη τῷ $\overline{ραβ}$ ἡμικυκλίῳ τοῦ ὁριζόντος, ἐφ' οὗ ἐστιν ἡ συναφὴ τοῦ λοξοῦ κύκλου, ἡ μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγί-

Theodosios III, 8.

Ἐὰν ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος τινὸς κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ἐφάπτηται, ἄλλος δέ τις μέγιστος κύκλος, λοξὸς ὢν πρὸς τοὺς παραλλήλους, μειζόνων ἐφάπτηται, ἢ ὧν ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο· ἔτι δὲ αἱ ἁφαὶ ὦσιν ἐπὶ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου· ἀπὸ δὲ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἴσαι περιφέρειαι ἀποληφθῶσιν ἑξῆς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· διὰ δὲ τῶν γινομένων σημείων γραφῶσι μέγιστοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι, οὗ καὶ ὁ ἐξ ἀρχῆς ἐφήπτετο, ὁμοίας ἀφαιροῦντες περιφερείας τῶν παραλλήλων κύκλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, ἀσύμπτωτα ποιοῦντες τὰ ἀπὸ τῶν ἐπαφῶν ἡμικύκλια, ὡς ἐπὶ τὰ μέρη τῶν σημείων, δι' ὧν ἐγράφησαν, τῷ ἡμικυκλίῳ τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου, τῷ, ἐφ' οὗ ἂν ᾖ ἡ συναφὴ τοῦ λοξοῦ κύκλου, ἡ

1) μειζόνων?

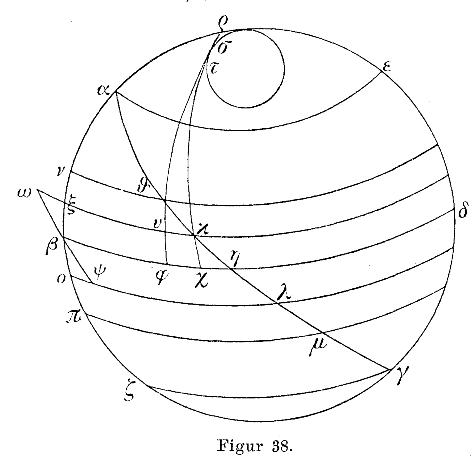
2) ἀπειλημμέναι?

στου τῶν παραλλήλων· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $\overline{βφ}$ περιφέρεια τῆς $\overline{φχ}$, ἡ δὲ $\overline{φχ}$ τῆς $\overline{χη}$, ...	*μεταξὺ τοῦ τε φανεροῦ πόλου καὶ τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων· ἀνίσους ἀπολήψονται περιφερείας τοῦ μεγίστου τῶν παραλλήλων, τὰς μεταξὺ αὐτῶν, καὶ μείζονα ἀεὶ τὴν ἔγγιον τοῦ ἐξ ἀρχῆς μεγίστου κύκλου τῆς πορρώτερον.*

c. Vindob. prop. 12 hat außerdem folgenden Passus (Figur 38)[99]):

. . . καὶ ἴση ἐστὶν ἡ $\overline{κη}$ τῇ $\overline{ηλ}$[1]), *ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $\overline{ωβ}$ τῇ $\overline{βψ}$, καί ἐστι μέγιστος τῶν παραλλήλων ὁ $\overline{βηδ}$, καὶ παράλληλοι κύκλοι οἱ $\overline{ωκ}$, $\overline{ψλ}$.*[2]) *ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ $\overline{ωκ}$ τῷ $\overline{ψλ}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{βξ}$ τῇ $\overline{βο}$*[3]) *ἴση ἐστίν, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ $\overline{ω}$ ἄρα ἐπὶ τὸ $\overline{ψ}$, ὥστε καὶ ἡ $\overline{ωξ}$ περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ $\overline{οψ}$. . . .*

Vergleichen wir diesen Passus mit Theodosios III, 3, so können wir nicht bezweifeln, dafs letzterer von der *alten Sphärik* herstammt. Auch Theodosios II, 13 u. 17, die Heiberg schon verglichen hat, werden hier verwendet.



Figur 38.

Heiberg zeigt ferner, dafs Theodosios II, 1 u. 8 dem Euklid bekannt waren. Aufserdem zitiert er einen Satz: „*καὶ ἐπεὶ κατὰ διάμετρόν ἐστι τὸ μὲν Α σημεῖον τῷ Β, τὸ δὲ Ε τῷ Ζ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΒ περιφέρεια τῇ ΑΖ περιφερείᾳ*“, dem Theodosios keinen genau entsprechenden hat. Dieser Satz läfst sich aber leicht durch Euklid, *elem.* I, 15, III, 26 und Theodosios I, 11 beweisen, sodafs letzterer wahrscheinlich in der *alten Sphärik* stand.

Hierzu kommt Theodosios II, 20, der in den Worten: „*καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἢ ὅμοια ἡ ΑΔ περιφέρεια τῆς ΗΜΘ περιφερείας, ἡ δὲ ΗΜΘ τῆς ΚΖΛ, καὶ ἔτι ἡ ΚΖΛ τῆς ΒΓ*“ liegt.[100])

---

1) Korrig. aus $\overline{νλ}$. 2) Korrig. aus $\overline{ϑα}$. 3) Korrig. aus $\overline{ωξ}$.

99) Auf dieser Figur sind $αβγ$, $σφ$ und $τχ$ verschiedene Lagen des Horizontes; $ρστ$ die Grenze der immer sichtbaren Sterne; $βηδ$ der Äquator; $αε$ und $γζ$ die Wendekreise; $αηγ$ und $ωβψ$ verschiedene Lagen der Ekliptik; $α$ der Nullpunkt des Krebses, $η$ der der Waage; $νϑ$, $ξκ$, $ολ$ und $πμ$ sind Tagebogen; die Bogen $ϑκ$ und $κη$ sind gleich.

100) Euklid, *φαινόμενα*, ed. Gregory, p. 574.

Aus den Worten: „καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ μέγιστος κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τινὸς ΕΖ ἐφάπτεται, ἕτερον δὲ τούτῳ παράλληλον τέμνει τὸν ΒΑ, καὶ ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔ πόλος μεταξὺ τῶν ΑΒ, ΕΖ, καὶ γεγραμμένοι εἰσὶ μέγιστοι κύκλοι οἱ ΘΚΗ, ΑΜΝ ἐφαπτόμενοι τοῦ ΒΑ, μείζων ἐστὶν ἡ ΟΜΞ περιφέρεια τῆς ΟΔ περιφερείας"[101]) sieht man, daſs entweder Theodosios II, 22 und III, 2 oder ein diese beiden remplazierender Satz in der *alten Sphärik* stand.

Aus den φαινόμενα lassen sich also mit Sicherheit oder gröſster Wahrscheinlichkeit folgende Sätze herauslesen:

Theod. I, **1**, 11, **12**, **13**, **15**;
II, 1, **5**, 8, **9**, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**,
III, 2, **3**, **7**, **8**
(die wörtlich zitierten Sätze sind **fett** gedruckt).

Autolykos.

περὶ κινουμένης σφαίρας und
περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων.

Wie erwähnt, zitiert Hultsch in der Autolykosausgabe Theodosios.[102]) Die betreffenden Stellen, die also der *alten Sphärik* angehören, hat er in den λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά gesammelt. Diese Zusammenstellung sowie die ganze Frage über die *voreuklidische Sphärik* erörtert er in der Vorrede zur Autolykosausgabe. Die Sätze aus Theodosios, deren genauen Wortlaut wir im Autolykos finden, sind:

Theod. I, 7, 8, 15;
II, 2, 10a, 13;
III, 1b;

alle in περὶ κινουμένης σφαίρας.

Von diesen sind I, 15 und II, 13 schon durch die φαινόμενα parallelisiert. Die übrigen lassen wir hier folgen:

Autolykos' περὶ κινουμένης σφαίρας. (Seite, Zeile)	Theodosios' Sphärik. (Buch, Satz)
46, 3:	I, 7:
καὶ ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ κύκλος ἐστὶν ὁ γδβ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τοῦ ϑ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ γδβ κύκλου ἐπέζευκται εὐϑεῖα ἡ ϑε, ἡ ϑε ἄρα ὀρϑή ἐστι πρὸς τὸν γδβ κύκλον.	ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ κέντρον αὐτοῦ ἐπιζευχϑῇ τις εὐϑεῖα, ἡ ἐπιζευχϑεῖσα ὀρϑή ἐστι πρὸς τὸν κύκλον.

101) φαινόμενα, ed. Gregory, p. 586 oben; Cod. Vindob. gr. 103 hat denselben Satz, aber in verstümmelter Form.

102) Seite 83 in der Autolykosausgabe zitiert Hultsch, *Theod. sphaer.* I, 20 statt II, 15.

4, 21:

καὶ φανερὸν ὅτι τὰ α, β σημεῖα πόλοι ἔσονται τοῦ γραφέντος κύκλου, ἐπειδήπερ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας κάθετος ἦκται καὶ ἐκβέβληται ἡ αβ ἕως τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

I, 8:

ἐὰν ᾖ ἐν σφαίρᾳ κύκλος, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπ᾽ αὐτὸν κάθετος ἀχθῇ καὶ ἐκβληθῇ ἐπ᾽ ἀμφότερα τὰ μέρη· ἐπὶ τοὺς πόλους πεσεῖται τοῦ κύκλου.

6, 1:

οἱ δὲ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσί.

II, 2:

οἱ περὶ τοὺς αὐτοὺς πόλους ὄντες ἐν σφαίρᾳ κύκλοι παράλληλοί εἰσιν.

8, 3:

ἐπεὶ ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι εἰσὶν οἱ γε, δζ, καὶ διὰ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γεγραμμένοι εἰσὶν οἱ αγδβ, δεζβ, ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ γε περιφέρεια τῇ δζ περιφερείᾳ.

II, 10, erster Teil:

ἐὰν ὦσιν ἐν σφαίρᾳ παράλληλοι κύκλοι, διὰ δὲ τῶν πόλων αὐτῶν μέγιστοι κύκλοι γραφῶσιν, αἱ μὲν τῶν παραλλήλων κύκλων περιφέρειαι αἱ μεταξὺ τῶν μεγίστων κύκλων ὅμοιαί εἰσιν, ...

24, 6:

κύκλου δή τινος τοῦ αβδγ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ηθ τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐφέστηκεν τὸ ηζθ, καὶ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος τοῦ ηζθ περιφέρεια εἰς ἄνισα τέτμηται κατὰ τὸ ζ σημεῖον, καὶ ἔστιν ἐλάσσων ἡ ζη περιφέρεια· ἡ ζη ἄρα εὐθεῖα ἐλαχίστη ἐστὶν πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ ζ σημείου πρὸς τὸν αβδγ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν· καὶ ἡ ἔγγιον ἄρα τῆς ζη ἐλάσσων ἐστίν· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ζε τῆς ζβ.

III, 1, letzter Teil:

ἐὰν εἰς κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα εἰς ἄνισα τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς τμῆμα κύκλου ὀρθὸν ἐπισταθῇ μὴ μεῖζον ἡμικυκλίου, διαιρεθῇ δὲ ἡ τοῦ ἐφεστῶτος τμήματος περιφέρεια εἰς ἄνισα . . . . . ἐὰν δὲ ἡ διαχθεῖσα διάμετρος ᾖ τοῦ κύκλου, τὰ δὲ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ· ἐλάσσων μὲν ἔσται ἡ προσκειμένη εὐθεῖα πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν, μεγίστη δὲ ἡ ὑπὸ τὴν μείζονα περιφέρειαν ὑποτείνουσα εὐθεῖα.

An diese Sätze schließt sich aber eine Reihe von Sätzen, die Autolykos gebraucht hat, deren Wortlaut er aber nicht so genau zitiert, daß wir sie wörtlich mit Theodosios vergleichen können. Es sind dies:

Theod. I, 1, 6a, 20;

II, 3, 5, 8, 20;

alle in *περὶ κινουμένης σφαίρας* vorausgesetzt, und Theodosios II, 15 in *περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων.*

Der Gebrauch von Theodosios II, 3 in περ. κιν. σφ. p. 20, 1 ist unsicher; als Voraussetzung für die wörtlich parallelisierten Sätze Theodosios II, 8 u. 15 wird seine Existenz vor Euklid jedoch ziemlich sicher gestellt. — Ganz unsicher ist der Gebrauch von Theodosios I, 9 in περ. κιν. σφ. p. 1, 15.

Durch die Anwendungen im Euklid und Autolykos läfst sich also konstatieren, dafs folgende Sätze *voreuklidisch* sind:

Theod. I, **1**, 6a, **7**, **8**, 11, **12**, **13**, **15**, 20;
II, 1, **2**, 3, **5**, 8, **9**, **10**a, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**;
III, **1b**, 2, **3**, **7**, **8**

(die wörtlich zitierten Sätze sind **fett** gedruckt).

In der Übersichtstafel Seite 136 ist das ganze Material gesammelt. Neben den Sätzen aus Theodosios' *Sphärik* stehen bei jedem Satz die Sätze aus demselben Werk, durch welche er bewiesen wird. In den drei letzten Kolonnen sind aus bezw. Autolykos' zwei Werken und Euklids φαινόμενα die Stellen angeführt, wo sich die Sätze aus Theodosios (in erster Kolonne) finden; mit **fettem** Druck, wenn der Wortlaut derselbe ist, in einer Parenthese, wenn der Gebrauch unsicher ist.

Gelegentlich bemerken wir hier, dafs die Begriffe, die Theodosios gebraucht und definiert, zur Zeit eines Autolykos und eines Euklids geläufig waren. Der ältere dieser Verfasser (Autolykos) hat sie nämlich alle benutzt, wie die Beispiele in der Tafel es bestätigen.

Die Untersuchung über den Inhalt der *voreuklidischen Sphärik* ist mit dieser Übersicht nicht erledigt. Wir müssen noch untersuchen, welche Sätze wir ihr mit Wahrscheinlichkeit noch beilegen und über welche wir überhaupt nichts entscheiden können. Ein Kriterium dafür finden wir in Theodosios' Beweisverfahren, in der gegenseitigen Abhängigkeit seiner Sätze. Wenn z. B. die Existenz eines Satzes vor Euklid nachgewiesen ist, ist es an sich wahrscheinlich, dafs auch die Sätze, mit deren Hülfe Theodosios den betreffenden Satz beweist, voreuklidisch sind. Am besten wäre es, wenn wir in solchen Fällen die Notwendigkeit der Voraussetzungen nachweisen könnten; das läfst sich jedoch nicht leicht thun mit einem Werke wie dem des Theodosios, wo eine geänderte Definition oder eine andere Anwendung von den Sätzen der Elemente zu immer neuen Beweisen führen können. Dennoch dürfen wir diese Untersuchung nicht unterlassen, weil es sich schon gezeigt hat, dafs Theodosios' Sphärik und die alte einen so ähnlichen Inhalt haben, dafs es mehr als wahrscheinlich ist, dafs auch ihre Beweismethoden hauptsächlich einander gleich sind.

Zu dieser Untersuchung gebrauchen wir die eben deswegen hinzugefügte zweite Kolonne der Tafel Seite 136.

Ganz vereinzelt stehen offenbar:

Theod. I, 3, 4, 5, 16, 18, 19, 22, 23;
II, 11, 14, 16, 23;
III, 5, 6, 9—14;

sie werden weder direkt noch mit anderen Sätzen als Zwischenglieder zum Beweise irgend eines der parallelisierten Sätze gebraucht. Von den nicht parallelisierten Sätzen bleiben also zu näherer Untersuchung folgende übrig:

Theod. I, 2, 6b, 10, 14, 17, 21;
II, 4, 6, 7, 12, 21;
III, 2, 4;

von denen III, 2 schon als wahrscheinlich voreuklidisch bezeichnet werden könnte (vgl. oben Seite 59).

Von I, 2 wird nur das Corollar in I, 10 gebraucht; I, 10 ist die natürliche Voraussetzung von dem wörtlich zitierten I, 15. Die Stellung von I, 2 ist also unsicher, während I, 10 wahrscheinlich alt ist. — I, 6b ist die natürliche Voraussetzung von I, 11; I, 11 wieder von dem wörtlich zitierten II, 5; I, 6b und 11 sind somit wahrscheinlich voreuklidisch, umsomehr, weil wir schon vorher (siehe die Tafel) Grund hatten, dies von I, 11 anzunehmen. — I, 14 ist Voraussetzung von I, 21, dieser Satz wieder von den wörtlich zitierten II, 6 und 17; die Art dieser zwei Sätze ist jedoch eine solche, daſs dieser Gebrauch nicht genügt, um sie als alte festzustellen. — I, 17 ist die natürliche Voraussetzung von I, 20 und II, 15, die beide der alten Sphärik gehören; I, 17 ist somit wahrscheinlich voreuklidisch. — II, 4 ist Voraussetzung von II, 5, der doch durch II, 2—3 ohne 4 als Zwischenglied bewiesen werden kann. Die Stellung von II, 4 ist also unsicher. — II, 6 und 7 fallen ganz innerhalb des Bereichs der *φαινόμενα*, bilden ferner die natürliche Voraussetzung des wörtlich zitierten II, 8 und sind also der alten Sphärik zuzuschreiben. — II, 12, der inverse Satz von II, 11, remplaziert mit letzterem im Theodosios die Kongruenzsätze bei Menelaos. Auſserdem ist II, 12 Voraussetzung der wörtlich zitierten II, 15, 17 u. 22, die notwendigerweise einen Kongruenzsatz voraussetzen. Ohne Zweifel gehört also II, 12 der alten Sphärik an. — II, 21 ist Voraussetzung von II, 22, der doch sehr wohl ohne II, 21 bewiesen werden kann. Die Stellung des letzteren ist also unsicher. — III, 2, dessen Gebrauch in den *φαινόμενα* unsicher war, und III, 4, den wir bisher nicht angetroffen haben, sind, wenn wir der alten Sphärik nicht *ganz andere Beweismethoden* als der des Theodosios zumuten wollen, notwendige Voraussetzungen der wörtlich zitierten III, 7—8 und somit der alten Sphärik angehörend.

Als Endresultat dieser Untersuchung (deren Details wir natürlich nicht haben wiedergeben können), sowie der vorhergehenden Erörterungen, ergeben sich als ganz oder doch ziemlich sichere Bestandteile der *voreuklidischen Sphärik*:

Theod. I, **1**, 6, **7**, **8**, 10, 11, **12**, **13**, **15**, 17, 20;
II, 1, **2**, 3, **5**, 6, 7, 8, **9**, **10**, 12, **13**, **15**, **17**, **18**, **19**, 20, **22**;
III, **1**, 2, **3**, 4, **7**, **8**

(die ganz sicheren mit **fettem** Druck), während die Stellung von Theod. I, 2, 9, 14, 21; II, 4, 21 unsicher ist.

Es ergiebt sich also, dafs *von den* ***60*** *Sätzen im Theodosios* ***20*** *ganz sicher und* ***14*** *wahrscheinlich der alten Sphärik angehören, während* ***6*** *unsicher sind und* ***nur 20*** *übrig bleiben, über die wir nichts entscheiden können.*

Wenn Tannery [103]) sagt: *„Certainement on ne doit pas concevoir la Sphérique primitive comme développée suivant le plan de Théodose; on doit imaginer plutôt quelque chose comme le traité d'Autolycus sur la Sphère en mouvement, qui, en douze propositions, dit tout le nécessaire"*, so ist dies so falsch wie nur möglich. [104]) Wir würden vielmehr Grund zum Erstaunen haben, wenn wir nachweisen könnten, dafs ein Satz in Theodosios' *Sphärik* (die Sätze nach III, 10 doch ausgenommen) nicht vor Euklid bekannt wäre; ja! nach der vorhergehenden Untersuchung finden wir es sogar berechtigt, zu behaupten, dafs Theodosios' *Sphärik* nur eine Art Neuausgabe der *voreuklidischen* ist, wahrscheinlich lediglich zu Schulzwecken eingerichtet. Dagegen wollen wir nicht behaupten, dafs sie von A bis Z eine Abschrift der *alten Sphärik* ist. Im ersten und zweiten Buch können allerdings nur hie und da ein Paar Sätze von Theodosios eingeschaltet sein. Dagegen glauben wir nachweisen zu können, dafs die Sätze III, 11—14, der Schlufs von Theodosios' *Sphärik*, nicht voreuklidisch sein können, obgleich sie wahrscheinlich nicht Theodosios selbst zuzuschreiben sind.

Vergleichen wir Theodosios' *Sphärik* mit dem untrigonometrischen Teil der des Menelaos (Buch I—II), so müssen wir letzterer den Vorzug geben; aber wir vergleichen ja eigentlich auch nicht zwei einander in der Zeit naheliegende Werke, sondern vielmehr Werke, zwischen denen die ganze Blütezeit der griechischen Mathematik liegt; folglich steht es gar nicht so arg mit dem Werke des Theodosios, das wir ja doch ganz anders beurteilen müssen, wenn wir es z. B. Eudoxos' *Sphärik* nennen. Für Eudoxos' Zeit ist die Leistung durchaus nicht schlecht.

---

103) Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 38.

104) Das Richtige hat schon Hultsch herausgebracht; siehe *λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά*, p. 416; Autolykosausgabe, Praefatio, p. XII; Bericht vom Jahre 1885 (vgl. oben) p. 171.

Eine Frage, der wir sonst eine großse Bedeutung beilegen würden, verliert nun ihr Hauptinteresse, nämlich wann Theodosios lebte. Wenn seine *Sphärik* durchaus keine originelle ist, so ist es uns ziemlich gleichgültig, wann sie geschrieben wurde. Wir wollen dennoch kurz die Frage berühren, weil die Lösung derselben für die Schätzung der astronomischen Arbeiten des Theodosios vielleicht von Wert sein kann.

c. Wann lebte Theodosios?

Diese Frage hat Tannery kurz und klar auseinandergesetzt.[105]) Der Kern derselben ist, ob der Bericht des Suidas[106]) richtig ist. Dann ist nämlich Theodosios als *Tripolitaner* zu betrachten und *nach* Ptolemaios zu setzen; wenn nicht, so ist er nach den Zeugnissen von Vitruvius[107]) und Strabo[108]) aus *Bithynien* und jedenfalls nicht jünger als Vitruvius (ca. 20 n. Chr.).

Um den Bericht des Suidas zu entkräften, führt Tannery an, dafs ein Verfasser, der zwischen dem Sonnenjahr eines Meton und dem eines Kalippos schwankt, nicht wohl jünger als Ptolemaios sein kann. Das geben wir zu. Wenn aber Tannery sagt: *„il est d'autre part bien peu admissible, que ses Sphériques aient été composées, telles qu'elles sont, après celles de Ménélas"*, so sind wir wegen unserer abweichenden Auffassung über Theodosios' Originalität nicht damit einverstanden. Eine *Neuausgabe der alten Sphärik,* die immerhin die Voraussetzung aller hierher gehörenden Werke (auch der *Sphärik* des Menelaos) bildete, könnte zu jeder Zeit erschienen sein.

Wenn wir doch mit Tannery den Bericht des Suidas für eine Mischung zweier Berichte über zwei verschiedene Personen halten, so geschieht dies:

1. Wegen Pappos' Erwähnung von Theodosios III, 5, welcher Satz mit Propositionen aus Menelaos' *Sphärik* neu bewiesen wurde.[109])

2. Weil Menelaos öfters Theodosios' *Sphärik* und Theodosios selbst erwähnt, ohne dafs wir Grund haben, die Echtheit der betreffenden Stellen zu bezweifeln, zumal da sie, wie es scheint, in allen den arabischen Rezensionen übereinstimmend vorkommen, z. B. im Cod. Leid. 399[110]) (Redaktion von Al-Harawi) p. 99: „**Menelaos** sagt: *Da wir schon die einleitenden Sätze, die notwendig sind, erklärt haben, so wollen wir uns zu dem*

105) Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 36—37.
106) Suidas, *Lexikon,* Artikel „Theodosios".
107) Vitruvius, *de architectura* IX, 9.
108) Strabon, *Geographia* XII, p. 566.
109) Vgl. oben Seite 4, 31 und 55.
110) Mitteilung von R. Besthorn.

wenden, was **Theodosios** *erklären wollte; und wir werden es mit Hülfe von . . . . . beweisen, ohne dafs das Absurde darin Platz findet; und wir werden seine Irrtümer aufklären und seine Fehler verbessern"*, und dieselbe Stelle in der Gerhardschen Übersetzung: *„Et quia nos iam ostendimus res, que premisse sunt, tunc nos sequamur illud cum demonstrationibus omnium rerum, que sunt in libro* **theodosii** *de speris cum conuersione illius iterum secundum modum communem aggregantem fortem. Et surgamus in primis et uerificemus proposita earum ipsis premissa. Et illud ideo quoniam in eis sunt quedam falsa"* (vgl. auch die Halleyausgabe p. 75, Zeile 5—9). — Mehrere ähnliche Stellen liefsen sich zitieren.[111] Die obige haben wir gewählt, weil sie gerade vor Menelaos' neuem Beweis zu Theodosios III, 5 steht, und Pappos' Worte sich offenbar auf sie beziehen.

Wir betrachten also mit Tannery *Theodosios* als *Bithynier* und *älter* als Menelaos. — Seine astronomischen Werke verweisen ihn zunächst in die Zeit **vor** Hipparch, oder stempeln ihn wenigstens als einen unabhängigen Zeitgenossen desselben.

d. Zusammenhang zwischen Sphärik und Astronomie.

Nachdem wir nach Vermögen Fug und Recht gestiftet haben zwischen den Vorläufern des Menelaos, wollen wir die Hauptprobleme, die wir in Menelaos' zweitem Buch fanden, verfolgen, und zwar von der Zeit vor Euklid bis auf Ptolemaios, um nachzuweisen, wie sich die Sphärik aus der Astronomie entwickelt hat, und ferner, um das Material zur Untersuchung der Trigonometrie zurecht zu legen. Die Hauptsätze in Menelaos II waren 10, 12 u. 13. Zu 13 fanden wir keinen entsprechenden Satz im Theodosios. Als möglicherweise neueren Datums heben wir also vorläufig diesen Satz auf. Die Menelaos II, 10 entsprechenden Sätze waren Theodosios III, 5—6, die wir nicht als voreuklidisch feststellen konnten. Fangen wir also mit Menelaos II, 12 = Theodosios III, 7—8 an, die in den φαινόμενα zitiert werden und also in der *alten Sphärik* wörtlich wie im Theodosios standen.

Theodosios III, 7 wird zum Beweise des Satzes 8 in den φαινόμενα verwendet; letzterer lautet:

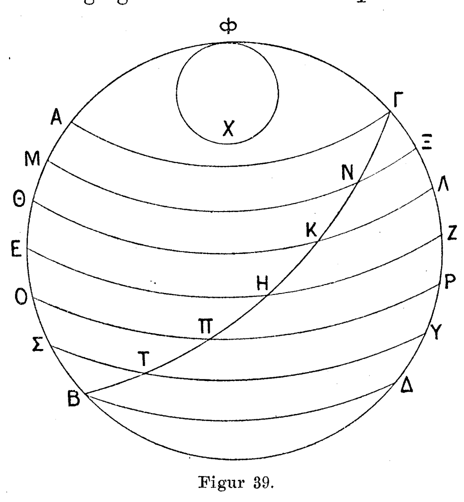
„Die Zeichen der Ekliptik gehen in ungleichen Abschnitten des Horizontes auf und unter, und zwar in den gröfsten die am Äquator, in kleineren die zunächst folgenden, in den kleinsten die an den Wendekreisen, in gleichen aber die, welche gleich weit vom Äquator entfernt sind."

Beweis: Seien (Fig. 39) $AB\Delta\Gamma$ der Horizont, $A\Gamma$ und $B\Delta$ die Wendekreise, ΦX die Grenze der immer sichtbaren Sterne, ΓB die Ekliptik und

111) Vgl. unten Seite 116.

EZ der Äquator; dann ist zu beweisen, dafs die Tierkreiszeichen ΓN, NK, KH, $H\Pi$, ΠT und TB in ungleichen Horizontbogen auf- und untergehen. Diese Bogen sind aber $\Gamma\Xi$, $\Xi\Lambda$ u. s. w., die (hier wird dann Theod. III, 7 wörtlich zitiert)[112]) von Γ bis Z wachsen und dann wieder abnehmen. Dafs $\Gamma\Xi = \Delta\Upsilon$ u. s. w., folgt durch Theod. II, 17.

Diese Anwendung von Theodosios III, 7 zeigt deutlich, dafs dieser Satz nur als ein astronomischer Satz in mathematischer Abfassung aufzufassen ist. Die Entwickelung ist offenbar folgende. Ursprünglich wurde ein astronomisches Problem bewiesen. Als mathematischer Satz abgefafst, wurde dasselbe wie andere ähnliche ein Haupttheorem der *voreuklidischen Sphärik*. Das astronomische Problem ging in Euklids *φαινόμενα* über, wo der Beweis nur in einer Zurückführung zum mathematischen Satze bestand. Dieser ging in Theodosios' *Sphärik* über. Der Satz aber war und blieb derselbe und zwar, dafs die Aufgangsbogen gleicher Ekliptikbogen (oder eigentlich die Differenzen der Morgenweiten der nach einander folgenden Nullpunkte der Tierzeichen) gegen den Nordpunkt bezw. Südpunkt wachsen. In Ptolemaios' *Syntaxis*[113]) wird es angegeben, wie man die Morgen- oder Abendweiten berechnen kann, wenn man die Deklination der betreffenden Ekliptikpunkte und die Polhöhe kennt. Für Ekliptikpunkte, die denselben Abstand vom Äquator haben, beweist Ptolemaios, dafs die entsprechenden Horizontbogen (zwischen Parallelkreisen durch die zwei Ekliptikpunkte und dem Durchschnittspunkt des Horizonts und Äquators) gleich werden, und zwar durch den Kongruenzsatz Menelaos I, 4a.



Figur 39.

Ptolemaios behandelt also das alte Problem über die Horizontbogen, aber nur kurz, weil er desselben fernerhin nicht bedarf. Dieses Problem ist also für die berechnende Astronomie sehr unfruchtbar gewesen. Anders verhält es sich dagegen mit dem folgenden, Theodosios III, 8, welcher Satz in den *φαινόμενα* 12 zitiert wird.[114]) Er lautet:

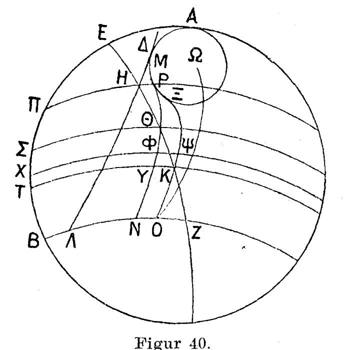
---

112) Vgl. oben Seite 57; und Heiberg, *Litt. Stud.* p. 45.
113) Ptolemaios, *Syntaxis* II, cap. 3, ed. Heiberg I, p. 95.
114) Vgl. oben Seite 57.

„Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebse gehen in ungleichen Zeiten unter, und zwar in der längsten die an den Berührungspunkten der Wendekreise, in kürzerer die zunächst folgenden, in der kürzesten aber die am Äquator; dagegen gehen die Bogen, welche gleich weit vom Äquator entfernt sind, in gleichen Zeiten auf und unter."

Beweis (nach Cod. Vindob. gr. 103): Seien (Fig. 38) $\alpha\beta\gamma\delta$ der Horizont, $\varrho\sigma\tau$ der Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne, $\alpha\varepsilon$ und $\zeta\gamma$ bezw. der Sommer- und Winterwendekreis, $\beta\eta\delta$ der Äquator und $\alpha\eta\gamma$ die Ekliptik, von der $\alpha\eta\gamma$ der Halbkreis nach dem Krebse (d. h. Krebs — Schütze) und über der Erde ist. Seien ferner die Tierzeichen $\alpha\vartheta$, $\vartheta\varkappa$, $\varkappa\eta$, $\eta\lambda$, $\lambda\mu$, $\mu\gamma$ (alle gleich), so gehen $\alpha\vartheta$ und $\mu\gamma$ in der längsten Zeit auf, in kürzerer aber $\vartheta\varkappa$ und $\lambda\mu$, in der kürzesten $\varkappa\eta$ und $\eta\lambda$.

Indem wir durch ϑ und $\varkappa$ gröſste Kreise ziehen, die den Kreis $\varrho\sigma\tau$ berühren (diese Kreise sind also verschiedene Lagen des Horizontes), so haben wir: Während ϑ den Bogen $\vartheta\nu$ durchläuft, geht $\alpha\vartheta$ unter; — während $\varkappa$ den Bogen $\varkappa\upsilon$ durchläuft, durchläuft χ den Bogen $\chi\varphi$, und in dieser Zeit geht $\vartheta\varkappa$ unter; — während η den Bogen $\eta\chi$ durchläuft, geht $\varkappa\eta$ unter. — $\varphi\chi$ und $\chi\eta$ repräsentieren also die Zeiten, in welchen bezw. die gleichen Ekliptikbogen $\vartheta\varkappa$ und $\varkappa\eta$ untergehen. „Aber", sagt Euklid, „in dieser Figur, wenn (hier wird Theod. III, 8 zitiert) u. s. w." ... „ist $\varphi\chi > \chi\eta$", womit der Satz sofort bewiesen ist.



Figur 40.

Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes in der Geschichte der Astronomie referieren wir ausnahmsweise die Beweise von Theodosios (d. h. nach der alten Methode) und Menelaos.

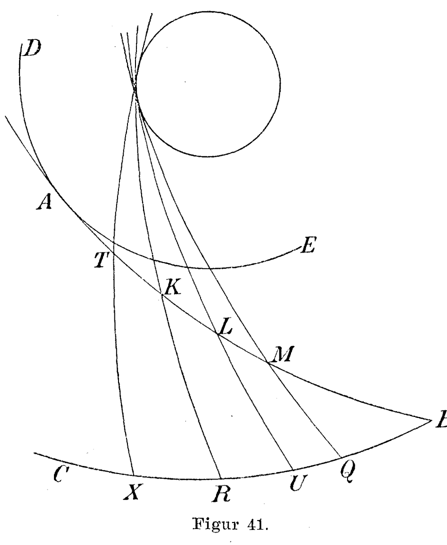
Theodosios III, 8 (Figur 40): Die mathematische Abfassung des Satzes hat weniger Interesse. Ein Vergleich mit der Figur in $\varphi\alpha\iota$-$\nu\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$ 12 (Fig. 38) zeigt aber, daſs die Figur bei Theodosios astronomisch so aufzufassen ist: AEB, $\Delta H\Lambda$, $M\Theta N$ und ΞKO sind verschiedene Lagen des Horizontes, $A\Delta M\Xi$ ist der Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne, BZ der Äquator, EZ die Ekliptik, $H\Theta$ und ΘK gleiche Ekliptikbogen.

Zu beweisen ist die Ungleichheit der Äquatorbogen $\Lambda N > NO$.

Beweis: $\Sigma T > \Sigma\Pi$ (Theod. III, 7, vgl. oben), $\Sigma T = \Theta\Upsilon$, $\Sigma\Pi = \Theta P$ (Theod. II, 13), also $\Theta\Upsilon > \Theta P$. Sei nun $\Phi\Theta = \Theta P$, dann wird $HP = \Phi K$ (Theod. III, 3). Ziehe $X\Phi\Psi \parallel T\Upsilon K$, so wird die Schnittlinie der Ebenen $X\Phi\Psi$ und $\Xi KO \parallel$ dem Durchmesser des Kreises ΞKO, also steht auf einer Sehne des Kreises ΞKO ein Segment $\Psi\Phi X$, gegen denjenigen

Bogen von ΞKO, der kleiner als ein Halbkreis ist, geneigt. Dann wird (Theod. III, 2) $\overline{\Phi\Psi} < \overline{\Phi K} = \overline{HP}$. Aus der Ungleichheit der Kreise $X\Phi\Psi$ und ΠHP folgt die der darin liegenden Sehnen $\Phi\Psi$ und HP und zwar $\smile HP > \Phi\Psi$; da aber $\smile HP \sim AN$ und $\smile \Phi\Psi \sim NO$, wird auch $\smile AN > NO$ q. e. d.

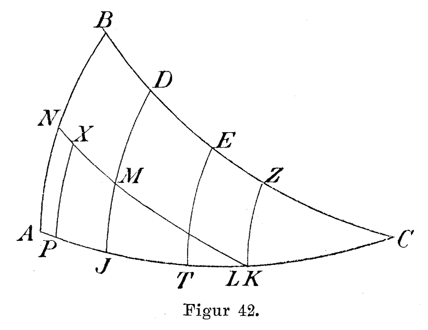
Der entsprechende Satz Menelaos II, 12[2] hat eine andere Figur (41), wo BA als Ekliptik, BC als Äquator, DAE als Wendekreis, TX, KR, LU und MQ als verschiedene Lagen des Horizontes aufzufassen sind. Zu beweisen ist $\smile XR > UQ$.



Figur 41.

Es ist dies eine direkte Folge von Menelaos II, 6, 1. Teil (Fig. 42), welcher sagt: Seien im sphärischen Dreieck ABC: $\angle B \leqq 90^0$, $90^0 \geqq BC$, $90^0 \geqq BA$, $\smile BD = EZ$, $\angle J = T = K = A$, und seien DJ, ET und ZK gröſste Kreisbogen. Beweise dann: $\smile AJ > TK$.

Beweis: Seien $\smile JL = KC$ und $\angle ALM = C$, so fällt N auf AB (Menel. II, 2). Dann ist $\smile MN > DB = EZ$ (Menel. II, 3; vgl. Seite 52). Seien ferner $\smile MX = EZ$ und $\angle XPC = A$, so wird (Menel, I, 14 oder 16) $\triangle PXL \cong TEC$ und wir haben:



Figur 42.

$$\begin{array}{r} \smile PL = CT \\ \div\, [\smile JL = KC] \\ \hline \smile AJ > PJ = TK \end{array}$$

q. e. d.

Theodosios gebraucht also direkt seine Sätze III, 2, 3 und 7 und implicite III, 1 und 4; Menelaos dagegen nur den Fundamentalsatz Menel. II, 3 und einen Kongruenzsatz des ersten Buches.

Der so bewiesene Satz, sowie das darin verborgene astronomische Problem hat eine überaus groſse Rolle gespielt. Wie viel für die Griechen im Begriffe *„Auf- und Untergang der Sterne“* lag, wollen wir nicht hier erörtern. Es genügt, daran zu erinnern, daſs es ganz einfach das Haupt-

problem der ganzen Astronomie bis auf Apollonios war. Es enthielt den Kern der alten Sphärik und bildete das astronomische Fundament der Astrologie. Hauptsächlich lenkten doch die Griechen ihre Untersuchungen auf drei Hauptpunkte, und zwar:

1. den gleichzeitigen Auf- und Untergang der Sterne[115]),
2. die Zeit, die die Konstellationen zum Auf- und Untergang gebrauchen[116]),
3. die Zeit, welche die Zwölfteteile der Ekliptik (die Tierzeichen) zum Auf und Untergang gebrauchen.

Letzteres Problem haben wir eben vor uns in den oben referierten identischen

---

115) Der gleichzeitige Auf- und Untergang der Sterne wurde in Eudoxos' und Aratos' *φαινόμενα* erörtert. Der Zweck dieser Erörterung war die Zeitbestimmung bei Nacht (vgl. Hipparchs *Kommentar zu Aratos,* p. 122, 5—7). Eine eingehende Kritik der älteren Behandlungen hat Hipparch in seinem *Kommentar* (ed. Manitius, p. 120—183) gegeben. Seine eigenen Resultate, die er in dem *Kommentar* nur durch kurze Zahlenbeispiele angiebt, sagt er, habe er in einem anderen Werk genau auseinandergesetzt, und zwar so, daſs er immer die Auf- und Untergänge der Sterne mit den gleichzeitigen Auf- und Untergängen der Punkte der Ekliptik vergleicht. Hipparchs Hinweisungen auf dieses verlorene Werk lauten: *Kommentar,* p. 128, 5: „*ἀποδεδείχαμεν γὰρ τὰ τοιαῦτα πάντα ἐν τοῖς περὶ τῶν συνανατολῶν.*“ — p. 148, 20: „*τὸν μὲν γὰρ ἐπὶ πλεῖον περὶ αὐτοῦ λόγον ἐν τῇ τῶν συνανατολῶν πραγματείᾳ κατακεχωρίκαμεν.*“ — p. 150, 14: „*ἕκαστον γὰρ τῶν εἰρημένων ἀποδείκνυται διὰ τῶν γραμμῶν ἐν ταῖς καθόλου περὶ τῶν τοιούτων ἡμῖν συντεταγμέναις πραγματείαις.*“ — In Ptolemaios' *Syntaxis* sind die gleichzeitigen Auf- und Untergänge der Fixsterne kurz behandelt worden in VIII cap. 5 mit der Überschrift: „*περὶ συνανατολῶν καὶ συμμεσουρανήσεων καὶ συγκαταδύσεων τῶν ἀπλανῶν*“, und zwar trigonometrisch; vgl. unten Seite 84—86 mit Noten.

116) In Hipparchs *Kommentar,* p. 183—270, ist es bei jedem Sternbild sowohl innerhalb als auſserhalb der Ekliptik angegeben (vgl. Manitius, p. XXXIII): 1. Mit welchen Zeichen des Tierkreises bezw. Graden der Ekliptik es gleichzeitig auf- und untergeht. — 2. Mit welchem Sterne der Auf- und Untergang beginnt und mit welchem er sein Ende erreicht. — 3. Welches Zeichen und welcher Grad der Ekliptik bei Anfang und Ende im Meridian steht. — 4. Welche Fixsterne bei Anfang und Ende von Aufgang bezw. Untergang kulminieren. — 5. In wieviel Stunden Auf- bezw. Untergang stattfindet. — Die Beweise für die in Hipparchs *Kommentar* nur als Resultate angegebenen Bestimmungen hat er in anderen Werken gegeben; denn er sagt p. 184, 2: „*τὰς δὲ κατὰ μέρος αὐτῶν ἀποδείξεις ἐν ἄλλοις συντετάχαμεν οὕτως, ὥστε ἐν παντὶ τόπῳ σχεδὸν τῆς οἰκουμένης δύνασθαι παρακολουθεῖν ταῖς διαφοραῖς τῶν συνανατολῶν καὶ συγκαταδύσεων.*“ Die Bestimmung der Zeit, in welcher die Sternbilder auf- und untergehen, ist theoretisch dieselbe wie die Bestimmung der Zeit, in welcher die Zwölfteteile der Ekliptik (die Tierzeichen) auf- und untergehen. Die Bestimmungen beziehen sich alle auf Stellen, wo die Polhöhe 36° ist.



Sätzen Euklid φαινόμενα 12 = Theodosios III, 8 = Menelaos II, 12[2], und auf seine Untersuchung werden wir uns hier beschränken.

Erst wenden wir unsere Aufmerksamkeit auf einen Bericht in Pappos' συναγωγή[117]), wo die Geschichte dieses Problems behandelt wird. In Übersetzung lautet die Stelle so:

„Im 12. Theorem (der φαινόμενα) *sagt Euklid: 'Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs gehen in ungleichen Zeiten unter, und zwar in den gröfsten die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen, in den kleinsten aber die am Äquator, und in gleichen Zeiten die vom Äquator gleich weit entfernten.' Es ist unsicher, warum er vom Untergang dieser Bogen spricht, vom Aufgang dagegen nicht. Die Untersuchung entwickelte sich nämlich in Aufgangsbestimmungen, und es ist dies die ganze Sache: die Wohnung zu finden, wo z. B. der Krebs in gleicher Zeit aufgeht wie auch der Löwe. Hipparch aber zeigt im Buche über den Aufgang der zwölf Zeichen mit Zahlen*[118]), *dafs die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, die eine gegenseitige Zeitkomparation haben, nicht so aufgehen, wie sie untergehen; nämlich, dafs es gewisse Wohnungen giebt, wo immer die von den gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, welche dem Äquator am nächsten liegen, in längerer Zeit aufgehen, als die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen. Dadurch stellte er auch über die vom Äquator gleich weit entfernten fest, dafs ihre Aufgänge in gleichen Zeiten vorgehen.' Ebenso sagt er* (Euklid, φαινόμενα 13): *'Die gleichen Bogen des Halbkreises nach dem Steinbock gehen in ungleichen Zeiten auf, und zwar in den längsten die an den Berührungspunkten* (d. h. Wendepunkten), *in kleineren aber die nächstfolgenden, in den kleinsten aber die am Äquator, in gleichen aber die vom Äquator gleich weit entfernten.' Über deren Untergang sagt er nichts. Die Art des Beweises bezieht sich nämlich auf die Aufgangsbestimmungen, und darüber ist ferner eine Abhandlung* [πραγματεία] *von dem Alexandriner Menelaos geschrieben, welche wir später untersuchen werden. Wenn aber der Horizont durch die Pole der Parallelkreise geht, soll es so bewiesen werden . . . . .“*

Diese in mehreren Beziehungen rätselhafte Stelle läfst sich nur erklären, wenn wir beachten, wie es sich in der That mit den Auf- und Untergangszeiten der Ekliptikbogen verhält. Es verhält sich so:

1. Die Zeichen, die symmetrisch in Bezug auf die Schnittlinie der Ekliptik- und der Äquatorialebene liegen, haben dieselben Auf- und Untergangszeiten.

---

117) Pappos, ed. Hultsch, p. 598—602.

118) „Ἵππαρχος δὲ ἐν τῷ περὶ τῆς τῶν ιβ΄ ζῳδίων ἀναφορᾶς συναποδείκνυσιν δι' ἀριθμῶν ὅτι . . . .“

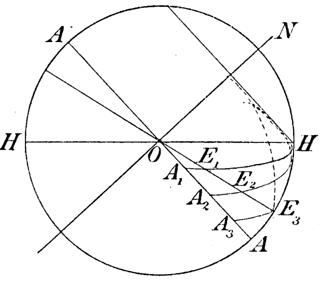
2. Die Auf(Unter)gangszeit eines Zeichens ist gleich der Unter(Auf)-gangszeit des diametral entgegengesetzten.

3. Die Untergangszeiten der Zeichen des Halbkreises Krebs, Löwe bis Schütze und, was auf dasselbe herauskommt, die Aufgangszeiten der des Halbkreises Steinbock bis Zwillinge wachsen immer vom Äquator ab gegen die Wendekreise.

4. Dasselbe gilt auch für Wohnungen der Polarzonen, insofern die Tierzeichen überhaupt auf- und untergehen.

5. Die Untergangszeiten der Zeichen des Halbkreises Steinbock-Zwillinge und, was auf dasselbe herauskommt, die Aufgangszeiten der Zeichen des Halbkreises Krebs-Schütze haben für Wohnungen zwischen den Polarkreisen kein bestimmtes Wachstum vom Äquator aus oder gegen denselben.

6. Dieselben Zeiten wachsen dagegen für Wohnungen der Polarzonen wiederum gegen die Wenden, insofern die Zeichen überhaupt auf- und untergehen.



Figur 43.

7. Es besteht zwischen den Untergangszeiten (oder Aufgangszeiten) der in Bezug auf die Solstitialkolure symmetrischen Zeichen (z. B. Widder und Jungfrau, Stier und Löwe) eine Relation.

8. Es lassen sich also, wenn die Aufgangszeiten dreier Zeichen für eine bestimmte Wohnung gefunden sind, alle die Auf- und Untergangszeiten sämtlicher Zeichen für diese Wohnung finden.

Für den Fall 3 läfst sich das Wachstum in Bezug auf folgende Figur beweisen:

(Fig. 43) N Nordpol, AA Äquator, OE_3 Ekliptik, HH Horizont, $OE_1 = E_1E_2 = E_2E_3$ Tierkreiszeichen.

Stellen wir nun die Drehung der Erde durch eine entgegengesetzte Drehung des Horizontes dar, so wird, wenn wir die uns zugewandte Halbkugel betrachten,

$$\left.\begin{array}{l} OE_1 = \text{Widder} \\ E_1E_2 = \text{Stier} \\ E_2E_3 = \text{Zwillinge} \end{array}\right\} \text{im Aufgang.}$$

Wenn wir dagegen die uns abgewandte Halbkugel betrachten, so wird:

$$\left.\begin{array}{l} OE_1 = \text{Jungfrau} \\ E_1E_2 = \text{Löwe} \\ E_2E_3 = \text{Krebs} \end{array}\right\} \text{im Untergang.}$$

Die Auf- und Untergangszeiten messen wir auf dem Äquator und zwar werden sie für OE_1, E_1E_2, E_2E_3 bezw. OA_1, A_1A_2, A_2A_3.

Beweisen wir nun $OA_1 < A_1A_2 < A_2A_3$, so ist der Fall 3 erledigt. Ein Vergleich zeigt sofort, daſs in φαινόμενα 12—13 eben dieser Beweis durch Theodosios III, 8 erledigt ist, und in der That können Theodosios III, 8 oder Menelaos II, 12[2] für die beiden im obigen Falle 3 erwähnten Probleme (Untergang Krebs-Jungfrau und Aufgang Widder-Zwillinge) gelten.

Es ist nun zu beachten, daſs Euklid den Beweis des Falles 3 an den Untergang der Zeichen Krebs-Schütze knüpfte. Deswegen wandte man nach ihm zunächst seine Aufmerksamkeit auf die Aufgangszeiten derselben. So, glauben wir, entstand der Unterschied zwischen Auf- und Untergangsbestimmungen [διορισμοί ἀνατολικοί καὶ δυτικοί], wie Pappos sagt, indem man unter letzteren den schon bewiesenen Fall 3, unter ersteren den Fall 5, wo man ein bestimmtes Wachstum nicht nachweisen konnte, verstand. Anders können wir nämlich Pappos' Worte nicht verstehen: „*Über den Untergang* (von den Zeichen Steinbock-Zwillinge) *sagt er nichts; die Art des Beweises bezieht sich nämlich auf die Aufgangsbestimmungen. . . .*" Einen Beweis dafür, daſs das Interesse sich um die Aufgangsbestimmungen (Fall 5) sammelte, giebt uns Hypsikles' ἀναφορικός. Hypsikles' Annahme, daſs die Aufgangszeiten Widder-Jungfrau eine arithmetische Progression bilden, zeigt, daſs man für den Fall 5 im Gegensatz zu 3 ein Wachstum gegen den Äquator annahm, aber nicht beweisen konnte.[119])

Wollen wir Pappos glauben, gelang es erst Hipparch, den Fall 5, die διορισμοί ἀνατολικοί, zu bewältigen und zwar *mit Zahlen*, d. h. *durch Berechnung*. Er bewies, daſs die Aufgangszeiten der Zeichen Krebs u. s. w. kein bestimmtes Wachstum haben, sodaſs es Klimate giebt, wo z. B. Krebs und Löwe (vgl. Pappos) in gleicher Zeit aufgehen. Zur Berechnung dienten natürlich die Sehnenbestimmungen, die Hipparch nach Theon verfaſst haben sollen. Hipparchs Berechnungen waren also wahrscheinlich trigonometrisch, und da wir später, wie wir glauben, nachweisen können, daſs Hipparch dieselben trigonometrischen, sowohl ebenen als sphärischen Mittel zur Verfügung hatte, die Ptolemaios gebraucht, wird es demnächst zu untersuchen sein, wie Ptolemaios diese Aufgangszeiten behandelte.

---

119) Den Inhalt von Hypsikles' Werk werden wir nicht näher erörtern, weil wir doch aus diesem Inhalt keine Schlüsse ziehen können in Bezug auf den damaligen Zustand der Astronomie bezw. Trigonometrie. Der Herausgeber des ἀναφορικός hat nämlich sehr klar nachgewiesen, daſs die in diesem Werke angewandte Methode auch *nach* der Erfindung der Trigonometrie zur Berechnung von Nativitäten gebraucht wurde. Auſserdem ist es nicht genau festgestellt, ob mehr als die mathematische Einleitung des ἀναφορικός dem Hypsikles zuzuschreiben ist.

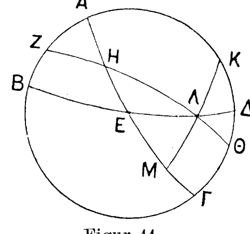
Deshalb referieren wir Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 7 (ed. Heiberg I, p. 121; ed. Halma I, p. 92)[120]):

Seien (Figur 44) $E\varDelta$ der Horizont, $H\varLambda$ die Ekliptik, $E\varGamma$ der Äquator, K der Nordpol, H der Nullpunkt des Widders, $\varLambda$ der des Stiers, sodafs also $H\varLambda$ das Zeichen des Widders ist; dann giebt der Satz des Menelaos (*Sphärik* III, 1):

$$\frac{\sin K\varDelta}{\sin \varDelta\varGamma} = \frac{\sin K\varLambda}{\sin \varLambda M} \cdot \frac{\sin ME}{\sin E\varGamma}$$

(Dreieck $KM\varGamma$ durch den Bogen $E\varLambda\varDelta$ geschnitten).

Bekannt ist hier die Polhöhe (für Rhodos, wo der längste Tag $14\frac{1}{2}$ Stunden dauert) $K\varDelta = 36^0$, ihr Komplement $\varDelta\varGamma = 54^0$, die Deklination $\varLambda M = 11^0\,39'\,30''$ (gefunden in der Deklinationstafel, Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 15), ihr Komplement $K\varLambda = 78^0 20' 30''$ und $E\varGamma = 90^0$. Mit Hülfe der Sehnentafel wird dann der unbekannte Bogen $ME = 8^0 38'$ bestimmt. MH, die der ekliptischen Länge $H\varLambda$ entsprechende Rektascension ist $27^0 50'$ (gefunden in der Rektascensionstafel, Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 8). Schliefslich wird also $\smile HE = HM \div EM = 19^0 12'$.



Figur 44.

HE ist aber das Mafs der Aufgangszeit des Bogens $H\varLambda$, d. h. des Zeichens des Widders, sodafs Ptolemaios hier ein Rechnungsbeispiel der trigonometrischen Behandlung des alten Problems giebt.

Die den Tierzeichen entsprechenden Aufgangsbogen auf dem Äquator nennt Ptolemaios (συν)αναφοραί; wir nennen sie Obliquascensionsdifferenzen; über diese Bogen hat Ptolemaios eine grofse Tafel berechnet, die er der Rektascensionstafel hinzufügt. Die Tafel[121]) giebt sowohl die Obliquascensionen als ihre Differenzen für Wohnungen, wo der längste Tag eine Dauer von $12\frac{1}{2}$, 13 u. s. w. bis zu 17 Stunden hat, und zwar für je 10^0 der Ekliptik.

Wir müssen nach Pappos' und Hipparchs eigenen Aussagen vermuten, dafs letzterer in „περὶ τῆς τῶν ιβ΄ ζῳδίων ἀναφορᾶς"[122]) auch eine Obliquascensionstafel berechnet hat, und aus drei Gründen nehme ich an, dafs das oben zitierte Rechnungsbeispiel aus Ptolemaios' *Syntaxis* direkt von Hipparch stammt.

---

120) Die Überschrift dieses Kapitels ist: „περὶ τῶν ἐπὶ τῆς ἐγκεκλιμένης σφαίρας τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ συναναφορῶν."

121) Die Überschrift dieser Tafel ist: „Κανόνιον τῶν κατὰ δεκαμοιρίαν ἀναφορῶν."

122) Vgl. Note 118.

1. Das Beispiel wendet die Polhöhe für Rhodos an, die Hipparch immer benutzte.

2. Ptolemaios' Tafel ist für je 10^0 der Ekliptik berechnet, während das zitierte Rechnungsbeispiel und die danach im folgenden von Ptolemaios näher dargelegte Methode für je 30^0 der Ekliptik, also für die Tierzeichen berechnet sind.

3. Dagegen läfst Ptolemaios eine andere trigonometrische Methode dieser Berechnung folgen, und diese zweite Methode, die er als *„leichter und methodischer"* (εὐχρηστότερον καὶ μεθοδικώτερον) bezeichnet, erklärt er durch Beispiele, die übereinstimmend mit der Tafel für Ekliptikbogen von je 10^0 gelten.

Wir werden kaum fehlen, wenn wir die erste Methode die *Hipparchsche,* die zweite die *Ptolemaiische* nennen.[123])

Ist aber diese Ansicht richtig, so folgern wir daraus, dafs Hipparchs Obliquascensionstafel wahrscheinlich nur für Zwölfteteile der Ekliptik, für die ζῴδια berechnet war. Auch sonst scheint mir dies das wahrscheinlichste; denn Pappos sagt ja, dafs Hipparch bewiesen hat, dafs es Wohnungen gebe, wo immer die Bogen des Halbkreises nach dem Krebs, welche dem Äquator am nächsten liegen, in längerer Zeit aufgehen, als die an den Berührungspunkten mit den Wendekreisen. Allerdings sind Pappos' Worte zweideutig; denn es geht nicht deutlich hervor, ob er hiermit „einen kontinuierten Zuwachs" gegen den Äquator meint, oder ob er nur einzelne Bogen von gewisser gleicher Gröfse meint. Im ersteren Falle stimmt die Bemerkung weder mit Ptolemaios' Tafel noch mit der Wirklichkeit. Im letzteren Falle stimmen Pappos' Worte auch nicht mit Ptolemaios' Tafel über die 36stel der Ekliptik. Dagegen können sie vielleicht mit einer Tafel über die Aufgangszeiten der Zwölfteteile stimmen.

Summieren wir nämlich die 36stel im Ptolemaios, so bekommen wir:

---

123) Delambre, *l'astronomie ancienne* I, p. 142 ff., hat geschlossen, dafs Hipparch trigonometrische Methoden besafs, und zwar aus dem Inhalt des *Kommentars zu Aratos* und den darin enthaltenen Hinweisungen auf die verlorenen Werke (vgl. Note 115 u. 116). In der That ist es kaum möglich, dafs Hipparch ohne Anwendung einer trigonometrischen Methode (vgl. doch Tannery, *La géométrie grecque,* p. 58) die Bestimmung der Zeit, in welcher die Konstellationen und die Zwölfteteile der Ekliptik auf- und untergehen, erledigen konnte. Im folgenden Kapitel werden wir näher erörtern, wie diese Methode war, oder vielmehr, dafs es wahrscheinlich dieselbe war, die wir auch in der *Syntaxis* finden. Wir werden ferner nachweisen, dafs Hipparch aller Wahrscheinlichkeit nach auch die von Ptolemaios benutzten trigonometrischen Mittel besafs; vgl. unten Seite 84 ff., 99 und 125 ff.

Zeichen des Tierkreises.	Obliquascensionsdifferenzen für Polhöhe $\varphi =$		
	$48^0 32'$	$51^0 30'$	$54^0 1'$
Krebs	$37^0 15'$	$38^0 0'$	$38^0 47'$
Löwe	$41^0 25'$	$42^0 53'$	$44^0 22'$
Jungfrau	$41^0 20'$	$42^0 52'$	$44^0 21'$

Wenn die Polhöhe $\varphi = 52^0 30'$ mitgenommen wäre, würde Ptolemaios für Löwe und Jungfrau gleiche Werte bekommen haben, und es ist immerhin möglich, daſs Hipparch, dessen Sehnentafel wohl kaum so genau war, wie die des Ptolemaios, für eine Polhöhe in der Nähe von $52^0 30'$ einen kontinuierten Zuwachs der Aufgangszeiten der *Tierzeichen* gegen den Äquator erhalten hat. Da Pappos' Worte indessen unklar sind und die *Kommentare* zu Aratos zeigen, daſs Hipparch sehr viele Aufgangsberechnungen (wenigstens über die Konstellationen) erledigt hat, und also mit solchen vertraut war, bleibt die Sachlage immerhin unsicher.

Eine andere Frage ist, ob Hipparchs Obliquascensionstafel, was die Klimate betrifft, eine weitere Ausdehnung als die des Ptolemaios hatte. In der Obliquascensionstafel giebt Ptolemaios (vgl. oben) nur die Klimate bis 54^0 an; in II, cap. 6 dagegen rechnet er alle Klimate bis zum Nordpol auf. Diese Klimate, die immer nach der Dauer des längsten Tages geordnet sind, wurden schon von Eratosthenes angegeben und nach ihm in der griechischen Geographie und Astronomie allgemein verwendet.

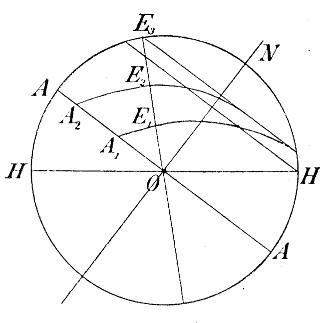
Pappos' Bericht über Hipparchs Aufgangsbestimmungen enthielt aber den Passus: „*insofern diese* (die Tierzeichen) *eine gegenseitige Zeitkomparation haben.*" Dies kann man wohl nur so verstehen, daſs Hipparch auch Aufgangsberechnungen für Wohnungen der Polarzonen gemacht hat, wo ja die Ekliptik nur teilweise auf- und untergeht.

Zum Vergleich zitieren wir aus Hipparchs *Kommentaren* folgende Stelle: „*Im Folgenden werde ich für jedes Sternbild in übersichtlicher Weise darstellen, mit welchem der 12 Tierzeichen es gleichzeitig auf- und untergeht, d. h. von welchem Grade des Zeichens an bis zu welchem als Endpunkt es aufgeht, bezw. untergeht, in den Gegenden von Griechenland, wo der längste Tag* $14^1/_2$ *Stunden lang ist* [d. h. $\varphi = 36^0$]. *Die speziellen Beweise hierfür haben wir anderen Ortes derartig zusammengestellt, daſs man fast für jeden Ort der bewohnten Erde die Unterschiede der gleichzeitigen Auf- und Untergänge verfolgen kann.*"[124])

124) Vgl. Note 116.

Zur Ergänzung dient eine Mitteilung von Strabo[125]): *„Hipparch hat, wie er selbst versichert, die in den Phainomena eintretenden Veränderungen für alle Orte der Erde, welche in dem von uns bewohnten Viertel liegen, aufgezeichnet und zwar vom Äquator bis zum Nordpol.“*

Wie dem auch sei, so hat Menelaos die Aufgänge (oder Untergänge) für die Polarzonen behandelt, und zwar in der *Sphärik* II, 13. Es dürfte dies eine indirekte Bestätigung davon sein, daſs Hipparchs Berechnungen sich auf *alle* die Klimate des Eratosthenes erstrecken.



Figur 45.

Wie wir oben den Fall 3 darstellten, so können wir es auch mit dem Falle 6 thun:

Sei nämlich (Figur 45) N Nordpol, AA Äquator, OE_3 Ekliptik, HH Horizont, $OE_1 = E_1E_2$ Tierzeichen (das dritte Zeichen E_2E_3 ragt über den Grenzkreis der immer sichtbaren Sterne hinaus). Stellen wir wieder die Erddrehung durch eine entgegengesetzte Drehung des Horizontes dar, so wird, wenn wir die uns zugewandte Halbkugel betrachten:

$$\left.\begin{aligned} OE_1 &= \text{Jungfrau} \\ E_1E_2 &= \text{Löwe} \end{aligned}\right\}\text{im Aufgang.}$$

Betrachten wir dagegen die uns abgewandte Halbkugel, so wird:

$$\left.\begin{aligned} OE_1 &= \text{Widder} \\ E_1E_2 &= \text{Stier} \end{aligned}\right\}\text{im Untergang.}$$

In Menelaos II, 13 wird es nun, allerdings ohne Anwendung von astronomischen Bezeichnungen, bewiesen, daſs $OA_1 < A_1A_2$, d. h. in den Polarzonen wachsen die Aufgangszeiten der Zeichen Krebs-Schütze, d. h. die Untergangszeiten der Zeichen Steinbock-Zwillinge, insofern die betreffenden Zeichen überhaupt auf- und untergehen, gegen die Wenden, d. h. Fall 6.

Menelaos' Beweis ist dem des Falles 3 (vgl. oben Seite 71) analog. Berechnungen kommen hier ebenso wenig wie im trigonometrischen Teile von Menelaos' *Sphärik* vor.

In der vorhergehenden Untersuchung haben wir nicht auf Hypsikles' ἀναφορικός Rücksicht genommen, und zwar weil dieses Werk nur für die Beurteilung der Erfindung der Trigonometrie Wert haben kann, wenn es wirklich dem Hypsikles zuzuschreiben ist, was ja Manitius bezweifelt. Wenn auſserdem Manitius, wie es mir scheint, darin Recht hat, daſs es lediglich astrologische Zwecke verfolgt, und auch *nach* der Erfindung der

125) Strabon, *Geographie* II, cap. 5, § 34.

Trigonometrie zu astrologischen Bestimmungen verwendet wurde[126]), so hat es in der That für uns sehr wenig Interesse darüber hinaus, dafs es Aufgangsbestimmungen und nicht Untergangsbestimmungen (wie Euklids *φαινόμενα*) enthält.

Die Frage: „Was hat denn eigentlich Menelaos in der von Pappos erwähnten astronomischen Abhandlung geleistet?" kommt nun an die Reihe.

Die Fälle 1—3 waren in Euklids *φαινόμενα* schon vollständig erledigt, und zwar Fall 2 in *φαιν.* 11, Fall 3 in *φαιν.* 12—13 und Fall 1 in *φαιν.* 14. Sie dürften schon lange vor Euklid bekannt gewesen sein; denn die abgeleiteten sphärischen Sätze standen alle in der alten Sphärik. Ferner scheint Hipparch *alle* Aufgangsbestimmungen erledigt zu haben, und dafs er die Relationen zwischen Auf- und Untergangsbestimmungen erkannt hat, dafür bürgt uns sein *Kommentar* sowie verschiedene Stellen in Geminos' *εἰσαγωγή*[127]) (Geminos ist älter als Menelaos). Es ist auch ganz undenkbar, dafs er, wenn er eine Obliquascensionstafel berechnet hat, nicht die Relation zwischen den Obliquascensionen der in Bezug auf die Solstitialkolure symmetrischen Zeichen erkannt hat (Ptolemaios beweist diese Relation II, cap. 7).[128]) Kurz, alle Fälle 1—8, die ganze Sachlage, müssen schon dem Hipparch bekannt gewesen sein, sodafs Menelaos' Arbeit jedenfalls nur eine Epigonenarbeit gewesen sein kann. In welchen Beziehungen sie also Hipparchs Werke vervollständigt oder verbessert hat, wie viele ihrer Details sich im Ptolemaios finden,[129]) können wir nicht entscheiden, auch nicht, ob das Werk rechnerisch durchgeführt oder vielmehr ein Versuch war, die von den Berechnungen bekannten Thatsachen mathematisch (im griechischen Sinne des Wortes) zu beweisen. Letzteres ist nämlich immerhin möglich. Menelaos' zweites Buch, letzter Teil des dritten und Pappos' *Kommentare*[130]) zu Euklids *φαινόμενα* beweisen uns zum Überflufs, dafs die

126) Vgl. Note 119.

127) Geminos' *Isagoge,* ed. Manitius, Leipzig 1898, p. 19 ff. und 86—98. Bei Geminos wird auch die Bedeutung der Auf- und Untergänge der Zeichen für Nativitätenberechnungen und Wetterprophezeiungen kurz erwähnt.

128) Die Summe der Aufgangszeiten zweier solcher Zeichen, wie z. B. Widder und Jungfrau, ist gleich der Summe der den Zeichen entsprechenden Äquatorbogen.

129) Den obigen Fall 1, dafs Zeichen wie Widder und Fische, Stier und Wassermann gleiche Aufgangszeiten haben, beweist Ptolemaios (*Synt.* II, cap. 7, ed. Heiberg I, p. 118) durch Menelaos I, 4.

130) Pappos VI, propp. 57 ff., ed. Hultsch, p. 604—632. Pappos giebt hier im Anschlufs an den oben zitierten geschichtlichen Bericht eine Reihe weitläufiger untrigonometrischer Sätze über die Aufgangszeiten der Tierzeichen. Er schliefst mit einer Hinweisung auf Ptolemaios' *Syntaxis.* Dieser Kommentar des Pappos ist ganz wertlos. Es liegt die Möglichkeit vor, dafs wir hier wenigstens teilweise die versprochenen Auszüge aus Menelaos' Abhandlung vor uns haben,

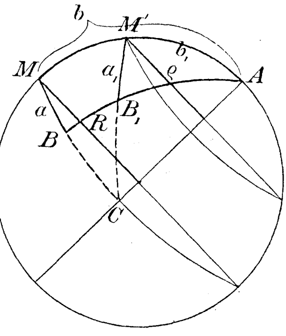
alte Behandlungsmethode auch *nach* Hipparch fortdauerte, und dafs die Bemühungen, eine ideale mathematische (d. h. unrechnerische und exakte) Darstellung der astronomischen Probleme zu erreichen, noch Jahrhunderte lang umgangen. Solche Irrsprossen zu untersuchen, hat aber für uns kein Interesse und für die Geschichte der Astronomie keinen Wert. Für uns galt es nur, durch den an sich unbedeutenden Inhalt des zweiten Buches der *Sphärik* veranlafst, die Geschichte solcher Probleme darzustellen, die die Entwickelungsmöglichkeiten in sich trugen. Und das Obliquascensionsproblem, das A und Z der vortrigonometrischen Astronomie und Sphärik, das aufserdem zu allerlei, z. B. Orientierung, Zeitbestimmung, Wetterprophezeihungen und Astrologie verwendet wurde, trug eben die Entwickelungsmöglichkeiten in sich. Es erzwang die sphärische Trigonometrie, es zwang die Griechen, ihre Vorurteile gegen annähernde Berechnungen als etwas in der hohen, exakten Mathematik Unzulässiges über Bord zu werfen; denn sie sahen, dafs sie mit diesem praktischen Problem ohne Berechnung nicht aus der Stelle kamen.

Wir erwähnten oben, dafs Ptolemaios zur Berechnung der Obliquascensionen sich auf Deklinations- und Rektascensionstafeln für die Ekliptikpunkte stützte. Finden wir, wie bei der Obliquascensionstafel, in der Astronomie oder Sphärik vor Hipparch Sätze, die sich in solche Tafeln haben entwickeln können? Diese Frage müssen wir mit „nein" beantworten. Theodosios III, 5 ist eine mathematische Umschreibung des astronomischen Satzes: *„Die Deklinationen der Ekliptikpunkte wachsen den ekliptischen Längen nicht proportional."* Ebenso ist Theodosios III, 6 eine Umschreibung des Satzes: *„Die Rektascensionen wachsen den ekliptischen Längen mehr als proportional."* In Menelaos II, 10 sind diese Sätze neu bewiesen, und an dieselben knüpfte sich, wie wir sahen, Pappos' *Kommentar* zu Theodosios, während er den *Kommentar* über die Obliquascensionen an Euklids *φαινόμενα* anknüpfte. Bedeutet dies vielleicht, dafs diese Sätze erst von Theodosios oder wenigstens nach Euklid erfunden sind? Wir haben ja die Existenz dieser Sätze in der *alten Sphärik* nicht feststellen können. Also liegt immer die Möglichkeit vor, dafs sie erst von Hipparch oder Theodosios erfunden sind, in beiden Fällen wohl zuerst in Form zweier Tafeln, denen ähnlich, die wir im Ptolemaios finden, dann später im Sinne der *alten Sphärik* umgebildet, um in die Neuausgabe derselben eingefügt zu werden. Dann wären diese Sätze zuerst als Hülfsmittel zur Berechnung der Obliquascensionen entstanden.

In der That ist dies nun unwahrscheinlich. Schon um das Jahr 283 v. Chr. bestimmte Timocharis die Lage der Fixsterne durch Deklinationen und

obwohl ich lieber annehme, dafs letztere trigonometrisch war; vgl. unten Seite 116, Note 197.

Rektascensionen oder, was auf dasselbe herauskommt, Stundenwinkel (vgl. Ptolemaios' *Syntaxis* VII, cap. 3)[131]); die dazu notwendigen Instrumente, die sogen. Armillen, waren außerdem zur Zeit des Eratosthenes schon lange bekannt.[132]) Zudem dürften sich so viele Probleme der Sonnenbewegung an die Deklinationen und Rektascensionen der Ekliptikpunkte geknüpft haben, daß die Untersuchung des Wachstums dieser Bogen sich sehr früh aufdrängen mußte. Es beruht wohl also lediglich auf einem Zufall, daß wir die Existenz von Theodosios III, 5—6 in der *alten Sphärik* nicht beweisen können. Jedenfalls liegen sie ganz innerhalb des Bereichs der *voreuklidischen Sphärik*, die Beweismittel (Theodosios I, 6, 15; II, 10; III, 1, 3, 4) waren vorhanden, und die Sätze sind den Obliquascension und Abendweite behandelnden (φαιν. 8 u. 12) ganz ähnlich.



Figur 46.

Die Erweiterungen von Theodosios III, 5—6, nämlich III, 9—10 haben kein Interesse, umsomehr aber Theodosios III, 11.

Kurz abgefaßt sagt dieser Satz: Wenn der Punkt B (Figur 46) ganz beliebig zwischen C und M gewählt ist, so wird:

$$\frac{2R}{2\varrho} > \frac{a}{a_1}.$$

Bemerken wir aber, daß $R = \sin 90^0 = \sin b$, $\varrho = \sin b_1$, so sind wir schon dem Sinussatze für rechtwinklige Dreiecke:

$$\frac{\sin b}{\sin b_1} = \frac{\sin a}{\sin a_1} > \frac{a}{a_1}\ ^{133)}$$

ganz nahe. Diesen Satz treffen wir aber in Menelaos' *Sphärik* III, 2.

Wir sehen also, daß Theodosios seine Aufmerksamkeit auf die Figur AB_1BMM_1 lenkte. Bedenkt man aber, daß $\angle\, 90^0 \div b_1 = b - b_1 = C$, so haben wir die Figur AB_1CBMM_1A, d. h. die Figur des Satzes des Menelaos. Kurz, wir spüren hier die Trigonometrie, etwas Neues, wovon wir in der alten Sphärik keine Spuren fanden, nämlich eine Bestrebung, die Verhältnisse der Bogengröße mit denen gerader Linien zu vergleichen.

131) Ptolemaios' *Syntaxis*, ed. Halma II, p. 14—20.

132) Vgl. Tannery, *l'astronomie ancienne*, p. 74—76 und R. Wolf, *Gesch. der Astron.*, p. 130.

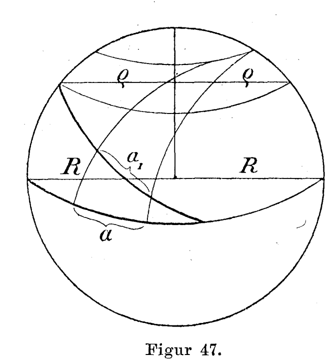
133) Theodosios' Beweis ist ganz elementar-stereometrisch und wird durch einen uralten, schon in Euklids *Optik* bewiesenen Satz (vgl. unten Seite 114) erledigt. Dieser Satz kommt dem unsrigen: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$ für $\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta$ gleich. Daß $\sin a : \sin a_1 < a : a_1$, wenn nur $a > a_1$, war schon Aristarch bekannt (vgl. unten Seite 114).

In diesem Satze wird das Verhältnis zwischen dem beliebigen Ekliptikbogen und der entsprechenden Rektascensionsdifferenz mit einem Durchmesserverhältnis verglichen, im folgenden (Theodosios III, 12) das Verhältnis zwischen dem Ekliptikbogen und der entsprechenden Obliquascensionsdifferenz. Kurz abgefaſst sagt nämlich Theodosios III, 12 (Figur 47):

$$\frac{4R}{2\varrho} > \frac{a}{a_1},$$

wo natürlich a als die a_1 entsprechende Obliquascensionsdifferenz aufgefaſst werden muſs.

Eine Bestätigung dafür, daſs wir hier einen Punkt berühren, der mit der Trigonometrie historisch in gewisser Verbindung steht, finden wir in Menelaos' drittem Buch. Da wird nämlich der erste dieser zwei Sätze (Theodosios III, 11) *trigonometrisch* bewiesen. Wie alt sind aber die Sätze? In der *alten Sphärik* erstens standen sie sicher nicht. Dagegen wäre es sehr natürlich anzunehmen, daſs Theodosios sie aus irgend einem trigonometrischen Werk abgeleitet und seiner Neuausgabe der *alten Sphärik* hinzugefügt habe. Es scheint aber, daſs Theodosios auch nicht auf diese Sätze Anspruch hat; denn nach der Gerhardschen Übersetzung von Menelaos' *Sphärik* schreibt dieser wenigstens den ersten dem Apollonios zu.[134]) Ist diese Überlieferung richtig, und aus inneren Gründen können wir keinen Einwand dagegen anführen, so sind die Sätze nicht von der schon erfundenen Trigonometrie abgeleitet, sondern stehen vielmehr mit ihrer Erfindung in der innigsten Verbindung und bezeichnen wahrscheinlich die ersten, tastenden Versuche, Bogenverhältnisse auf der Kugeloberfläche mit Verhältnissen gerader Linien zu vergleichen. Ja! wenn wir beachten, daſs die Sätze offenbar aus der Beschäftigung mit dem Rektascensions- und Obliquascensionsproblem entstanden, und daſs man, während des Studiums der vortrigonometrischen Behandlungen dieser Probleme, wieder und wieder auf eben die Figuren stöſst, die wir in den drei sphärisch-trigonometrischen Hauptsätzen in Menelaos' drittem Buch kennen lernen werden, so gewinnt die Vermutung an Wahrscheinlichkeit, daſs die Erfindung der Trigonometrie, wenigstens der sphärischen, am Ende auf derartigen Figurenbetrachtungen beruht, zu denen die Bestrebung, die widerspenstigen Obliquascensionen zu bewältigen, Anlaſs gab.



Figur 47.

134) Vgl. unten Seite 117.

Sechstes Kapitel.

Menelaos' drittes Buch und die sphärische Trigonometrie.

a. Überblick über unsere Kenntnisse der griechischen Trigonometrie.

Bevor wir zur Behandlung von Menelaos' drittem Buch übergehen, wollen wir einige Bemerkungen vorausschicken über die Kenntnis der Trigonometrie der Griechen, die man ohne Rücksicht auf Menelaos' *Sphärik* erworben hat.

Die genauesten Untersuchungen über die Trigonometrie der Alten stammen von Delambre und v. Braunmühl.[135] Delambres Darstellung ist jedoch mit Vorsicht zu benutzen, weil er die alten und die modernen Methoden so in einander mengt, daſs man schwer herausbringt, was ihm selbst und was den Alten gehört.

Sonst hat man sich meistens mit den Kenntnissen, die sich Ptolemaios' *Syntaxis* entnehmen lassen, zufrieden gestellt; mit Recht hebt aber Tannery[136] hervor, daſs man mit Ptolemaios als einziger Quelle ein sehr unsicheres Bild von der alten Trigonometrie bekommt, und v. Braunmühl[137], daſs wir an Menelaos' drittem Buch eine Quelle besitzen, die bisher nicht in der wünschenswerten Weise gewürdigt wurde.

Ein kühnes Bild der Erfindung und stufenweisen Entwickelung der Trigonometrie ist von Tannery[138] entworfen. Leider hat er doch Menelaos' drittes Buch ganz auſser Acht gelassen. Es ist dies um so mehr zu bedauern, weil er, mit seiner beneidenswerten Fähigkeit, die geschichtlichen Vorgänge auch da zu ahnen, wo die Urkunden fehlen, durch eine genaue Untersuchung von Menelaos' *Sphärik* mit so gutem Material wäre versehen worden, daſs er sicher, die Entwickelungsgeschichte der Trigonometrie vor Menelaos ganz klar zu legen, vermocht hätte.

Da wir in der folgenden Untersuchung öfters auf Ptolemaios' *Syntaxis* hinweisen müssen, werden wir gleich die trigonometrischen Grundformeln, die sich in diesem Werke finden, anführen.

135) Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne* 1—2; v. Braunmühl, *Geschichte der Trigonometrie* I.

136) Tannery, *l'astronomie ancienne,* p. 305.

137) v. Braunmühl, l. c. I, p. 15. 138) Tannery, l. c. p. 67—68.



Zur Berechnung der Sehnentafel dienen folgende Sätze aus der Trigonometrie der Ebene, die wir in die uns geläufige Formelsprache übertragen haben[139]):

1. $\text{crd.}\, x = \text{crd.}\,(360^0 \div x)$ entspricht unserer Formel $\sin a = \sin(\pi \div a)$.
2. $\text{crd.}^2\, x + \text{crd.}^2\,(180^0 \div x) = 4r^2$ entspricht unserer Formel $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.
3. der sogenannte Satz des Ptolemaios:
   $$\text{crd.}\, a \cdot \text{crd.}\,(c \div b) = \text{crd.}\, c \cdot \text{crd.}\,(a \div b) + \text{crd.}\, b \cdot \text{crd.}\,(c \div a).$$
4. $\text{crd.}\, \frac{a}{2} = \sqrt{r\,[2r \div \text{crd.}\,(180^0 \div a)]}$, entspricht unserer Formel:
   $$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 \div \cos x}{2}}.$$
5. Wenn $a > b$, wird $\frac{\text{crd.}\, a}{\text{crd.}\, b} < \frac{a}{b}$.

Einzelne andere Beispiele der Methoden zur Auflösung ebener Dreiecke geben uns Tannery (l. c. p. 305) und v. Braunmühl (l. c. p. 23 und 27), und zwar immer nach der *Syntaxis*.

Mit Hülfe von Menelaos' Satz (*Sphärik* III, 1) wird im Ptolemaios eine Reihe sphärisch-astronomischer Berechnungen erledigt. Darin finden wir *implicite* — denn es wird als trigonometrische Funktion ausschliefslich die Sehne des doppelten Bogens (ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν) verwendet, und $\sin 90^0$, d. h. $\frac{1}{2}$ crd. 180^0 wird nicht als Einheit genommen, sondern gleich r oder 60^{partes} gesetzt — folgende sphärisch-trigonometrische Formeln, die sich alle auf das bei A rechtwinklige Dreieck ABC beziehen[140]):

(I) $\sin c = \sin a \ \sin C$

(II) $\text{tg}\, c = \sin b \ \text{tg}\, C$

(III) $\cos a = \cos c \ \cos b$

(IV) $\text{tg}\, b = \text{tg}\, a \ \cos C$.

Es fehlen die wahrscheinlich erst bei den Arabern entdeckten Grundformeln:

(V) $\cos C = \cos c \cdot \sin B$

(VI) $\cos a = \cot C \cdot \cot B$.

Auch in anderen Werken von Ptolemaios bekommen wir Aufschlüsse über die griechischen Berechnungsmethoden.

139) Vgl. Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 19—22.

140) Vgl. wieder Tannery, l. c. p. 301—305; und v. Braunmühl, l. c. p. 24—25.

In einer sehr genauen Untersuchung hat Delambre[141]) nachgewiesen, dafs dieselben sphärisch-astronomischen Probleme, die in der *Syntaxis* gelöst wurden, in einem nur in lateinischer Übersetzung überlieferten Werke mit dem Titel *„Planisphärium“* erledigt sind. Die darin angewandten Methoden beruhen auf der nach Delambre schon Hipparch genau bekannten *stereographischen Projektion.*[141a]) Leider sind wir genötigt, die Planisphären aus unseren Untersuchungen auszuschliefsen.

Auch Delambre[142]) hat zuerst darauf aufmerksam gemacht, dafs in Ptolemaios' Schrift περὶ ἀναλήμματος[143]) eine Methode zur Verfertigung von Sonnenuhren vorkommt, die einer trigonometrischen gleichkommt.

Diese Methode besteht in der Orthogonalprojektion der Kugel auf drei zu einander senkrechte Ebenen, den Meridian, den Horizont und den Vertikalkreis. v. Braunmühl[144]) hat sie als eine rein graphische Methode auffassen wollen. Wir geben gern zu, dafs dieselbe anfangs rein graphisch gewesen ist, müssen aber Zeuthen[145]) darin Recht geben, dafs sie sich in Ptolemaios' Werk in eine *trigonometrische* entwickelt hat. Es werden nämlich die zu bestimmenden Gröfsen, sobald nur die Mittel zu ihrer Berechnung da sind, bereits als δεδομένα (gegebene) bezeichnet, womit auf die Möglichkeit einer Berechnung mit Hülfe der Sehnentafel hingewiesen wird. Unten werden wir nach Zeuthen ein Beispiel von der Auflösung eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks angeben, das auf diese Weise erledigt ist.

Vorerst müssen wir aber einige Bemerkungen einschalten:

Wie Zeuthen meinen wir, dafs es unberechtigt ist, in Hipparchs Worten: „διὰ τῶν γραμμῶν“[146]) eine Anspielung auf eine rein graphische Methode erblicken zu wollen. Wenn aber Zeuthen in der Bestimmung des Tagebogens eines Fixsterns im *Analemma* (ed. Heiberg p. 18)[147])

---

141) Delambre, l. c. II, p. 433—457.

141a) Tannery, l. c. p. 50—55, meint, dafs die Erfindung der stereographischen Projektion bis auf Apollonios zurückgeht, dafs aber die damit verbundene *trigonometrische* Methode dem Ptolemaios gehört.

142) Delambre, l. c. II, p. 458—503.

143) Ediert von F. Commandinus (lateinisch) 1562. Die lateinische Übersetzung hat Heiberg mit einem griechischen Mailänder-Palimpsest verglichen, Zeitschr. f. Math. u. Physik **40,** Supplement, p. 1—30.

144) v. Braunmühl, l. c. p. 10—13.

145) Zeuthen, *Note sur la trigonométrie de l'antiquité,* Bibl. math. 1900, p. 20—27.

146) Hipparchi *Commentaria,* ed. Manitius, p. 150, 4; vgl. oben Seite 69, Note 115.

147) Diese Bestimmung des Tagebogens (2α) durch die Deklination (δ) und die Polhöhe (φ) kommt der durch die Formel $\cos\alpha = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\delta$ gleich; vgl. Zeuthen, l. c. p. 26.

genau die Methode, auf die Hipparch in seinem *Kommentar* hinweist, zu finden glaubt, so schiefst er mit dieser Schlufsfolgerung doch über das Ziel hinaus.

Was die verhängnisvollen Worte: „*διὰ τῶν γραμμῶν*“ betrifft, so dürften sie eine noch allgemeinere Bedeutung haben, als sowohl v. Braunmühl als Zeuthen annimmt. Sie beziehen sich nämlich auf *jede geometrische Methode* oder *Darstellung durch Figuren* im Gegensatz zu anderen Methoden, wie z. B. instrumentalen oder rein rechnerischen. Als Beleg kann folgendes dienen: Während diese oder gleichbedeutende Worte in Ptolemaios' *Syntaxis* (ed. Heiberg I, p. 31, 5 und 32, 1) und in Theons *Kommentar* (Baseler-ausgabe p. 39, 15 und 22) offenbar auf die geometrischen Hülfssätze zur Berechnung der Sehnentafel gehen, so beziehen sie sich in Ptolemaios' *Analemma* (p. 15) auf die geometrische Orthogonalprojektion im Gegensatz zu einer rein instrumentalen Methode.

In Ptolemaios' *Syntaxis* II, cap. 9 (ed. Heiberg I, p. 142, 6)[148]) und VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104, 19)[149]) und VIII, cap. 6 (ed. Halma II, p. 108, 6 und 110, 15) gehen aber dieselben Worte *διὰ τῶν γραμμῶν* oder *γραμμικῶν δείξεων* auf die *σφαιρικαὶ δείξεις*, d. h. auf die Anwendungen von Menelaos' Satz zur Lösung sphärisch-astronomischer Probleme durch Figurenbetrachtung und Berechnung. Nun gehen aber die beiden ersteren aus der *Syntaxis* hier zitierten Stellen auf den Inhalt der Kapitel „*περὶ τῶν τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων κύκλου καὶ τοῦ ἰσημερινοῦ συναναφορῶν*“ und „*περὶ συνανατολῶν* etc. . . . *τῶν ἀπλανῶν*“, d. h. eben auf die Kapitel, die denselben Titel haben wie auch die zwei verlorenen Abhandlungen des Hipparch, auf die er selbst und Pappos hinweisen.[150])

An den betreffenden Stellen in der *Syntaxis* findet sich nun eben die Relation[151]) zwischen den Gröfsen α, φ und δ, und sie wird *direkt* auf-

148) Diese Stelle lautet: „*Ὅτι δὲ τῶν ἀναφορικῶν χρόνων τὸν προκείμενον τρόπον ἡμῖν ἐκτεθειμένων εὔληπτα τὰ λοιπὰ πάντα γενήσεται τῶν εἰς τοῦτο τὸ μέρος συντεινόντων, καὶ οὔτε γραμμικῶν δείξεων πρὸς ἕκαστα αὐτῶν δεησόμεθα οὔτε κανονογραφίας περισσῆς, δι' αὐτῶν τῶν ὑποταχθησομένων ἐφόδων φανερὸν ἔσται.*“ Die Worte, mit denen II, cap. 9 anfängt, beziehen sich auf II, cap. 7—8.

149) Diese Stelle lautet: „*Τούτων δ' οὕτως ἐχόντων, οἱ μὲν τῶν ἀληθινῶν καὶ πρὸς τὸ κέντρον τοῦ ἡλίου θεωρουμένων συνανατολῶν τε καὶ συμμεσουρανήσεων καὶ συγκαταδύσεων χρόνοι αὐτόθεν διὰ μόνων τῶν γραμμῶν ἀπὸ τῆς κατὰ τὸν ἀστερισμὸν αὐτῶν θέσεως ἡμῖν δύνανται λαμβάνεσθαι, διὰ τὸ καὶ τὰ σημεῖα τοῦ διὰ μέσων τῶν ζῳδίων, οἷς ἕκαστος τῶν ἀπλανῶν συμμεσουρανεῖ τε καὶ συνανατέλλει καὶ συγκαταδύνει, δείκνυσθαι γραμμικῶς διὰ τῶν ὑποκειμένων θεωρημάτων.*“

150) Vgl. oben Seite 70 und die Noten 115—118.

151) Diese Relation heifst in der *Syntaxis* II, cap. 3 und 7:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(90^0-\varphi)} = \frac{\sin(90^0-\delta)}{\sin\delta}\cdot\frac{\sin(\alpha-90^0)}{\sin 90^0},$$

d. h. $\sin(\alpha - 90^0) = \operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\delta$ (vgl. Note 147, vorhergehende Seite), wo α und δ

gestellt durch Menelaos' Satz, während die gleiche Relation sich im *Analemma* nur *implicite* findet.

Wir dürfen deswegen annehmen, dafs Hipparchs Worte διὰ τῶν γραμμῶν denselben Sinn haben wie in der *Syntaxis*. Somit bedeuten sie ganz einfach, dafs Hipparch in seiner Abhandlung περὶ συνανατολῶν durch Figuren auf der Oberfläche der Kugel (σφαιρικαὶ δείξεις) näher erörtert, was er im *Kommentar* lediglich an Beispielen ohne geometrische Nachweise zeigt. Eine indirekte Bestätigung dieser Annahme finden wir darin, dafs Menelaos' Satz schon *vor* Menelaos bekannt war, und dafs alle die Probleme, für die in Hipparchs *Kommentar* die Beweise fehlen, in der That in den zwei erwähnten Kapiteln der *Syntaxis* (II, 7 und VIII, 5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und der Sehnentafel gelöst werden.

Wir glauben somit, dafs Hipparch in seiner Abhandlung περὶ τῆς τῶν ιβ' ζῳδίων ἀναφορᾶς ganz wie Ptolemaios in der *Syntaxis* II, cap. 7—8 sich ein Κανόνιον τῶν ἀναφορῶν (d. h. eine Rektascensions- und Obliquascensionstafel) berechnet hat. Ferner hat er dann in seinem Werke περὶ τῶν συνανατολῶν durch Anwendung von Menelaos' Satz, d. h. διὰ τῶν γραμμῶν und mit Hülfe der Sehnentafel und der Obliquascensionstafel die Beweise und die Berechnungen, deren Resultate er im *Kommentar* angiebt, genau erörtert. Eine kurze Übersicht der von Hipparch in dieser Erörterung benutzten σφαιρικαὶ δείξεις giebt Ptolemaios dann in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 im Anschlufs an seinen Fixsternkatalog.

Damit wollen wir keineswegs behaupten, dafs die Analemmakonstruktionen neueren Datums sind als die σφαιρικαὶ δείξεις; nur stehen erstere nicht in direkter Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie, sondern bestanden vielleicht lange vorher als eine mehr primitive, rein graphische Methode. Später, da die Sehnentafeln vorhanden waren, führte man bei den Sonnenuhrkonstruktionen die durch die Tafeln bestimmbaren Gröfsen auf diese zurück, indem man sie als „gegebene" bezeichnete. Dafür spricht sowohl die ganze Abfassung und Form des *Analemmas* als auch der Umstand, dafs die σφαιρικαὶ δείξεις im Gegensatz zu den Analemmakonstruk-

sich auf einen Punkt der Ekliptik beziehen. — Diese Berechnung haben wir schon oben Seite 73 genau zitiert und dem Hipparch beigelegt. — In der *Syntaxis* VIII, cap. 5 wird genau dieselbe Relation gefunden, nur beziehen sich α und δ diesmal auf einen Fixstern, und die Relation dient dazu, „die Punkte des Äquators und der Ekliptik, die gleichzeitig mit den Fixsternen auf- und untergehen, mit Hülfe der gleichzeitig kulminierenden Punkte zu finden", vgl. *Syntaxis,* ed. Halma, II, p. 106, 14—18. Es ist aber dies eine Aufgabe, die Hipparch lösen mufste, um die Zahlenwerte in seinem Kommentar ausfindig zu machen, wenn er überhaupt trigonometrische und nicht rein instrumentale Methoden benutzte.



tionen direkt auf Berechnung abzielen und auch von Ptolemaios der Sehnentafel direkt beigefügt werden.

Die Berechnungen, die Zeuthen im *Analemma* gefunden und nachgewiesen hat, kommen folgenden modernen Formeln gleich:

A. für das rechtwinklige sphärische Dreieck den obigen aus der *Syntaxis* herausgezogenen I, II und IV (vgl. oben Seite 82).

B. für das schiefwinklige Dreieck den zwei Formeln:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

und

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin b \sin A}{\cos b \sin c \div \sin b \cos c \cos A},$$

die sich beide auf das Dreieck „Südpol — Nadir — Sonne (auf der südlichen Halbkugel über den Horizont gelegt)" beziehen, d. h. auf ein Dreieck mit den Seiten $90^0 \div \delta$, $90^0 + h$ und $90^0 \div \varphi$, wo die den zwei erstgenannten Seiten gegenüber liegenden Winkel ω und $180^0 \div t$ berechnet werden (δ = die Deklination der Sonne, h = die Sonnenhöhe, φ = die Polhöhe, ω = das Azimuth der Sonne, t = der Stundenwinkel derselben).

Bemerkenswert ist, dafs Ptolemaios in der *Syntaxis* VIII, cap. 5 (ed. Halma II, p. 104—5) mit Hülfe von Menelaos' Satz und einer geschickten Anwendung der Deklinationstafel eine ganz ähnliche Auflösung eines schiefwinkligen Dreiecks erreicht hat. Er findet nämlich hier die Deklination und Rektascension eines durch Breite und Länge gegebenen Sterns, d. h. er löst das Dreieck Stern — Weltpol — Pol der Ekliptik. Es mufs aber immer scharf betont werden, dafs bei diesen Auflösungen schiefwinkliger Dreiecke weder im *Analemma* noch in der *Syntaxis* von einer Kenntnis der betreffenden allgemeinen Formeln die Rede sein kann.

Die Berechnungen von ebenen Dreiecken, die wir in Ptolemaios' *Syntaxis* finden, hat uns v. Braunmühl (l. c. p. 26—27) dargelegt. Wir gehen nicht näher auf diese ein, weil wir sie im folgenden nicht gebrauchen.

Eine andere damit in Verbindung stehende Frage werden wir dagegen kurz erörtern, und zwar die, ob die Griechen, wie Tannery[151a]) vermutet, jemals die Sinusfunktion statt der doppelten Sehne eingeführt haben.

Wenn wir Tannerys Hypothese nicht beistimmen können, so geschieht es nicht etwa, weil wir keine Spuren von einer Sinusfunktion, weder bei Ptolemaios noch bei Menelaos, gefunden haben, sondern vielmehr weil wir keinen Grund sehen, diese Hypothese aufzustellen; denn:

151a) Tannery, *l'astr. anc.* p. 63—67.

1. solange die Cosinus- und Tangensfunktionen doch nicht eingeführt waren, ist der Vorteil des Sinuses statt der Sehne praktisch sehr gering;

2. finden wir die Annahme, dafs die Sehnentafeln die Sinustafeln hätten verdrängen sollen, in jeder Beziehung sehr unwahrscheinlich, um so mehr, weil wir (vgl. oben Seite 79—80 und unten Seite 117—118)

3. guten Grund haben anzunehmen, dafs die Einführung der Sehne als trigonometrische Funktion in inniger Verbindung mit der Erfindung der Trigonometrie steht.

Es scheint uns deswegen viel natürlicher, anzunehmen, dafs ein anderes Volk als die Griechen, und zwar ein Volk, das mehr Sinn für praktische Rechnung hatte als diese und durch keine Tradition gebunden war, diese Neuerung gemacht hat. Dies trifft nun gerade in Bezug auf die Inder zu. Deswegen können jedoch die indischen Sinustafeln von griechischen Sehnentafeln ihren Ursprung haben, obwohl wir bezweifeln, dafs dies der Fall ist.

Noch eines ist hier zu bemerken: Die Weise, auf welche Ptolemaios die Sehnentafeln zur Auflösung ebener Dreiecke verwendet, zeigt einerseits, wie leicht die Nachteile, die die Sehnentafeln den Sinustafeln gegenüber aufweisen, sich umgehen lassen und in der That umgangen worden sind, macht es aber andererseits fast undenkbar, dafs die Sinusfunktion dem Ptolemaios bekannt gewesen sei.

Greifen wir aus den zahlreichen Beispielen die Auflösung von Dreieck BED mit dem rechten Winkel B und $\angle E = 51^0 30'$ (Ptolemaios, *Syntaxis* XIII, cap. 7, ed. Halma II, p. 419—420) heraus: $\angle BED$ mifst dann, sagt Ptolemaios, 103 von solchen Graden, von denen 360 Grad 2 Rechte betragen (*τοιούτων ϱγ', οἵων αἱ δύο ὀϱθαὶ τξ*), folglich, fährt Ptolemaios fort, ist das Verhältnis der Katheten 94 : 75 von solchen Teilen, deren **120** auf die Hypotenuse gehen, d. h. Ptolemaios erreicht, wenn er immer die Winkel und gleichzeitig auch die Hypotenuse doppelt rechnet, die Sehnentafel ganz wie eine Sinustafel verwenden zu können; denn in der Sehnentafel entsprechen 103^0 und 77^0 bezw. 94^{pertas} und 75^{partes}.

Ursprünglich ist Ptolemaios zu diesem Verfahren gekommen durch Umschreibung des Dreiecks mit einem Kreis, in welchem die Hypotenuse dann Durchmesser wird. Das zeigt uns nämlich die erste Auflösung ebener Dreiecke in der *Syntaxis* (II, cap. 5, ed. Heiberg, I, p. 99—100); v. Braunmühls Darstellung (I, p. 26) ist somit ganz zutreffend. Später aber wird in der *Syntaxis* die Umschreibung nicht mehr erwähnt; alle Gröfsen werden gleich verdoppelt, das Nachschlagen in der Sehnentafel direkt erledigt, ja sogar ganze Rechnungen mit den doppelten Werten durchgeführt. Die Griechen, denen dieses Verfahren nun einmal geläufig war, fanden keinen Grund, Neuerungen einzuführen; die Inder dagegen, die an die Tradition nicht



gebunden waren, und denen diese Methode schwerfällig erscheinen mufste, hatten guten Grund, die scheinbar lediglich formelle Verbesserung zu machen. Dafs diese Verbesserung in ihren Konsequenzen sich als eine sehr wichtige erwies, indem sie die Einführung der Cosinus- und der Tangensfunktion mit sich führte, hätte man ja im voraus nicht wissen können.

b. Der Inhalt von Menelaos' drittem Buch.

III, 1. (sog. Menelaos' Satz):

Es liegen von diesem Satze mehrere Versionen vor, die, obwohl der Grundgedanke der Beweisführung immer derselbe bleibt, doch sehr verschieden sind. Sie teilen sich in zwei Hauptgruppen, nämlich:

1. Die Redaktion in der Maurolycusausgabe (Quelle unbekannt), die arabische Rezension von Abu-Nasr-Mansur (Cod. Leid. 930), Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13 (ed. Heiberg I, p. 74 ff., ed. Halma I, p. 54 ff.) und Theons *Kommentar* zu Ptolemaios (Baselerausgabe p. 66 ff.). Zwar weichen diese Redaktionen in Umfang und Text von einander ab; die Hauptfigur (wie deren Buchstaben) ist aber genau dieselbe.

2. Die Redaktion in Gerhards Übersetzung und in der Halleyausgabe (d. h. in Jacob ben Machirs hebräischer Übersetzung). Die Hauptfigur hat hier ganz andere Buchstaben als in den Redaktionen der ersten Gruppe.

Ich ziehe unbedingt die Redaktion im Cod. Leid. 930 (Abu-Nasr-Mansur) vor, die ich aus folgenden Gründen für die ursprüngliche Redaktion des Menelaos betrachte:

1. In dieser Redaktion kommt ein Spezialfall vor, den ich weder im Ptolemaios noch im Theon finde, der aber in den Gerhardschen und Jacob ben Machirschen Übersetzungen wieder vorkommt, obwohl mit anderen Figurenbuchstaben und einem ziemlich abweichenden Text.

2. Die Figurenbuchstaben fangen in dieser Redaktion nach griechischer Gewohnheit mit A, B, Γ u. s. w. an und stimmen mit denen im Ptolemaios überein.

3. Die Beweisführung im Ptolemaios kann als eine verkürzte Wiedergabe dieser Redaktion aufgefafst werden, was dagegen nicht für die Redaktion in der Maurolycusausgabe oder für die der zweiten Gruppe zutrifft.

4. Wenn wir die Überlieferung von Nasr-Mansur als echt annehmen, so können wir gewisse Erweiterungen des Satzes im Theon dem Menelaos zuschreiben, während umgekehrt Nasr-Mansurs Redaktion sich nicht als eine Kompilation aus Theon erklären läfst, weil der oben erwähnte Spezialfall, der den Menelaosredaktionen eigen ist, im Theon fehlt.

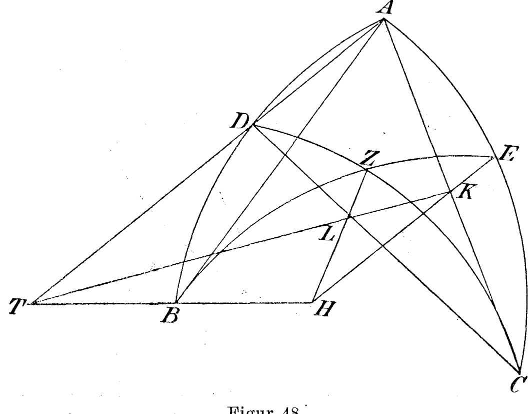
Nach Abu-Nasr-Mansur ist die Beweisführung diese[152]):

Menelaos III, 1 (Figur 48):

Zwischen zwei größten Kreisbogen ADB und AEC schneiden sich zwei andere DZC und BZE in Z. Alle vier Bogen sind kleiner als ein Halbkreis. Zu beweisen ist

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA}. \text{ [152a]}$$

Beweis: Sei H das Kugelzentrum. Man ziehe die Halbmesser HZ, HB, HE und die Gerade AD. — AD und BH, die in derselben Ebene liegen, sind entweder parallel oder nicht.



Figur 48.

Wenn sie nicht parallel sind, so schneiden sie sich entweder in der Richtung D oder in der Richtung A.

I. *AD und BH schneiden sich in der Richtung D*, und zwar in T.

Man ziehe die Geraden AKC und DLC. Nun liegen die Punkte K, L und T auf einer Geraden, nämlich der Schnittlinie der Ebenen, die durch den Bogen EZB und das Dreieck ACD bestimmt sind.

Zwischen den zwei Geraden AC und AT schneiden sich also zwei andere CD und TK in L. Folglich wird [Menelaos' Satz in der Ebene]

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CL}{LD} \cdot \frac{DT}{TA},$$

aber:

$$\left.\begin{aligned} \frac{CK}{KA} &= \frac{\sin CE}{\sin EA} \\ \frac{CL}{LD} &= \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \end{aligned}\right\}$$ (Ptol. *Synt.* ed. Heiberg I, p. 70),

152) Mitteilung von R. Besthorn.

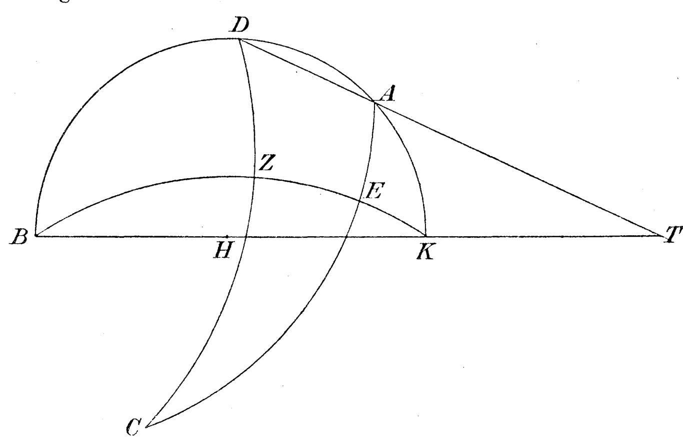
152a) In dem ursprünglichen Menelaostext stand sicher wie in Gerhards Übersetzung: $\frac{\text{crd.}\,2\,CE}{\text{crd.}\,2\,EA} = \frac{\text{crd.}\,2\,CZ}{\text{crd.}\,2\,ZD} \cdot \frac{\text{crd.}\,2\,DB}{\text{crd.}\,2\,BA}$. Wie die Araber und Halley werden wir die „corda dupli arcus" mit „sin" ersetzen. Es kommt nämlich auf dasselbe heraus, da Menelaos fast immer mit Verhältnissen operiert. Wenn im folgenden in der Wiedergabe von Menelaos' 3. Buch die Sinusfunktion benutzt ist, muſs der Leser sich also immer erinnern, daſs Menelaos sicher wie Ptolemaios ἡ ὑπὸ τὴν διπλῆν gesagt hat.

$$\frac{DT}{TA} = \frac{\sin DB}{\sin BA}$$ (Ptol. *Synt.* ed. Heiberg I, p. 72),

also:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Beweis finden wir in Ptolemaios *Syntaxis*[153]) wieder; da stehen auch die nötigen Hülfssätze aus der Geometrie der Ebene. Diese Hülfssätze sind



Figur 49.

im Menelaos als bekannt vorausgesetzt. Sie standen also in einem anderen Werk von Menelaos selbst oder von einem seiner Vorgänger.

II. (Figur 49.) *AD und BK schneiden sich in der Richtung A*, und zwar in T.

Wir verlängern die Bogen BDA und BZE bis zum Schnitt auf dem Durchmesser BH in K.

Dann wird (mit Anwendung des ersten Teils des Beweises auf die Figur $DAKECZ$):

$$\frac{\sin CZ}{\sin ZD} = \frac{\sin CE}{\sin EA} \cdot \frac{\sin AK}{\sin KD},$$

und durch Umtausch der Glieder:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin KD}{\sin AK}.$$

Nun ist $\sin KD = \sin DB$ und $\sin KA = \sin BA$[154]), also wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Teil des Beweises fehlt sowohl im Ptolemaios als bei Gerhard.

153) *Syntaxis* I, cap. 13, ed. Heiberg I, p. 74—76.

154) d. h. $\sin(\pi \div a) = \sin a$; vgl. die Formel 1 Seite 82 und Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Heiberg I, p. 36; vgl. Theons *Kommentar*, Baselerausgabe p. 69 unten.

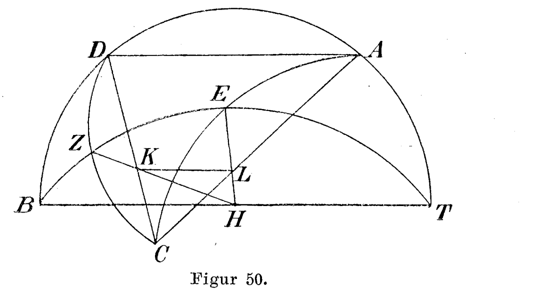
III. (Figur 50.) *Wenn* $AD \nparallel BK$, so verlängert man die Bogen BDA und BZE bis zum Schnitt auf BH in T, zieht die Geraden AC und HE, die sich in L, DC und ZH, die sich in K schneiden. Der Schnitt der Ebenen BLT und ADC wird dann $\nparallel AD$; also haben wir

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CK}{KD}\text{[155]} \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD};\text{[156]}$$

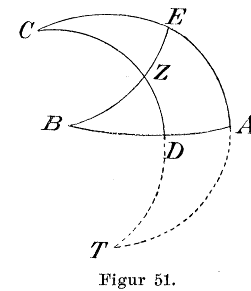
weil aber $\sin DB = \sin BA$[157]), so wird:

$$\frac{\sin CE}{\sin EA} = \frac{\sin CZ}{\sin ZD} \cdot \frac{\sin DB}{\sin BA} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Spezialfall, der in allen mir bekannten Menelaosredaktionen vorkommt, treffen wir sonst nicht in der griechischen Litteratur.



Figur 50.



Figur 51.

IV. (Figur 51.) *In derselben Figur $ADBZCE$ gilt auch die Proportion*

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE}.$$

Wir verlängern die Bogen CA und CD bis zum Schnitt in T; dann wird (wegen des eben Bewiesenen)

$$\frac{\sin TA}{\sin AE} = \frac{\sin TD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE};$$

nun ist $\sin TA = \sin CA$ und $\sin TD = \sin CD$[158]), also auch:

$$\frac{\sin CA}{\sin AE} = \frac{\sin CD}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin ZB}{\sin BE} \quad \text{q. e. d.}$$

Diesen Satz finden wir im Ptolemaios[159]) ohne Beweis referiert, im Theon[160]) mit einem von III, 1^{I-III} unabhängigen Beweis. —

155) Euklid, *Elementa* VI, 2.
156) Ptolemaios, *Syntaxis,* ed. Heiberg I, p. 70.
157) Vgl. Formel 1, Seite 82 oben.
158) Vgl. Formel 1, Seite 82 oben.
159) Ptolemaios, *Syntaxis,* ed. Heiberg I, p. 76.
160) Baselerausgabe, p. 67—68. In Tâbit ibn Korrah, *De figura sectoris* spielt dieser Beweis von Theon eine große Rolle.

Nach moderner Auffassung umfaſst Menelaos' Satz vier Fälle, indem die Figur auf vierfache Art als ein durch eine Transversale geschnittenes Dreieck betrachtet werden kann.

Anscheinend hat Menelaos nur zwei Fälle behandelt, und zwar 1) den Fall des durch EZB geschnittenen groſsen Dreiecks ADC, und 2) den des durch ADB geschnittenen kleinen ECZ; indem er aber sowohl den Fall, daſs die Gerade AD den Durchmesser durch B einmal in der Richtung D, dann in der Richtung A schneidet, als auch den, daſs diese Geraden parallel sind, behandelt hat, so hat er den Satz so verallgemeinert, daſs er ohne weiteres das groſse Dreieck ADC mit dem anderen groſsen AEB und das kleine ECZ mit dem kleinen DBZ vertauschen kann.

Es zeigt sich also, daſs im Menelaos *der Satz* ***allgemein*** *bewiesen ist, und zwar in der knappsten Form, daſs dann Ptolemaios aus diesem Beweis das für seinen Zweck Notwendige ausgewählt hat, während Theon*[161]) (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 16) *den Beweis mit überflüssigen Fällen, die sich auf die schon bewiesenen zurückführen lassen, beschwert hat*, ein Verfahren, das seinen Höhepunkt in den 18 modi bei Tâbit ibn Korrah[162]) erreicht.

Wie so oft, zeigt es sich auch hier, daſs die älteste Textform die exakteste ist.

Ob der Satz des Menelaos dem Menelaos angehört, wollen wir später erörtern, doch bemerken wir gleich, daſs er nicht als Dreieckssatz formuliert ist, und daſs die allgemeine Formulierung (ἡ πρότασις) fehlt. Es könnte das ein Zeichen davon sein, daſs der Satz ursprünglich in einem astronomischen Werke bewiesen und in Menelaos' *Sphärik* übergegangen ist.

Menelaos III, 2 (Figur 52):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ

$$\angle A = D \quad \text{und} \quad \begin{cases} \angle C = Z \\ \quad \text{oder} \\ \angle C + Z = 180^0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin BC} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}. \tag{1}$$

Beweis: Sei $\smile AH = DZ$ und $\angle AHT = EZD$, so wird $\triangle EZD \cong \triangle THA$ (I, 14) d. h. $\smile TA = DE$, $\smile HT = EZ$.

161) Baselerausgabe, p. 68—70.

162) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 46; v. Braunmühls Vermutung, daſs das „lemma in 18 modis" von Tâbits Schrift herstammt, wird durch die Untersuchung von Cod. Arsenal. 1035 bestätigt; vgl. oben Note 54.

Je nachdem $\angle AHT = C$ oder $\angle AHT + C = 180^0$, wird $\smile CK + KH = 180^0$ oder $\smile CK = KH$ (I, 10), d. h. in beiden Fällen $\sin CK = \sin KH$, und da

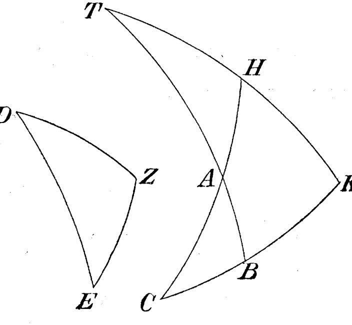
$$\frac{\sin KC}{\sin CB} = \frac{\sin KH}{\sin HT} \cdot \frac{\sin TA}{\sin AB} \quad \text{(III, 1)},$$

so wird

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin TA}{\sin HT}, \text{ d. h. } = \frac{\sin DE}{\sin EZ} \quad \text{q. e. d.}$$

II. Umgekehrt, wenn $\angle A = D$ und $\frac{\sin AB}{\sin CB} = \frac{\sin DE}{\sin EZ}$, folgt, daſs $\angle C = Z$ oder $\angle C + Z = 180^0$.[163])

Für $\angle A = D$ und $\angle C = Z = 90^0$ [der Spezialfall, den Menelaos selbst meistens verwendet] hat man, wie v. Braunmühl gezeigt hat, den später unter dem Namen „*Regula quattuor quantitatum*“ bekannten Satz, worüber siehe v. Braunmühl, *Gesch. der Trig.* I, p. 17, 47, 58—60, 81, 127—129 u. s. w.



Figur 52.

Für $DE = 90^0 (= DZ)$ und $\angle C = Z = 90^0$ geht (1) in die Grundformel I für rechtwinklige Dreiecke über.

Es ist für Ptolemaios' Behandlung der sphärisch-trigonometrischen Probleme charakteristisch, daſs er mehrmals den Satz des Menelaos anwendet, auch da, wo Menelaos III, 2 direkt anwendbar ist, so daſs er ganz eigentlich die regula quattuor quantitatum (III, 2) aufs Neue beweist, statt auf sie als schon bekannt hinzuweisen. Es ist dies um so auffallender, weil die Rechnung durch Anwendung von III, 2 mit viermaligem Nachschlagen in der Sehnentafel erledigt wird, während die Anwendung von Menelaos' Satz immer sechsmaliges fordert. Als Beispiel dient folgendes:

Zur Berechnung der Deklinationstafel würde Menelaos III, 2 die Formel:

$$\frac{\sin \lambda}{\sin \delta} = \frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon}$$

(λ die Länge, δ die Deklination des Ekliptikpunktes und ε die Neigung der Ekliptik) gegeben haben, die für die Berechnung leichter ist als

$$\frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90^0}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin 90^0},$$

die wir bei Ptolemaios (*Syntaxis* I, cap. 14) finden.

163) Das Corollar zu III, 2 in der Halleyausgabe ist vom Herausgeber hinzugefügt.

Ähnliche Beispiele finden sich in der *Syntaxis* II, cap. 3 und cap. 11.

Es liegt nahe, anzunehmen, dafs Ptolemaios in diesen Fällen eine ältere Methode nachgeahmt hat, ohne auf die von Menelaos eingeführte Erleichterung Rücksicht zu nehmen.

Menelaos III, 3 (Figur 53):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \qquad \angle C = Z \gtrless 90^0,$$

und H und T die Pole der Bogen AC und DZ sind, dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AC} = \frac{\sin ED}{\sin DZ} \cdot \frac{\sin BH}{\sin ET}.$$

Wir legen nämlich die Dreiecke auf einander mit $\angle Z$ auf $\angle C$, und der Satz ist eine direkte Folge von III, 1.[164])

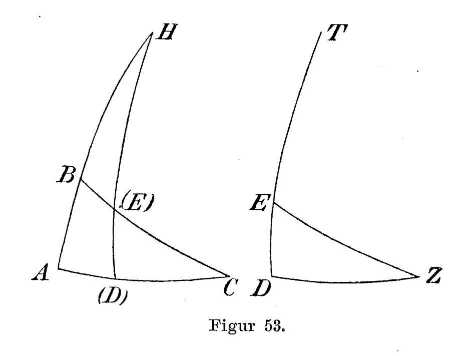
Indem $\sin BH = \cos AB$ und $\sin ET = \cos ED$, sagt der Satz, modern umgeschrieben:

$$\frac{\operatorname{tg} AB}{\operatorname{tg} ED} = \frac{\sin CA}{\sin CD}. \quad (1)$$

Es ist dies die *„Tangenten- oder Schattenregel“* der Araber (vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 17—18, 58, 67—69 u. s. w.).

Für $\smile CA = BC = 90^0$ geht (1) in die Grundformel II für rechtwinklige Dreiecke über.

Auch die Anwendung dieses Satzes vermeidet Ptolemaios und beweist ihn jedesmal aufs Neue durch Menelaos' Satz. Beispiele finden sich in der *Syntaxis* I, cap. 16; II, cap. 3 und VIII, cap. 5. In der Berechnung macht es jedoch, solange die Tangensfunktion nicht aufgestellt und eine Tangententafel nicht berechnet ist, keinen Unterschied, ob III, 1 oder III, 3 verwendet wird.



Figur 53.

Menelaos III, 4 (Figur 54):

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABC, DEZ, wo $\angle A = D$ und $\angle C = Z$, die Höhen $\smile BH$ und $\smile ET$ gezogen sind, so ist das Sinusverhältnis der Basensegmente gleich, d. h.

$$\frac{\sin AH}{\sin DT} = \frac{\sin CH}{\sin ZT}.$$

164) Das Corollar zu III, 3 in der Halleyausgabe rührt von Halley selbst her.

Es ist dies eine direkte Folge von III, 3, da beide Verhältnisse gleich $\frac{\operatorname{tg} BH}{\operatorname{tg} ET}$ sind.

Menelaos III, 5 (Figur 55):

Obwohl der Text dieses Satzes sowohl in der Rezension des Nasr-Mansur als in der Gerhardschen Übersetzung stellenweise verdorben ist, läſst sich der Beweis durch Vergleich dieser zwei Redaktionen mit Sicherheit wiederherstellen, und zwar so:

Wenn in den sphärischen Dreiecken ABG und DEZ gegeben ist:

$$\angle A = D = 90^0, \quad \angle G = Z, \quad \smile AG < 90^0, \quad \smile DZ < 90^0,$$

dann ist zu beweisen:

$$\frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)}.$$

Beweis: Sei nämlich

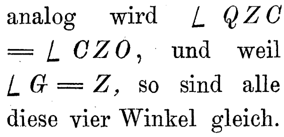
$$\smile LG = GK = AG$$

und analog

$$\smile FZ = ZQ = DZ.$$

Figur 54.

Mit G und Z als Pole ziehen wir die gröſsten Kreise bezw. $NSMH$ und $ROCT$. Denken wir uns die Bogen AS und AM verlängert bis zum Schnitt in A', so wird $\smile KG + GA' = 180^0$, und da $\smile GM = 90^0$, so wird $\angle KGM = \angle MGS$ (I, 26) und



analog wird $\angle QZC = \angle CZO$, und weil $\angle G = Z$, so sind alle diese vier Winkel gleich.

Analog erhält man:

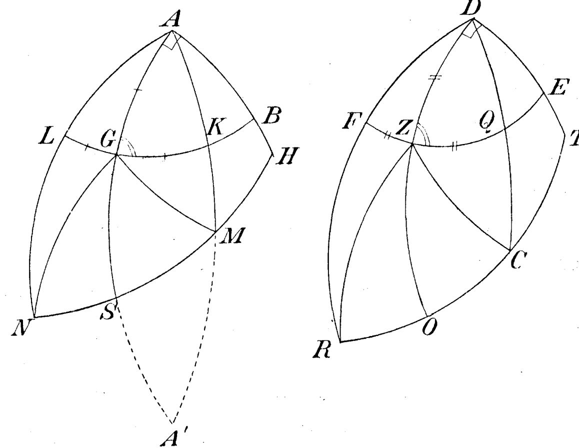
$$\angle LGN = NGS = FZR = RZO$$

und somit durch Kongruenz

$$\smile NS = RO, \quad \smile SM = OC, \quad \smile MH = CT,$$

also auch

$$\smile NH = RT.$$



Figur 55.

Da nun die zwei Bogen BL und HN durch die vier Bogen AH, AM, AS und AN geschnitten werden, so gilt:

$$\frac{\sin BL}{\sin LG} \cdot \frac{\sin GK}{\sin KB} = \frac{\sin HN}{\sin NS} \cdot \frac{\sin SM}{\sin MH}. \qquad (1)$$

Da aber $\smile GK = LG$, werden diese Verhältnisse

$$= \frac{\sin BL}{\sin KB} = \frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)}.$$

Analog erhält man:

$$\frac{\sin EF}{\sin FZ} \cdot \frac{\sin ZQ}{\sin QE} = \frac{\sin TR}{\sin RO} \cdot \frac{\sin OC}{\sin CT} \qquad (2)$$

$$= \frac{\sin EF}{\sin QE} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)}.$$

Die zwei Reihen von Verhältnissen (1) und (2) sind aber gleich, weil $\smile HN = TR$, $\smile NS = RO$ u. s. w. (s. oben), d. h.

$$\frac{\sin (BG + GA)}{\sin (BG \div GA)} = \frac{\sin (EZ + ZD)}{\sin (EZ \div ZD)} \quad \text{q. e. d.}$$

Wie v. Braunmühl[165]) schon bemerkt hat, liegt in diesem Satz die moderne Formel

$$\frac{\sin (a + b)}{\sin (a \div b)} = \frac{1 + \cos C}{1 \div \cos C},$$

da es ja schon bewiesen ist, daſs das Verhältnis $\frac{\sin (a + b)}{\sin (a \div b)}$ in zwei Dreiecken mit gleichem C gleich wird (die Voraussetzung $\angle A = D = 90^0$ wird in Menelaos' Beweis scheinbar nicht gebraucht).

Das interessiert uns aber nicht so sehr, wie die Voraussetzung, die in der Behauptung der Gleichheit der Verhältnisse (1) [oder (2)] liegt.

Es ist nämlich dies nichts anderes als *die* ***Projektivität der Doppelverhältnisse auf der Kugel,*** *die hier ohne irgend einen Beweis als bekannt vorausgesetzt wird.* Nicht nur ist es an sich interessant, zu erfahren, daſs dieser Satz den Griechen bekannt war, sondern wir können für die Geschichte der Trigonometrie aus der frühen Existenz dieses Jahrhunderte lang begrabenen Satzes wichtige Schlüsse ziehen.

Die eigentümliche Überlieferungsgeschichte dieses Satzes zeigt uns, wie er nach und nach verschollen ist.

Die Araber, die den Satz ohne Erklärung vorausgesetzt fanden, verzweifelten daran, ihn verstehen zu können.

Abu-Nasr-Mansur sagt[166]): „*In Bezug auf diesen Beweis drückt sich Menelaos sehr unklar aus, entweder weil er ein Liebhaber von Schwierigkeiten war, um über sein Buch Dispute zu erregen, oder aber weil er im Besitz von allem war, was er zum Beweise notwendig hatte.*" Nach dieser

165) v. Braunmühl, l. c. p. 18.

166) Mitteilung von R. Besthorn.

Bemerkung giebt Nasr-Mansur dann einen anderen Beweis von eigener Erfindung.

Al-Harawi[166a]) giebt nur verstümmelte Andeutungen von Menelaos' Beweis, fügt mittels des Sinussatzes einen anderen von sich selbst hinzu und sagt: *„Es ist dies der Beweis, den ich zu diesem Satze konstruiert habe, und auf welchen Menelaos anspielt, indem er durch Postulate noch mehr beweist."*

Gerhard von Cremona, dessen Übersetzung sonst von mathematischen Ungenauigkeiten ziemlich frei ist, bringt eben in diesem Beweise mehrere Proportionen, die falsch sind, indem er hier den Beweis offenbar ebensowenig verstanden hat wie der Rezensent der ihm vorliegenden arabischen Handschrift.

Einem anonymen Kommentator der Gerhardschen Übersetzung (aus dem 13. Jahrh., wahrscheinlich **Campanus**[167])) ist es bei diesem Beweise zu heifs geworden, und von da an kommentiert er Menelaos' *Sphärik* nicht weiter.

In dem Exemplare der Gerhardübersetzung, das **Georg v. Peurbach** und Regiomontanus[168]) haben abschreiben lassen, werden die Fehler einfach abgeschrieben.

Dafs **Regiomontanus** sich mit dem Verständnis des Satzes III, 5 im Menelaos gequält, zeigt ein Brief, den er im Jahre 1464 (Venedig, Februar?) dem italienischen Astronomen Bianchini schickte, und zwar als Antwort auf mehrere von demselben gestellten Fragen. Es kommt nämlich hier folgender Passus vor (vgl. Murr, *Memorabilia bibliothecarum Norimbergensium* I, p. 116—118):

„Vestrum responsum erit, hanc positionem (von 2 auf bestimmte Weise gegebenen Sternörtern) *esse impossibilem, et confiteor me ex proposito ita supposuisse, ut intelligerem, si apud vos esset Menelaus de sphericis figuris,* ***in cuius tertio libro quinta propositio iam diu me suspensum tenuit, quotquot reperio exemplaria omnia in hac parte imminuta sunt;*** *alii vocant Mileum, ne nomen vos aliud persva-*

166a) Nach Mitteilung von R. Besthorn.

167) Im Cod. S. Marco Venetiarum XI, 90 (vgl. oben Seite 11) steht zuerst (fol. 1—35) Theodosios' *Sphärik* „cum commento Campani", gleich danach Menelaos' *Sphärik* (fol. 35—84) mit einem Kommentar, der spätestens um das Jahr 1300 verfafst worden sein kann.

168) Dieses Exemplar liegt im Cod. S. Marco Venet. XI, 63 vor (vgl. oben Seite 11). Diese Handschrift enthält aufserdem *„Epitome Almagesti"*, verfafst von Peurbach und Regiomontanus. Es ist dies die älteste der mir bekannten Handschriften, wo die Gerhardsche Übersetzung: „Milei *de speris*" mit der *Sphärik* des Menelaos identifiziert wird.

deat, alium esse librum quam vos putatis; ***sed Menelaus vere dicitur*** .....". Aus diesen Worten schliefsen wir, dafs Regiomontanus schon während seines ersten Aufenthaltes in Rom (1461) sich mit Gerhards Übersetzung von Menelaos' *Sphärik* bekannt gemacht hat, und dafs er (oder vielleicht schon Georg v. Peurbach oder Georg v. Trapezunt) mit Hülfe von Theons *Kommentar* (vgl. oben Seite 5, 20 und 22 ff.) die Identität der Namen Menelaos und Mileus festgestellt hat; denn Georg v. Trapezunt hatte schon vor dem Tode Georgs v. Peurbach (1461) eine Bearbeitung von Theons Werk erledigt (vgl. Cantor II, p. 193—194 und 234—237). Wir sind auch zu der Annahme berechtigt, dafs eben die Kenntnis der *Sphärik* des Menelaos den Regiomontanus zu seinem berühmten Werk: *„De triangulis omnimodis"* veranlafste; denn, wie aus dem obigen Passus hervorgeht, hatte er im Jahre 1464 schon lange die *Sphärik* des Menelaos studiert, kannte mehrere Handschriften derselben und hatte offenbar Menelaos' Werk bei sich in Venedig im Jahre 1464. Aus anderen Quellen wissen wir, dafs er sein Werk *de triangulis* in Rom 1461 zu verfassen anfing und es in Venedig weiter bearbeitete; aufserdem hat v. Braunmühl nachgewiesen, dafs ganze Reihen von Sätzen aus Regiomontanus' Werk mit denen im Menelaos zusammenfallen. — Die weitere Untersuchung des Briefes an Bianchini zeigt mir, dafs es Regiomontanus nicht gelang, den Beweis Menelaos III, 5 zu verstehen (vgl. Murr I, Tafel 3, Fig. XVIII).

In den Druckausgaben von **Maurolycus** und **Halley** stehen ganz andere Beweise, nicht kugelgeometrisch, sondern durch Orthogonalprojektion geführt. Den Ursprung dieser Beweise habe ich nicht ermitteln können. Älter als c. 1265 (Nassir-eddîn-Tûsi oder Jacob ben Machir) sind sie jedoch kaum.

Damit war nun der Satz über die Erhaltung des Sinusdoppelverhältnisses bei Projektion (auf der Kugel) ganz verschollen, bis er *im Anfang des 19. Jahrhunderts* neu entdeckt wurde.[169])

Unsere Frage ist jetzt: Wie bewiesen Menelaos' Vorgänger diesen Satz? Dafs Menelaos den Satz selbst erfunden und diese Erfindung in seiner *Sphärik* nicht aufgenommen habe, können wir ja doch nicht annehmen.

Es zeigt sich, dafs der Satz eine einfache Folge von Menelaos' Satz ist.[170])

---

169) Vgl. Gudermann, *Lehrbuch der niederen Sphärik*, Münster 1835, § 184—185. — Vielleicht stand der Doppelverhältnissatz (auf der Kugel) schon bei F. Schulz, *Die Sphärik oder die Geometrie der Kugelfläche*, Leipzig 1828 (Mitteilung von v. Braunmühl).

170) Bei Gudermann wird der Doppelverhältnissatz sowie der Satz des Menelaos auf der Kugel durch den Sinussatz bewiesen.



Verlängern wir nämlich (Figur 56) die Bogen LB und NH bis zum Schnitt in X, so giebt Menelaos' Satz:

$$\frac{\sin MX}{\sin XK} = \frac{\sin MH}{\sin HA} \cdot \frac{\sin AB}{\sin BK}$$

($\triangle XBH$ durch AKM geschnitten. Menel. III, 1^{IV})

$$= \frac{\sin MS}{\sin SA} \cdot \frac{\sin AG}{\sin GK}$$

($\triangle XGS$ durch AKM geschnitten. Menel. III, 1^{I-III}). Gleichfalls

$$\frac{\sin NX}{\sin XL} = \frac{\sin NH}{\sin HA} \cdot \frac{\sin AB}{\sin BL}$$

($\triangle XBH$ durch ALN geschnitten. Menel. III, 1^{IV})

$$= \frac{\sin NS}{\sin SA} \cdot \frac{\sin AG}{\sin GL}$$

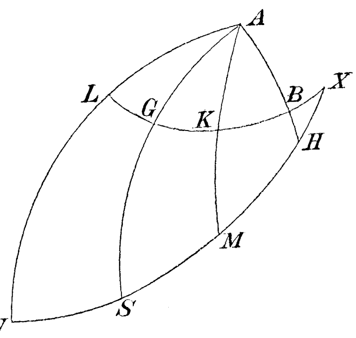
($\triangle XGS$ durch ALN geschnitten. Menel. III, 1^{IV}).

Durch Elimination erhält man dann sofort das gewünschte Doppelverhältnis

$$\frac{\sin BL}{\sin LG} \cdot \frac{\sin GK}{\sin KB} = \frac{\sin HN}{\sin NS} \cdot \frac{\sin SM}{\sin MH}.$$

Wir erhalten also den Satz durch viermalige Anwendung von III, 1. Durch III, 2 dagegen läfst der Satz sich nur auf einem grofsen Umweg beweisen.

Ich schliefse also, dafs *sowohl Menelaos' Satz, als der Satz über die Projektivität der Doppelverhältnisse* (Sinusverhältnisse) *auf der Kugel zu Menelaos' Zeit allgemein bekannt war, d. h. dafs sie dem Hipparch aller Wahrscheinlichkeit nach bekannt waren, d. h. ferner: Die Vermutung, dafs Hipparch über sphärisch-trigonometrische Mittel verfügte, scheint sich also zu bestätigen, und es ergiebt sich, dafs sein Hauptsatz wahrscheinlich eben der sogenannte Satz des Menelaos war.* Es würde ja dies auch mit der ungewöhnlichen Formulierung eben dieses Satzes in Menelaos' *Sphärik* übereinstimmen. Wie so oft, geht es auch hier so, dafs das, was den Namen eines Mannes bekannt gemacht hat, seinen Vorgängern gehört.



Figur 56.

Es erhebt sich nun die Frage, inwiefern die Analogen dieser zwei Sätze in der Ebene auch vor Menelaos bekannt waren. Es ist schon lange bekannt, dafs sie in Pappos' συναγωγή (ca. 200 Jahre nach Menelaos) stehen und zwar als Lemmata zu Euklids *Porismen*. In den Restitutions-

versuchen dieses leider verlorenen Werkes haben eben diese zwei Sätze eine Hauptrolle gespielt, indem man geneigt war, sie dem Euklid zuzuschreiben.[171])

Der Doppelverhältnissatz tritt bei Pappos nicht in der allgemeinen Form auf, in welcher er von Menelaos angewandt wird. Da heifst es nämlich[172]):

Wenn drei Geraden durch o (Figur 57) durch zwei andere geschnitten werden, so wird:

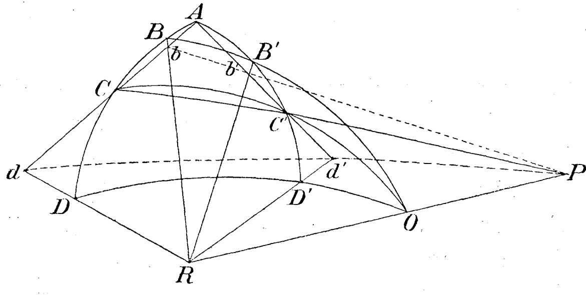
$$\frac{ab}{ad} \cdot \frac{cd}{cb} = \frac{ab'}{ad'} \cdot \frac{c'd'}{c'b'}$$

und dieser Spezialsatz kann ganz wie der allgemeine durch Menelaos' Satz bewiesen werden, was doch im Pappos nicht geschehen ist.

Figur 57.

Bemerkenswert ist es aber, dafs dieser Spezialfall auf die Kugel auf ganz ähnliche Weise wie Menelaos' Satz übertragbar ist, und zwar so:

Wir wählen (Figur 58) den Durchschnittspunkt (O) der zwei Bogen CC' und DD' aufserhalb der Bogen ACD und $AC'D'$ und führen ferner die Figur aus, ganz wie beim Beweise von Menelaos' Satz. Dazu fügen wir noch einen willkürlichen Bogen $BB'O$ durch O; so wird die Verbindungsgerade bb' durch den Durchschnittspunkt (P) der Geraden CC' und RO gehen, weil b, b' und P sowohl in der Ebene des Bogens $BB'O$, wie in der des Dreiecks ACC' liegen.



Figur 58.

In der Ebene haben wir dann die gleichen Doppelverhältnisse:

$$\frac{Ab \cdot Cd}{Ad \cdot Cb} = \frac{Ab' \cdot C'd'}{Ad' \cdot C'b'},$$

wo

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{\sin AB}{\sin CB}, \quad \frac{Cd}{Ad} = \frac{\sin CD}{\sin AD}$$

---

171) Vgl. Chasles, *Les trois livres des Porismes d'Euclide,* Paris 1860, p. 11 und 75. — Eine treffliche Darstellung der Bedeutung der zwei hier erwähnten Sätze finden wir in Chasles, *Aperçu historique,* Paris 1875, p. 26—27, 33—35, 291—296 und 302—308.

172) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 870 ff. und 1038.

(Ptolemaios, *Syntaxis*, ed. Heiberg I, p. 70 und 73), und analog auf der rechten Seite, d. h.

$$\frac{\sin AB}{\sin CB} \cdot \frac{\sin CD}{\sin AD} = \frac{\sin AB'}{\sin C'B'} \cdot \frac{\sin C'D'}{\sin AD'} \quad \text{q. e. d.}$$

Dieser Spezialfall läſst sich dann sehr leicht mit Hülfe eines Hülfsbogens (AD', siehe Figur 59) zu dem allgemeinen Satz, den Menelaos gebraucht, erweitern.

Diese Möglichkeit einer direkten Übertragung des Doppelverhältnissatzes beeinträchtigt nicht die Schlüsse, die wir oben gezogen haben. Denn auch dieses direkte Übertragen setzt die Kenntnis der Übertragung von Menelaos' Satz voraus.

Figur 59.

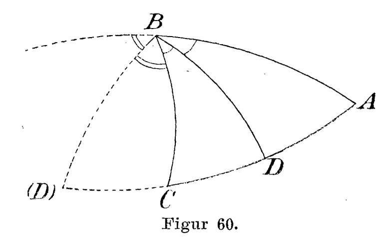
Deswegen können wir die enge geschichtliche Verbindung zwischen Menelaos' Satz und dem Doppelverhältnissatze sowohl in der Ebene wie auch auf der Kugel, die Chasles schon befürwortet, als festgestellt zu betrachten wagen. Auch meinen wir, daſs Chasles' Restitution von Euklids *Porismen* hier eine Bestätigung findet. *Die beiden Sätze in der Ebene standen offenbar in Euklids Werk, das somit die Elemente zur Erfindung der sphärischen Trigonometrie lieferte.*[173])

In der That ist Menelaos' Satz ein ausgezeichnetes Mittel zum Beweise kugelgeometrischer Sätze. Eine Reihe von wichtigen Theoremen, die nach Chasles alle in Euklids *Porismen* standen, können sowohl in der Ebene wie auf der Kugel allein mit Hülfe von Menelaos' Satz bewiesen werden, z. B. der Satz vom harmonischen Verhältnis und vom vollständigen Viereck (Pappos VII, 131 und Staudt, *Geometrie der Lage* Nr. 59). Sobald auſserdem der Doppelverhältnissatz, der lediglich als eine Folgerung aus Menelaos' Satz erscheint, bewiesen ist, so lassen sich noch andere wichtige Sätze beweisen, z. B. die Involution der Punkte, die durch den Schnitt eines vollständigen Vierecks durch eine beliebige Transversale ge-

173) Auch in der Kegelschnittlehre im Altertum spielte der Doppelverhältnissatz, wie es scheint, eine Rolle. Zeuthen vermutet nämlich (vgl. Keglesnitslæren i Oldtiden, p. 59 und 105—106), daſs Apollonios ihn zu den Tangentenbestimmungen bei der Ellipse und der Hyperbel, sowie zur Bestimmung des Kegelschnitts als Ort zu vier Geraden benutzte. Wenn wir nun die Existenz dieses Satzes (und zwar in seiner allgemeinen Form) vor Menelaos nachweisen können, so dürfte in diesem Falle Zeuthens Hypothese eine Bestätigung finden, die vielleicht diejenigen, die noch an der Richtigkeit der Zeuthenschen Hypothesen in Bezug auf die Kenntnis der Griechen zur Projektivitätslehre zweifeln, überzeugen können. Menelaos' *Sphärik* leistet uns meiner Ansicht nach den Beweis dafür, daſs die auf Pappos' Lemmata beruhende rückschlieſsende Methode, die Chasles und Zeuthen benutzten, in der That zulässig ist.

bildet wird (Pappos VII, 130 und Desargues, ed. Poudra I, p. 119). Chasles' Restitution der *Porismen* beruht nun eben darauf, daſs er die gegenseitige Abhängigkeit aller dieser Sätze, von denen die wichtigsten und elementarsten in Pappos' Lemmata stehen, erkannt hat; mit Recht hat er dann den Schluſs gezogen, daſs alle die hier erwähnten Sätze in den *Porismen* standen und den Kern dieses Werkes bildeten.

Der weitere Schluſs, den wir ziehen können, ist, daſs die Griechen wahrscheinlich erkannten, daſs alle die Sätze aus der Ebene, die in den *Porismen* nur den Satz des Menelaos und den Doppelverhältnissatz voraussetzen, auf die Kugel direkt übertragbar sind, wenn man nur immer die Geraden mit den Sehnen des doppelten der entsprechenden Bogen ersetzt. Es ist nämlich kaum denkbar, daſs die Griechen, die die zwei Hauptsätze der *Porismen* aus der Ebene auf die Kugel übertrugen, nicht auch die daraus folgenden Konsequenzen erkannten. Es ist somit die Vermutung berechtigt, daſs schon vor Menelaos eine ziemlich entwickelte Kugelgeometrie existierte; es ist aber dies lediglich eine plausible Vermutung, zu deren Beweis uns die nötigen Belege fehlen.



Figur 60.

Mit III, 5 sind die sphärischen Haupttheoreme erledigt, und nun folgen mehrere wahrscheinlich aus der Ebene übertragene Sätze.

Menelaos III, 6 (Figur 60) sagt:

Wenn der Winkel am Scheitel eines sphärischen Dreiecks halbiert wird, ist das Sinusverhältnis der Basissegmente gleich dem der einschlieſsenden Bogen.

Gegeben: $\angle ABD = \angle DBC.$

Zu beweisen:

$$\frac{\sin AB}{\sin AD} = \frac{\sin BC}{\sin DC}.$$

Durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke ABD und CBD erhält man sofort diese Proportion, indem die Winkel an B gleich sind, die an D Supplementwinkel.

Der umgekehrte Satz und der analoge für Halbierung des Auſsenwinkels werden auch bewiesen.

Den analogen Satz der Ebene (Euklid, *Elem.* VI, 3) hat Menelaos wahrscheinlich schon im ersten Buche auf die Kugel zu übertragen versucht. Erst hier ist es ihm gelungen, ein sphärisches Analogon, freilich in anderer Form, und zwar in der eines Sehnenverhältnisses statt eines Bogenverhältnisses, zu gewinnen.

Menelaos III, 7 (Figur 61) sagt:

Wenn wir vom Scheitel B eines sphärischen Dreiecks zwei Bogen ziehen (BD und BE), *die mit den einschliefsenden Seiten* (BA *und* BC) *gleiche Winkel bilden, so wird bewiesen, dafs:*

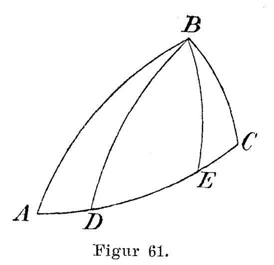
$$\frac{\sin EA \cdot \sin AD}{\sin DC \cdot \sin CE} = \frac{\sin^2 AB}{\sin^2 BC},$$

und umgekehrt, dafs, wenn diese Proportion besteht, die Winkel ABD *und* EBC *gleich werden.*

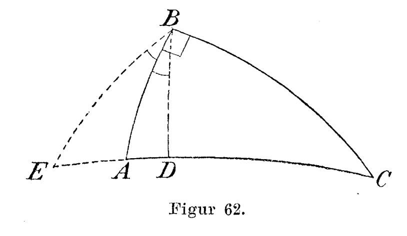
Bei der Erfindung dieses Satzes hat offenbar die Satzgruppe I, 26—35 eine Rolle gespielt.

Menelaos III, 8 (Figur 62) sagt:

Wenn in dem an B rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC durch B



Figur 61.



Figur 62.

zwei gröfste Kreisbogen gezogen werden, die mit BA gleiche Winkel bilden, so besteht die Proportion:

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA};$$

denn die beiden Verhältnisse sind gleich $\frac{\sin BE}{\sin BD}$ (III, 6).

Umgekehrt, wenn

$$\frac{\sin CE}{\sin CD} = \frac{\sin EA}{\sin DA}$$

und $\angle EBA = ABD$, wird bewiesen, dafs $\angle ABC = 90^0$, und wenn $\angle ABC = 90^0$, dafs $\angle EBA = ABD$; in beiden Fällen folgt der Beweis durch III, 6.

Die Sätze III, 7—8 sind offenbar wie III, 6 aus der Ebene übertragen; welchen Werken der Geometrie der Ebene Menelaos sie entnommen hat, können wir jedoch nicht konstatieren.

III, 8, der Satz von der *harmonischen Teilung* (BA und BC halbieren ja $\angle EBD$ und dessen Supplementwinkel), war wenigstens zur Zeit des Apollonios bekannt. Diesen Satz sowie die harmonische Teilung überhaupt scheint nämlich Apollonios genau erörtert zu haben, und zwar in

seinen τόποι ἐπίπεδοι.[174]) Die harmonische Teilung wurde auch in Apollonios' *Kegelschnittlehre* benutzt, und die harmonische Teilung einer Kegelschnittsehne durch Pol und Polar vielfach erörtert.[175]) Aber schon in Euklids *Porismen* wurde sicherlich die harmonische Proportion ausgiebig verwertet; denn von Pappos' Lemmata bezieht sich eine ganze Reihe auf die harmonische Teilung.[176]) Menelaos' Übertragung einer der allgemeinsten projektivischen Eigenschaften der harmonischen Proportion auf die Kugel suppliert somit die übrige Überlieferung und fügt ein bis jetzt fehlendes Glied hinzu; denn Menelaos' Beweis ist offenbar direkt aus der Ebene übertragen.

Den Beweis für III, 7 referierten wir nicht, weil derselbe kaum aus der Ebene übertragen ist; denn den analogen Satz der Ebene finden wir im Pappos[177]) als Lemma zu Theodosios' *Sphärik* III, 6, und zwar mit einem ganz anderen Beweis. Es ist von Simson[178]) angenommen worden, daſs dieser Satz in der verlorenen Schrift des Apollonios *„von dem bestimmten Schnitt“* (περὶ διωρισμένης τομῆς) stand. In der That finden sich ganz ähnliche Sätze unter Pappos' Lemmata[179]) zu diesem Werk, und da der Satz (in der Ebene) doch jedenfalls älter als Menelaos ist, dürfte Simsons Schluſs richtig sein. Bemerkenswert ist, daſs dieser Satz gerade zum Beweis desjenigen Lemmas im Pappos verwendet wird, aus welchem Zeuthen[180]) folgert, wie Apollonios in der Schrift vom bestimmten Schnitt einen Doppelpunkt in einer durch zwei Punktepaare gegebenen Involution bestimmt hat. Es ist ganz deutlich, daſs die Vorgänger des Menelaos, die zuerst die zu trigonometrischen Berechnungen verwendbaren kugelgeometrischen Sätze erfunden haben, so wie Menelaos selbst einen ausgiebigen Gebrauch der meistens verlorenen Schriften, die Pappos unter dem Namen τόπος ἀναλυόμενος zusammenfaſst, gemacht haben. Auf der anderen Seite aber dient

174) Vgl. Eutokios' *Kommentar zu Apollonios, Apollonii Pergaei quae Graece exstant,* ed. Heiberg II, p. 180 ff. — Vgl. auch Chasles, *Les trois livres des Porismes,* p. 269 ff.; und Heiberg, *Litt. Stud.* p. 70—71.

175) Vgl. Apollonios, ed. Heiberg I, p. 102 und 386—412; vgl. auch Zeuthen, l. c. p. 59 und 82—84.

176) Vgl. Pappos, ed. Hultsch, p. 896—912 und 1266—1267; vgl. auch Chasles, *Porismes,* p. 79—81, 187—188, 210—211, 255—256, 261—262, 266—269, 273—278 und 317—320, wo die harmonische Teilung in Chasles' Restitution der *Porismen* vorkommt.

177) Pappos, ed. Hultsch, p. 488—490. Dieses Lemma ist nicht ein Hülfssatz zum Beweise des Theodosios, sondern zu einem neuen Beweis von Pappos zu Satz III, 6 des Theodosios; vgl. Pappos, p. 504.

178) Simson, *de sectione determinata, opera quaedam reliqua* p. 16.

179) Pappos, ed. Hultsch, p. 708—714, 718—722, 726 und 730—734.

180) Zeuthen, l. c. p. 132.

Menelaos' *Sphärik* dazu, uns zu bestätigen, daſs die Schlüsse, die namentlich von Forschern wie Chasles und Zeuthen in Bezug auf die verlorenen Schriften gezogen worden sind, im groſsen und ganzen richtig, und die gegen dieselben erhobenen Einwände und Zweifel unbefugt sind.

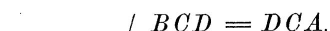
Menelaos III, 9 (Figur 63) sagt:

Die Halbierungsbogen der Winkel eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Figur 63.

Gegeben: $\angle BAD = DAC$

und



$$\angle BCD = DCA.$$

Wenn BDE gezogen wird, ist zu beweisen, daſs $\angle ABE = EBC$.

Beweis:

$$\frac{\sin BC}{\sin CE} = \frac{\sin BD}{\sin DE} = \frac{\sin BA}{\sin AE} \quad \text{(III, 6)},$$

also

$$\frac{\sin AE}{\sin CE} = \frac{\sin BA}{\sin BC},$$

d. h. $\angle ABE = EBC$ (III, 6, zweiter Teil) q. e. d.[181])

Der entsprechende Satz in der Ebene war Euklid bekannt, wie die Konstruktion *Elem.* IV, 4: *„in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben“* zeigt.

Menelaos III, 10 sagt:

Die Höhenbogen eines sphärischen Dreiecks gehen durch einen und denselben Punkt.

Der lange, durch III, 1, 6, 8 und 9 geführte Beweis bietet kein besonderes Interesse.

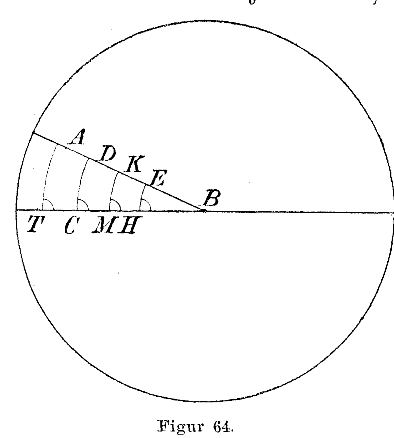
Daſs der entsprechende Satz in der Ebene dem Archimedes bekannt war, zeigt uns sein *„liber assumptorum“* 5—6.[182])

Die folgenden Sätze der *Sphärik,* III, 11—14 sind sehr eigentümlich und erinnern gleich an das zweite Buch. Es kommen hier wieder Theoreme vor, die als Dreieckstheoreme formuliert sind, sich aber offenbar von astronomischen ableiten. Teilweise kommen wieder die Sätze vor, die wir von der *alten Sphärik* durch Euklids *φαινόμενα*, Theodosios' *Sphärik* bis zu Menelaos und Ptolemaios verfolgt haben; noch einmal werden Sätze über die Ungleichheit der den gleichen Ekliptikbogen entsprechenden Rektas-

181) Das Corollar zu III, 9 in der Halleyausgabe ist unecht.

182) Archimedis *opera,* ed. Heiberg II, p. 433 ff.

censions-, Obliquascensions- und Morgenweitendifferenzen bewiesen, und zwar merkwürdigerweise durch die vorhergehenden sphärisch-trigonometrischen Haupttheoreme, ohne dafs ein astronomischer Begriff eingeführt wird, und ohne dafs ein einziges Berechnungsbeispiel vorkommt. Wie schon hervorgehoben, verlieren diese Sätze jeden Wert, sobald die darin liegenden astronomischen Probleme einmal rechnerisch behandelt sind. Eine derartige Behandlungsweise schrieben wir oben dem Hipparch zu; deswegen interessieren uns diese Sätze an sich nunmehr herzlich wenig, um so mehr aber gewisse Schlüsse in Bezug auf die Trigonometrie der Ebene, die wir daraus ziehen können.



Figur 64.

III, 11 bezieht sich auf die Vergleichung von Ekliptikbogen mit den Horizontalbogen, in welchen dieselben aufgehen. Ist nämlich (Figur 64) BA die Ekliptik, BT der Äquator, so dafs $AB > AT$ (d. h. der Beweis ist nur für Orte aufserhalb der Polarzonen gültig), und sind die Winkel an T, C, M und H gleich und $\gtreqless 90^0$ (AT, DC, KM und EH stellen also verschiedene Lagen des Horizontes dar), so ist zu beweisen:

$$\frac{DA}{KE} > \frac{AT \div DC}{KM \div EH}.$$

Der Beweis wird auf folgende Weise erledigt: Wenden wir III, 2 auf die Dreiecke ABT, DBC, KBM und EBH an, die zwei gleiche Winkel haben, so erhalten wir:

$$\sin BA : \sin BD : \sin BK : \sin BE = \sin AT : \sin DC : \sin KM : \sin EH,$$

und daraus, sagt Menelaos, folgt direkt, weil $90^0 \geqq AB > AT$, was bewiesen werden soll, infolge des ersten Buches des .... (hier folgt ein unsicherer Buchtitel).

In Gerhards Übersetzung lautet diese Stelle so: „*Si ergo fuerit illud ita, tunc iam accidunt ex eo, quod diximus, omnia, quae nuper retulimus; et illud est, quia nos iam declaravimus istas res et omnes, quae sunt eis similes, in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum.*"

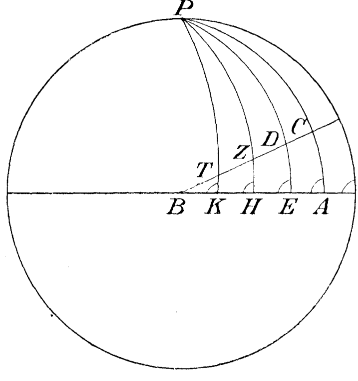
Nach Halleys Übersetzung[183]) aus dem Hebräischen ist der Titel: „*in prima parte libri lemmatum cyclicorum seu potius propositionum*",

183) Menelai *sphaerica*, ed. Halley, p. 98, 100 und 101.

eine Übersetzung, die Steinschneider[184]) jedoch mit *„Buch der bogenartigen Figuren“* ersetzen will. Diese Angaben sind sehr undeutlich und der ursprüngliche Titel ganz entstellt; Menelaos weist aber offenbar auf ein eigenes Werk von mehreren Büchern hin, dessen Inhalt sich zunächst auf die Verhältnisse zwischen Kreissehnen und den ihnen entsprechenden Bogen bezieht. Wir werden uns deswegen kaum irren, wenn wir die zunächstliegende Erklärung geben, nämlich dafs es sich hier um das von Theon[185]) erwähnte Werk des Menelaos: *„6 Bücher über die Geraden im Kreise“* handelt.

Nach Theons Bericht und dem Inhalt von Ptolemaios' *Syntaxis* I hat man geschlossen, dafs in diesem Werk eine Sehnentafel enthalten war. Dieser Schlufs ist sicherlich auch ganz zutreffend. Die Tafel allein und die Elemente zu deren Berechnung haben doch kaum 6 Bücher (bei Hipparch sogar 12) ausgemacht; über einiges von dem, was sonst in dem Werke stand, glaube ich nun hier in Menelaos III, 11 und den folgenden Sätzen Aufschlufs zu finden.

Ich werde unten, nachdem ich kurz die Sätze III, 12—14 referiert habe, alle die in 11—14 enthaltenen Voraussetzungen sammeln, die uns über die vorptolemaiischen plantrigonometrischen Werke Aufschlufs geben dürften.



Figur 65.

III, 12 bezieht sich auf die Vergleichung der Längen mit den entsprechenden Rektascensionen. In Figur 65 ist P Pol des Bogens BA. BA ist somit als der Äquator, BC als die Ekliptik aufzufassen. In der Voraussetzung, dafs $BC \leqq 90^0$, ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}.$$

1. Beweis: Durch Anwendung von III, 5 auf die Dreiecke ABC, EBD, HBZ und KBT erhält man:

$$\frac{\sin(BC+BA)}{\sin(BC \div BA)} = \frac{\sin(BD+BE)}{\sin(BD \div BE)} = \frac{\sin(BZ+BH)}{\sin(BZ \div BH)} = \frac{\sin(BT+BK)}{\sin(BT \div BK)},$$

und dann folgt der Beweis wegen des *„in tractatu primo libri figurarum demonstrativarum“* Bewiesenen (vgl. oben).

184) Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482.

185) Theons *Kommentar,* ed. Halma, p. 110; vgl. oben Seite 5.

2. Beweis: III, 2 und 3 geben:

$$\underset{\text{(III, 3)}}{\frac{\sin AB}{\sin BE} = \frac{\sin AC}{\sin DE}} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC} \underset{\text{(III, 2)}}{=} \frac{\sin BC}{\sin BD} \cdot \frac{\sin PD}{\sin PC}$$ [185 a])

Da nun $90^0 > PD > PC$, so erhält man

$$\frac{\sin AB}{\sin BE} > \frac{\sin BC}{\sin BD}$$

und analog:

$$\frac{\sin BE}{\sin BK} > \frac{\sin BD}{\sin BT}$$

und:

$$\frac{\sin BK}{\sin BH} < \frac{\sin BT}{\sin BZ}.$$

Daraus folgt eine andere Reihe von Ungleichheiten, und zwar diese:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin AE}{\sin AH} &> \frac{\sin CD}{\sin CZ} \\ \frac{\sin AH}{\sin AK} &> \frac{\sin CZ}{\sin CT} \\ \frac{\sin AK}{\sin EK} &> \frac{\sin CT}{\sin DT} \\ \frac{\sin EK}{\sin HK} &> \frac{\sin DT}{\sin ZT} \end{aligned}\right\} (1)$$

und daraus folgert Menelaos gleich[186]) die Ungleichheit

$$\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT} \quad \text{q. e. d.}$$

III, 13 bezieht sich auf die Vergleichung von Obliquascensions- und Rektascensionsdifferenzen für Orte der Polarzonen und für alle Teile des Tierkreises. Zum Beweis gehören nämlich 2 Figuren (66 und 67), in welchen BU als der Horizont, BA als der Äquator, BV als die Ekliptik (in Figur 66 ist BV der Kvadrant Jungfrau-Krebs, in 67 Widder-Zwillinge), VV als der Wendekreis, P als der Nordpol aufzufassen ist, während CA, DE, ZH und NL verschiedene Lagen des Horizontes sind. In beiden Fällen ist zu beweisen:

$$\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}.$$

---

185 a) III, 2 giebt ja: $\frac{\sin AC}{\sin DE} = \frac{\sin BC}{\sin BD}$, d. h. Grundformel I (vgl. Seite 82) für Dreieck ADE, vorausgesetzt, daſs $BC = BA = 90^0$, die verwendbar ist zur Berechnung der Deklination eines Ekliptikpunkts durch Länge und Neigung; vgl. Seite 132.

186) Menelaos schlieſst wahrscheinlich so: Multiplizieren wir die linken sowie die rechten Seiten der Ungleichheiten (1), so erhalten wir $\frac{\sin AE}{\sin HK} > \frac{\sin CD}{\sin ZT}$ und daraus, wegen der gegebenen Voraussetzung, $\frac{AE}{HK} > \frac{CD}{ZT}$.



III, 4 giebt:

$$\frac{\sin AT}{\sin BT} = \frac{\sin EJ}{\sin BJ} = \frac{\sin HK}{\sin BK}.$$

Wenn nun $TJ = JK$, so wird $AE > EH$; denn dann ist $BT \div BJ = BJ \div BK$; daraus folgt aber, da $AT > BT$ und $EJ > BJ$ und $HK > BK$, daſs

$$AT \div EJ > EJ \div HK,$$

d. h.

(Figur 66)

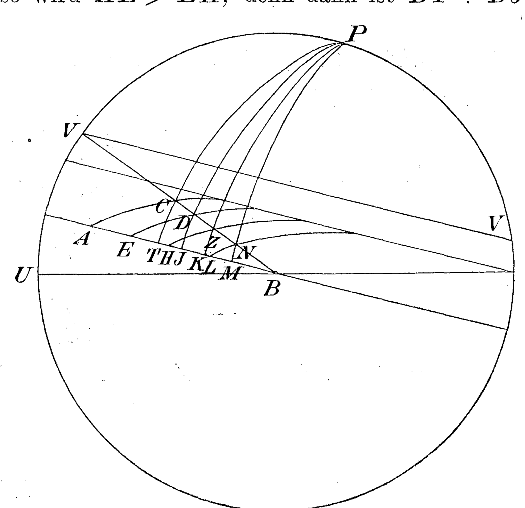
$$AE \div TJ > EH \div JK,$$

(Figur 67)

$$AE + TJ > EH + JK,$$

d. h. in beiden Figuren: $AE > EH$ q. e. d.

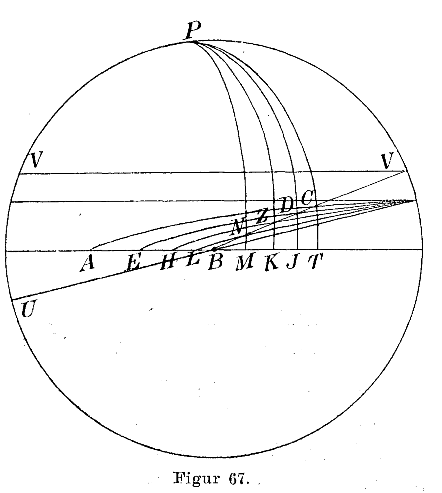
Analog erhalten wir, wenn $AE = EH$, daſs dann $TJ < JK$, und in allen Fällen haben wir also: $\frac{AE}{EH} > \frac{TJ}{JK}$.



Figur 66.

Anm. Da wegen III, 12 $\frac{TJ}{JK} > \frac{CD}{DZ}$, so wird also auch $\frac{AE}{EH} > \frac{CD}{DZ}$, durch welche Ungleichheit die Obliquascensionen und die entsprechenden Längen verglichen werden.

III, 14 bezieht sich auf Vergleichung von Obliquascensionen für verschiedene Orte. Es werden nämlich verglichen: 1) Die Obliquascensionen für zwei Orte der Polarzonen (Figur 68 links), 2) Die Obliquascensionen für zwei Orte auſserhalb der Polarzonen (Figur 68 rechts). Der Satz ist wie gewöhnlich als Dreieckstheorem formuliert[187]) (diesmal in Bezug auf das Dreieck ABC), ist aber offenbar von einem astronomischen abgeleitet, da BA als der Äquator, BC als die Ekliptik auf-



Figur 67.

187) Es wird sogar speziell bewiesen, wie es sich verhält, wenn $\angle B = 90^0$, ein Fall, der offenbar von der Astronomie nicht abgeleitet sein kann.

zufassen ist. CA, EH und ZT sind verschiedene Lagen des Horizontes für eine Polhöhe, CD, EK und ZL für eine andere.

1. (Figur 68 links.)

Gegeben ist:

$$90^0 \geqq CA > CD \geqq CB, \qquad \angle A = H = T \quad \text{und} \quad \angle D = K = L.$$

Zu beweisen ist dann:

$$\frac{AH}{HT} > \frac{DK}{KL}.$$

Beweis: III, 4 giebt, wenn CM, EN und ZS senkrecht auf BA stehen:

$$\frac{\sin AM}{\sin BM} = \frac{\sin HN}{\sin BN} = \frac{\sin TS}{\sin BS} \tag{1}$$

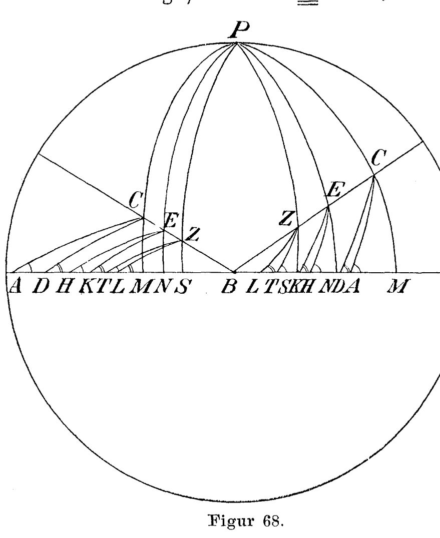
und:

$$\frac{\sin DM}{\sin BM} = \frac{\sin KN}{\sin BN} = \frac{\sin LS}{\sin BS}, \tag{2}$$

und daraus folgt, da $90^0 \geqq AM > DM \geqq BM$, dafs:

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} > \frac{BD \div BK}{BK \div BL},$$

d. h. $\quad \dfrac{AH}{HT} > \dfrac{DK}{KL} \quad$ q. e. d.



Figur 68.

2. (Figur 68 rechts.)

Gegeben ist: $90^0 \geqq CB > CD > CA$, $90^0 < \angle CAB = EHB = ZTB$, $90^0 < \angle CDB = EKB = ZLB$.

Zu beweisen ist: $\dfrac{AH}{HT} < \dfrac{DK}{KL}$.

Beweis: III, 4 giebt wieder die obigen Gleichungen (1) und (2); da aber diesmal $90^0 \geqq BM > BA > BD$, so wird

$$\frac{BA \div BH}{BH \div BT} < \frac{BD \div BK}{BK \div BL}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{AH}{HT} < \frac{DK}{KL} \quad \text{q. e. d.}$$

Es ist deutlich, dafs alle die Beweise der Sätze III, 11—14 auf Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene beruhen. Diese Voraussetzungen sind, insoweit ich sie nach den mir bis jetzt vorliegenden Menelaostexten feststellen kann, folgende:

Wenn wir auf einem Kreise zwei Reihen von Bogengröfsen haben, wie

$$90^0 \geqq a_1 > a_2 > a_3 > a_4$$

und

$$90^0 > b_1 > b_2 > b_3 > b_4,$$

und zwar so, daſs immer

$$a_1 > b_1, \quad a_2 > b_2, \quad a_3 > b_3, \quad a_4 > b_4,$$

so lassen sich aus folgenden Sinusverhältnissen folgende Ungleichheiten von Bogengröſsen beweisen:

1. Wenn

$$\sin a_1 : \sin a_2 : \sin a_3 : \sin a_4 = \sin b_1 : \sin b_2 : \sin b_3 : \sin b_4,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 11 und 13).

Anm. Eigentlich schlieſst Menelaos nicht direkt so, sondern auf folgende Weise:

Wenn unter den gegebenen Voraussetzungen $a_1 \div a_2 = a_3 \div a_4$, so folgt $b_1 \div b_2 < b_3 \div b_4$, wenn aber $b_1 \div b_2 = b_3 \div b_4$, so folgt $a_1 \div a_2 > a_3 \div a_4$, und dann allgemein („*omnino*"):

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} > \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4};$$

auch in den übrigen Fällen ist die Schluſsreihe dieselbe.

2. Wenn

$$\frac{\sin(a_1 + b_1)}{\sin(a_1 \div b_1)} = \frac{\sin(a_2 + b_2)}{\sin(a_2 \div b_2)} = \frac{\sin(a_3 + b_3)}{\sin(a_3 \div b_3)} = \frac{\sin(a_4 + b_4)}{\sin(a_4 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[1]).

3. Wenn

$$\frac{\sin(a_1 \div a_2)}{\sin(a_3 \div a_4)} < \frac{\sin(b_1 \div b_2)}{\sin(b_3 \div b_4)},$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_3 \div a_4} < \frac{b_1 \div b_2}{b_3 \div b_4}$$

(vgl. III, 12[2]).

Haben wir ferner auf demselben Kreise drei Reihen von Bogengröſsen, wie:

$$a_1 > a_2 > a_3,$$
$$b_1 > b_2 > b_3$$

und

$$90^0 > c_1 > c_2 > c_3,$$

und wenn:

$$\sin(a_1 \div c_1) : \sin(a_2 \div c_2) : \sin(a_3 \div c_3)$$
$$= \sin(b_1 \div c_1) : \sin(b_2 \div c_2) : \sin(b_3 \div c_3) = \sin c_1 : \sin c_2 : \sin c_3,$$

so wird, wenn:

$$a_1 > b_1 > 2c_1,$$

$$a_2 > b_2 > 2c_2$$

und

$$a_3 > b_3 > 2c_3,$$

auch

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} > \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[1]).

Wenn dagegen:

$$b_1 < a_1 < c_1,$$

$$b_2 < a_2 < c_2$$

und

$$b_3 < a_3 < c_3,$$

so wird

$$\frac{a_1 \div a_2}{a_2 \div a_3} < \frac{b_1 \div b_2}{b_2 \div b_3}$$

(vgl. III, 14[2]).

Halley, der bei seiner Ausgabe diese Voraussetzungen offenbar genau geprüft hat, giebt als Lemmata, die zum Verständnis dieses Teils der *Sphärik* nützlich sind, folgende an:

1. Wenn $a > b$, so wird $\frac{a}{b} > \frac{\sin a}{\sin b}$.

Dieser Satz wird in Menelaos III, 15 (vgl. unten Seite 119 und 121) mehrmals vorausgesetzt; auch findet er sich in Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 10 (ed. Halma I, p. 34—35; ed. Heiberg I, p. 43—44)[188]); der Satz wird hier zu der annähernden Berechnung von crd. 1^0 verwendet. Diese Anwendung bildet den Abschlufs von Ptolemaios' Einleitung zur Sehnentafel; in seinen gleich folgenden Worten: „ἡ μὲν οὖν πραγματεία τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν οὕτως ἂν οἶμαι ῥᾷστα μεταχειρισθείη“ finde ich eine Andeutung davon, dafs dieser und ähnliche Sätze auch *vor* Ptolemaios zur Berechnung von Sehnentafeln gebraucht wurden, und dafs die älteren Methoden umständlicher als seine waren.

2. Die einfache Erweiterung von 1, nämlich: wenn $a > b > c \cdots$, so wird $\frac{a}{\sin a} > \frac{b}{\sin b} > \frac{c}{\sin c} \cdots$,

die Halley auch anführt, finde ich nicht unter den Voraussetzungen im Menelaos.

---

188) Der Satz wird schon von Aristarch von Samos (c. 270 v. Chr.) verwendet; vgl. περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης, ed. Wallis, 1699.

3. Halley giebt ferner an:

Wenn $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin c}{\sin d}$ und $\sin a > \sin b > \sin c > \sin d$, so wird

$$\frac{a \div b}{c \div d} > \frac{a}{b} > \frac{c}{d} > \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{\sin (a \div b)}{\sin (c \div d)}.$$

Auch diese Ungleichheiten finden wir nicht im Menelaos direkt angewandt.

Es ist möglich, dafs alle die von Menelaos aus der Trigonometrie der Ebene vorausgesetzten Sätze sich auf solche einzelnen zurückführen lassen. Ein Versuch, eine solche Zurückführung durchzuführen, hat aber zunächst geringeren Wert, und läfst sich erst zu Ende bringen, wenn die Menelaostexte (der lateinische und die arabischen) miteinander verglichen sind, so dafs es möglichst sicher festgestellt ist, in welcher *Form* die Voraussetzungen im Menelaos gegeben sind. Bis dahin müssen wir uns mit den obigen Angaben begnügen.

Eine Frage erhebt sich jedoch hier: Finden wir nicht in der Litteratur vor Menelaos ähnliche Sätze, wo Bogenlängen und Geraden mit einander verglichen werden?

Aufser dem schon erwähnten Satz des Theodosios (III, 11)[189]), der, wie wir unten sehen werden, dem Apollonios beigelegt wird[190]), treffen wir von Sätzen dieser Art nur diejenigen, auf denen die Methoden von Aristarch und Archimedes[191]) beruhen. Es sind dies aber aufser dem auf der vorhergehenden Seite referierten nur zwei sehr alte Sätze, die in der griechischen Geometrie eine überaus reiche Anwendung gefunden haben, und deren einer auch in Theodosios III, 11 gebraucht wurde.

Dieser Satz sagt: Wenn die zwei an B und B_1 rechtwinkligen Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ die Katheten AB und A_1B_1 gleich, die Katheten BC B_1C_1 dagegen ungleich haben, und zwar $B_1C_1 > BC$, so wird

$$\frac{B_1C_1}{BC} > \frac{\angle C}{\angle C_1}.$$

Dieser Satz, der dem unsrigen

$$\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} > \frac{y}{x} \quad \left(\text{für } 90^0 > y > x\right)$$

gleichkommt, wird von Hultsch als sehr alt betrachtet. Er hat ihn näm-

189) Vgl. oben Seite 79. 190) Vgl. unten Seite 117.

191) Archimedes, κύκλου μέτρησις, ed. Heiberg, p. 258—270.

lich unter den *„Lemmata zur Sphärik“* [192]) gefunden und setzt ihn deswegen vor Autolykos. Obwohl ich nicht mit Hultsch diese Lemmata als voreuklidische betrachten kann, gebe ich doch zu, dafs der hier erwähnte Satz alt ist; denn er wird von Archimedes [193]) als bekannt vorausgesetzt, wie schon Hultsch bemerkt hat. Man hat aber, glaube ich, übersehen, dafs der Satz in Euklids *Optik* [194]) bewiesen (*nicht* vorausgesetzt) wird. Der andere Satz ist der Seite 112 referierte:

$$\frac{y}{x} > \frac{\sin y}{\sin x} \left(\text{für } 90^0 > y > x\right),$$

den wir schon bei Aristarch treffen, jedoch ohne Beweis. In der *Syntaxis* findet sich aber dieser Beweis (vgl. Seite 82 und 112).

Die hier referierten Sätze, die in der ältesten Zeit die Trigonometrie ersetzten, lieferten vielleicht brauchbare Hülfsmittel bei den ersten Versuchen, sich eine trigonometrische Methode zu verschaffen, sind aber zu alt, dafs man zur Zeit ihrer Erfindung Werke wie das, welchem Menelaos die obigen Voraussetzungen entnommen hat, gehabt haben kann. Ich glaube deswegen, dafs *wir in Menelaos' Sphärik die frühesten Spuren eines plantrigonometrischen Werkes treffen,* und dafs dieses Werk, wie oben gesagt, das von Theon erwähnte ist.

Menelaos III, 15, der letzte Satz in der *Sphärik* ist in vier Teile geteilt. In Nasr-Mansurs Redaktion sind diese als III, 22—25 numeriert. Wir folgen Gerhard, dessen Übersetzung mit der Halleyausgabe übereinstimmt, und bezeichnen die Teile als III, 15^{1-4}.

III, 15^1 sagt: *Gegeben zwei gröfste Kreisquadranten BA und BC. Vom Pol P des Kreises BA sind zwei gröfste Kreisbogen gezogen, die von*

---

192) Vgl. Note 96. Dafs dieses Werk mit demjenigen, welchem Menelaos seine plantrigonometrischen Voraussetzungen entnommen hat, identisch ist, möchte ich bezweifeln. Die Fragmente aus den λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά, die Hultsch gefunden hat, beziehen sich nämlich, wie Heiberg nachgewiesen hat (vgl. Heiberg, *Jahresberichte,* Philologus **43**, p. 496—497), alle auf Theodosios' *Sphärik.* Mit den „σφαιρικά“ meinen die griechischen Autoren auch die des Theodosios oder die alten voreuklidischen, kaum aber die des Menelaos. Endlich, wenn diese λήμματα, wie Hultsch vermutet, vor Autolykos existierten, ist es ausgeschlossen, dafs sie eine schon entwickelte Trigonometrie der Ebene enthielten; wenn sie auf der anderen Seite neueren Datums sind, was ich wegen des hier erwähnten Lemmas zu Theodosios III, **11**, welcher Satz kaum älter als Apollonios ist, vermute (vgl. unten Seite **117**), so mufs man sie zunächst als eine zur Zeit eines Pappos zu Schulzwecken verfafste Sammlung betrachten; in keinem Falle haben diese λήμματα dann irgend etwas mit den Voraussetzungen des Menelaos zu thun.

193) Archimedes, ed. Heiberg II, p. 260 (d. h. ψαμμίτης I, **21**).

194) Euclidis *opera,* ed. Heiberg VII, p. 14 (d. h. *Optik* Satz 8).

BA und BC bezw. in A_1, A_3 und C_1, C_3 geschnitten werden. Den Kugeldurchmesser nennen wir $2r$, die Durchmesser der mit BA parallelen Kreise durch C, C_1 und C_3 nennen wir bezw. 2ϱ, $2r_1$ und $2r_3$. Dann ist zu beweisen, daſs (Figur 69)

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3}. \qquad (1)$$

Beweis:

Da $\angle PCB = PA_3B = 90^0$ und $\angle CC_3P = BC_3A_3$, so wird, wenn III, 2 auf $\triangle PCC_3$ und $\triangle BA_3C_3$ angewandt wird:

$$\frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3}. \qquad (2)$$

III, 1 ($\triangle BC_1A_1$ durch PC_3A_3 geschnitten) giebt aber:

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3} \qquad (3)$$

$$= \frac{\sin PA_1}{\sin PC_1} \cdot \frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3},$$ [195])

also auch

$$\frac{\sin A_3 A_1}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} \quad \text{q. e. d.}$$

Bei diesem Beweise ist zuerst die Hauptgleichung (1) beachtenswert, weil sie für die Berechnung gewisser astronomischen Tafeln sehr geeignet ist.

Fassen wir z. B. BC als die Ekliptik, BA als den Äquator auf, so wird man mit (1) die den Längen BC_3, C_3C_1 u. s. w. entsprechenden Rektascensionen BA_3, A_3A_1 u. s. w. leicht berechnen können. Die Rektascensionstafel in Ptolemaios' *Syntaxis*[196]), wo die jedem Ekliptikbogen von 10^0 zugeordnete Rektascension durch Menelaos' Satz auf ziemlich schwerfällige Weise berechnet wird, läſst sich mit Hülfe von III, 15^1 so herleiten:

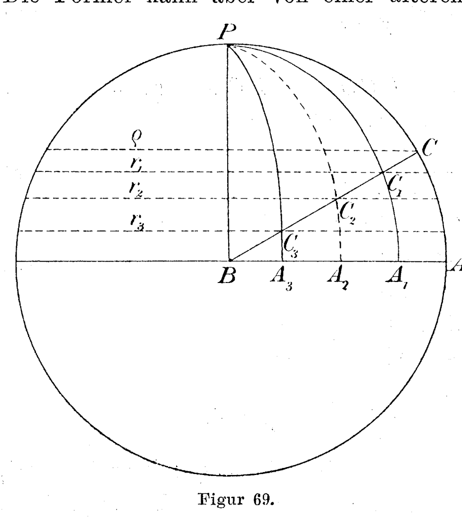
(1) giebt: $\sin A_1A_3 = r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3 \,.\, \frac{1}{r_1} \cdot \frac{1}{r_3}$.

$r \cdot \varrho \cdot \sin C_1 C_3$ ist aber konstant, da $C_1 C_3$ immer gleich 10^0 bleibt, r_1 und r_3 sind die Sinusse zu den Zenithdistanzen PC_1 und PC_3, d. h. die

195) Wie ich immer *Sinus* statt *Sehne des doppelten Bogens* geschrieben habe, so werde ich auch *Halbmesser* statt *Durchmesser* schreiben, obwohl Menelaos immer in diesen und den folgenden Beweisen *Durchmesser* sagt. Da er fast immer mit Verhältnissen operiert, so macht es in der That keinen Unterschied, und ich ziehe der Übersichtlichkeit wegen die dem modernen Leser zunächstliegende Schreibweise vor.

196) Die Rektascensionstafel steht in der *Syntaxis* II, cap. 8, ed. Heiberg I, p. 134—135; ed. Halma I, p. 103. Die Berechnungsbeispiele zu derselben sind schon in I, cap. 16 (Halma I, cap. 13) erledigt, ed. Heiberg I, p. 82—85; ed. Halma I, p. 60—63.

Cosinusse zu den Deklinationen $A_1 C_1$ und $A_3 C_3$, die man in der Deklinationstafel findet, und zwar braucht man für jede Rechnung nur einmal nachzuschlagen. Wir werden kaum zu viel wagen mit der Behauptung, daſs wir in (1) eine wenigstens von Menelaos angewandte Berechnungsformel[197]) vor uns haben. Die Formel kann aber von einer älteren Zeit herstammen, obwohl wir annehmen müssen, daſs der im Beweise angewandte Satz III, 2 von Menelaos erfunden ist; denn die Anwendung von III, 2 läſst sich durch zweimalige Anwendung von III, 1 ersetzen, und zwar indem (Figur 69) $\triangle ABC$ durch PC_3A_3 und $\triangle BA_3C_3$ durch PCA geschnitten werden, woraus die Relation (2) folgt.



Figur 69.

Eigentümlich ist es, daſs Menelaos in III, 15 die Parallelkreisdurchmesser als trigonometrische Funktion verwendet. Auch in Theodosios III, 11—12 werden, wie wir gesehen haben[198]), die Durchmesser zur Vergleichung von Bogenlängen und Geraden eingeführt. Bemerkenswert ist deshalb folgender Passus, den Menelaos[199]) gleich nach dem Beweis der Formel (1) folgen läſst.

„*Et iam declaratur ex eo quod diximus in figuris primis*[200]) *ex figuris tractatus tertii libri Theodosii in speris per modum alium. Ipse enim declaravit ibi, quod proportio arcus* $\overline{gh}$ (bei uns A_1A_3) *ad arcum* $\overline{de}$ (C_1C_3) *est minor proportione diametri spere* ($2r$) *ad diametrum circuli* (2ϱ), *qui contingit circulum* $\overline{bc}$ *super punctum* $\overline{c}$", d. h. $\frac{\smile A_1A_3}{\smile C_1C_3} < \frac{2r}{2\varrho}\cdot$ In Theodosios III, 11 wird allerdings nur der Spezialfall $\frac{\smile AA_3}{\smile CC_3} < \frac{2r}{2\varrho}$ bewiesen. Dieser Unterschied will jedoch wenig besagen, denn Menelaos weist jedenfalls auf Theodosios III, 11 hin.

197) Vielleicht hat Menelaos eine Formel wie diese (1) in seiner mehrmals erwähnten Abhandlung über die Auf- und Untergänge der Tierkreiszeichen benutzt.

198) Vgl. oben Seite 79—80.

199) Ich gebe die Stelle nach Gerhards Übersetzung. Der Passus stand auch in der hebräischen Übersetzung des Jacob ben Machir; vgl. die Halley-ausgabe, p. 108—109.

200) Die Worte „*in figuris primis*" beruhen wahrscheinlich auf einem Miſsverständnis von Gerhard. Bei Halley steht „*Propositio principalis*", was offenbar das Richtige ist.

Menelaos fährt fort: *„et hec est res, qua usus est Apollonius in libro, qui dicitur* **liber aggregativus**[201]*), et nos iam usi sumus hoc hic, et indiguimus eo necessitate maioris iuvamenti; et nos ostendimus illud in eo, quod erit post, cum demonstratione communi“.*

Die Hinweisung auf Theodosios findet sich auch im Cod. Leid. 930 (Nasr-Mansurs Redaktion), die Anspielung auf Apollonios, der Theodosios III, 11 in einem *„liber aggregativus“* (?) soll *verwendet haben* (wozu?), dagegen nicht. Bis mehrere arabische Handschriften untersucht worden sind, müssen wir deswegen die Echtheit dieses Passus sowie die Erklärung des Buchtitels *„liber aggregativus“* dahingestellt sein lassen.[202])

Es wird sich wohl zuletzt ergeben, dafs die ersten Elemente der Trigonometrie, wie Tannery[203]) vermutet, sich auf Apollonios als Erfinder zurückführen lassen.

Was wir aber kaum bezweifeln können, ist, dafs der Schlufs von Menelaos' *Sphärik* III, 15^{1-4}, der in der That einen von den vorhergehenden Sätzen deutlich abweichenden Charakter hat, eine Neubehandlung und Vervollkommnung von älteren primitiveren Methoden enthält. Vergleichen wir Theodosios III, 11—12 und Menelaos III, 15^{1-4}, so scheint aus dieser Vergleichung hervorzugehen, *dafs der Kugel- und die Parallelkreisdurchmesser die ältesten Mittel zum Vergleich von Bogenlängen mit Geraden lieferten, d. h. dafs sie gewissermafsen als die ältesten trigonometrischen Funktionen zu betrachten sind.*

Wenn das richtig ist, *so entstand die Trigonometrie aus den Betrach-*

---

201) Bei Halley, p. 108, heifst dieser Titel (aus dem Hebräischen) übersetzt: *„Liber* (forte) *de principiis universalibus“.* Steinschneider, Zeitschr. f. Math. u. Physik **10**, p. 482, meint, dafs das betreffende hebräische Wort eine allgemeine Bedeutung hat, wie *„umfassende“* oder dergleichen.

202) Ich vermute, dafs die Stelle wirklich in Menelaos' *Sphärik* stand. Wenn sie aber auch eine arabische Interpolation ist, so hat der betreffende Araber wohl authentische Berichte vor sich gehabt. — Der Titel *„liber aggregativus“* liefse sich wohl als eine Übersetzung von *„ἡ καθόλου πραγματεία“* erklären; vgl. Marinos' *Kommentar zu Euklids Data,* ed. Menge, p. 234; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 133. — Wir erinnern auch an das von Eutokios dem Apollonios zugeschriebene Werk mit dem rätselhaften Titel *„ὠκυτόκιον“*, wo eine Berechnung von π erledigt werden soll; vgl. Archimedes, ed. Heiberg III, p. 300; und Apollonios, ed. Heiberg II, p. 124 ff. Die Fragmente dieser Werke, die man (Tannery und Heiberg) im Pappos zu finden geglaubt hat, lassen sich jedoch kaum mit der Stelle im Menelaos in Übereinstimmung bringen. — Die Hinweisungen auf ein astronomisches Werk des Apollonios, vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* ed. Halma II, p. 312 ff., dessen Titel nicht angeführt wird, verbreiten auch über die Erklärung der Menelaosstelle kein Licht.

203) Vgl. Tannery, *l'astr. anc.* p. 68.



tungen, wozu die sphärisch-astronomischen Figuren Anlafs gaben[204]), *und später, da man die Berechnung von den Durchmessern an einen Kreis in der Ebene anknüpfte, gingen die Durchmesser naturgemäfs in Kreissehnen über.*

Noch eins können wir in Bezug auf den Beweis III, 15[1] bemerken:

In der obigen Gleichung (2): $\frac{\sin PC}{\sin PC_3} = \frac{\sin BA_3}{\sin BC_3}$ liegt implicite eine Dreiecksformel, die von den Arabern oft zu Berechnung verwendet wurde, nämlich für das Dreieck BA_3C_3 mit den Seiten b_3, a_3, c_3 die Formel:

$$\frac{\cos B}{\cos b_3} = \frac{\sin c_3}{\sin a_3}.$$

Nach v. Braunmühls[205]) Angabe ist Ibn-Junos († 1008) der erste, der diese Formel gebrauchte.

Menelaos III, 15[2] (Figur 69):

Ziehen wir den gröfsten Kreisbogen PC_2A_2, so dafs

$$\sin^2 PC_2 = \sin PA_2 \cdot \sin PC \tag{1}$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, dafs

$$r_2{}^2 = r \cdot \varrho\,,$$

so kann man beweisen, dafs $\smallsmile BC_2 \div BA_2$ *ein Maximum* oder, wie Menelaos sagt, *dafs diese Differenz eine gegebene Gröfse ist, und zwar gröfser als die Differenz irgend zweier anderen ähnlich liegenden Bogen*, d. h.

$$BC_2 \div BA_2 > BC_3 \div BA_3$$

und

$$BC_2 \div BA_2 > BC_1 \div BA_1.$$

Beweis:

$$\frac{\sin PA_2}{\sin PC_2} = \frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} \quad (\text{III, 2})^{205\text{a}}) \tag{2}$$

$$\frac{\sin PC_2}{\sin PC} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2} \quad (\text{III, 2}) \tag{3}$$

Wegen (1) werden (2) und (3) gleich, d. h.

$$\frac{\sin AA_2}{\sin CC_2} = \frac{\sin BC_2}{\sin BA_2}, \tag{4}$$

---

204) Vgl. oben Seite 80.

205) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 62.

205[a]) Die Gleichung (2) kommt der Grundformel III (vgl. Seite 82) gleich, und zwar für Dreieck BA_2C_2, und ist leichter zu benutzen als Menelaos' Satz bei der Bestimmung des Horizontbogens (zwischen dem Äquator und dem Wendekreis) durch die Neigung der Ekliptik und die Dauer des längsten Tages (*Syntaxis* II, cap. 2, ed. Heiberg I, p. 89 ff.).

folglich wird, da $\smile BA = BC = 90^0$, auch

$$\smile CC_2 = BA_2 \text{ und } AA_2 = BC_2.$$ [206]

Ferner bekommen wir durch (1):

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin^2 PA_2}{\sin^2 PC_2} = \frac{\sin^2 AA_2}{\sin^2 CC_2},$$

d. h. $$\frac{r+\varrho}{r-\varrho} = \frac{r^2}{\sin^2 AA_2 \div \sin^2 CC_2}, \text{ weil } \sin^2 CC_2 + \sin^2 AA_2 = r^2.$$ [207]

Indem nun r und ϱ „gegeben" sind, ist auch $\sin^2 AA_2 \div \sin^2 CC_2$ „gegeben". Daraus schliefsen wir, dafs $\sin AA_2$ und $\sin CC_2$, ferner AA_2 und CC_2 „gegeben" sind; d. h. die Bogendifferenz $AA_2 \div CC_2 = BC_2 \div BA_2$ *ist eine durch* r *und* ϱ *gegebene Gröfse* q. e. d.

Nun geben aber III, 15^1 und die gegebene Gleichung (1):

$$\frac{\sin A_1 A_2}{\sin C_1 C_2} = \frac{\sin PA \cdot \sin PC}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin^2 PC_2}{\sin PC_1 \cdot \sin PC_2} = \frac{\sin PC_2}{\sin PC_1},$$

und da $PC_2 > PC_1$, so wird $A_1 A_2 > C_1 C_2$; analog wird bewiesen, dafs $A_3 A_2 < C_3 C_2$, und es folgt also:

$$BC_2 \div BA_2 > BC_1 \div BA_1$$

und

$$BC_2 \div BA_2 > BC_3 \div BA_3,$$

d. h. $\smile BC_2 \div BA_2$ *ist ein Maximum,* da $PC_1 A_1$ und $PC_3 A_3$ ganz willkürlich gezogen sind q. e. d.

Auch dieses Theorem kann als ein astronomisches aufgefafst werden und giebt dann an, zu welcher Zeit die Differenz zwischen Sonnenlänge und Sonnenrektascension am gröfsten ist. Man fällt aber kaum auf diese Grenzbestimmung, ohne zuvor die Rektascensionen berechnet zu haben. Hat man aber einmal eine Tafel wie die Rektascensionstafel in der *Syntaxis* berechnet, so liegt die Erfindung dieses Satzes ganz nahe.

Bemerkenswert bei diesem Beweise ist ferner, dafs wir hier eine trigonometrische Bestimmung finden, deren Berechnung nicht durchgeführt wird, indem nur die Möglichkeit einer solchen angegeben wird durch die Bemerkung, dafs die betreffende Gröfse „gegeben" ist.

Es erinnert uns dies an die trigonometrische Bestimmungsweise in Ptolemaios' *Analemma.*[208] Da die Angaben hier im Menelaos deutlicher sind,

---

206) Die Gleichung $\frac{\text{crd.}\,2x}{\text{crd.}\,2y} = \frac{\text{crd.}\,(180^0 \div 2y)}{\text{crd.}\,(180^0 \div 2x)}$ (4) läfst nämlich, wie leicht geometrisch zu zeigen ist, nur die Möglichkeiten $x = y$ oder $x = 90^0 \div y$ zu; $x = y$ (d. h. $AA_2 = CC_2$) ist aber in diesem Falle unmöglich. Im Folgenden (vgl. Note 212) findet sich als Voraussetzung aus der Trigonometrie der Ebene eine Verallgemeinerung dieses Satzes.

207) Es ist dies die Grundformel 2 (siehe Seite 82): $\sin^2 x + \sin^2 (90^0 \div x) = 1$.

208) Vgl. oben Seite 83.



bestätigen sie indessen die Richtigkeit von Zeuthens Auffassung der Analemmakonstruktionen.

Eine weitere Bestätigung davon, daſs das Wort δεδομένον (datum), dessen Bedeutung ursprünglich zunächst *„konstruierbar“* war, später die Bedeutung *„numerisch berechenbar“*, ja sogar wie hier *„annäherungsweise berechenbar“* erhielt, finden wir in Marinos' *Kommentar zu Euklids Data* (ed. Menge p. 234). Bei einer Erörterung der verschiedenen Bedeutungen des Wortes δεδομένον sagt Marinos nämlich: „... οἱ δὲ γνώριμον, ὡς Διόδωρος· οὕτω γὰρ τὰς ἀκτῖνας καὶ τὰς γωνίας δεδόσθαι λέγει καὶ πᾶν τὸ εἰς γνῶσίν τινα ἐλθόν, καὶ εἰ μὴ ῥητὸν εἴη. ἔνιοι δὲ ῥητὸν αὐτὸ εἶναι ἀπεφήναντο, ὥσπερ δοκεῖ ὁ Πτολεμαῖος, δεδομένα ἐκεῖνα προσαγορεύων, ὧν τὸ μέτρον ἐστὶ γνώριμον ἤτοι πρὸς ἀκρίβειαν ἢ τὸ σύνεγγυς.“

Die Zeit des hier erwähnten Diodoros kennen wir nicht; wir wissen nur, daſs er wie Ptolemaios ein *Analemma* verfaſste.[209]) *Die* Bedeutung des Wortes δεδομένον, an die Marinos hier erinnert, scheint also durchaus mit den Analemmakonstruktionen in Verbindung zu stehen

Menelaos III, 15$^{3-4}$ bildet den Schluſs des dritten Buches. Es wird hier das genauer erörtert, was Theodosios nur teilweise bewiesen hat, nämlich daſs das Verhältnis $\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3}$ (Figur 69—70) zwischen zwei bestimmten Grenzen liegt, indem

$$\left.\begin{array}{ll}
1)\ \text{für } A_1 A_3 > C_1 C_3, & \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{r_1} \\
2)\ \text{für } A_1 A_3 < C_1 C_3, & \frac{\varrho}{r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3} \\
\left.\begin{array}{l} 3)\ \text{für } BC_1 = 90^0, \text{ d. h. } C_1 \text{ fällt in } C, \\ 4)\ \text{für } BC_1 \div 90^0 = 90^0 \div BC_3, \text{ d. h.} \\ \quad C \text{ in der Mitte von } C_1 C_3, \end{array}\right\} & \frac{r}{r_3} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{\varrho} \\
\begin{array}{l} 5)\ \text{für } BC_1 \div 90^0 \gtrless 90^0 \div BC_3, \text{ d. h. } C \\ \quad \text{zwischen } C_1 \text{ und } C_3, \text{ nur nicht in der} \\ \quad \text{Mitte}, \end{array} & \frac{r}{r_1} < \frac{A_1 A_3}{C_1 C_3} < \frac{r}{\varrho}
\end{array}\right\} \quad (A)$$

Von Interesse ist lediglich der Beweis, daſs $\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3} > \frac{\varrho}{r_3}$, wenn $\smile A_1 A_3 < C_1 C_3$.

Beweis: Man zieht (Figur 70) die gröſsten Kreisbogen PC_4A_4 und PC_5A_5, so daſs C_4 zwischen C_3 und C_2 fällt, und so[210]), daſs

209) Vgl. Pappos, ed. Hultsch III, Praefatio, p. IX—XI.

210) Menelaos drückt sich an dieser Stelle undeutlich aus, was dem Abu-Nasr-Mansur zu einer berechtigten Kritik Anlaſs giebt.

$$r \cdot \varrho = r_2^2 = r_3 \cdot r_5 = r_1 \cdot r_4, \tag{1}$$

d. h. $\sin PA \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_3 \cdot \sin PC_5 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_4$.

Dann wird $\smile A_1 A_4 = C_1 C_4$ und $\smile A_3 A_5 = C_3 C_5$ [direkte Folge von (1) und III, 15¹, wonach

$$\frac{\sin A_1 A_4}{\sin C_1 C_4} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_4} \quad \text{und} \quad \frac{\sin A_3 A_5}{\sin C_3 C_5} = \frac{r \cdot \varrho}{r_3 \cdot r_5}\Bigg].$$

„Nun wird“, sagt Menelaos[211]): *„infolge des einschlägigen Beweises in geraden Linien“* entweder $\smile C_3 C_4 = A_1 A_5$ oder $\smile C_3 C_4 = A_3 A_4$; da aber $\smile C_3 C_4 > A_3 A_4$, so mufs $\smile C_3 C_4 = A_1 A_5$ sein, und daraus folgt, dafs

$$\smile C_1 C_5 = A_3 A_4,$$
$$\smile C_5 C_4 = A_3 A_1$$

und

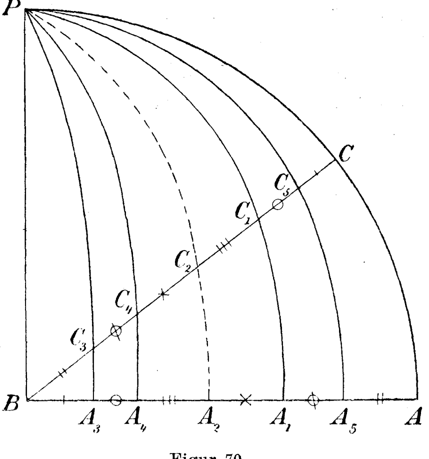
$$\smile C_1 C_3 = A_5 A_4.$$

Schliefslich bekommen wir:

$$\frac{\smile C_1 C_3}{\smile A_1 A_3} = \frac{\smile A_5 A_4}{\smile C_5 C_4} < \frac{r}{r_5} = \frac{r_3}{\varrho}$$

[vgl. (A)¹)], d. h.

$$\frac{\smile A_1 A_3}{\smile C_1 C_3} > \frac{\varrho}{r_3} \qquad \text{q. e. d.}$$



Figur 70.

Wie der in diesem Beweis angewandte plantrigonometrische Satz formuliert war, ist nicht unmittelbar einleuchtend. Dafs jedoch die Schlufsreihe richtig ist, ergiebt sich aus folgender Betrachtung. Wir haben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin C_3 C_4}{\sin A_3 A_4} &= \frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho} \\ \frac{\sin A_1 A_5}{\sin C_1 C_5} &= \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5} \end{aligned}\right\} \quad (\text{III}, 15^1);$$

da aber $\frac{r_3 \cdot r_4}{r \cdot \varrho} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_5}$, so wird $\frac{\sin C_3 C_4}{\sin A_3 A_4} = \frac{\sin A_1 A_5}{\sin C_1 C_5}$, oder wie Menelaos sagt: $\frac{\text{crd. } 2\, C_3 C_4}{\text{crd. } 2\, A_3 A_4} = \frac{\text{crd. } 2\, A_1 A_5}{\text{crd. } 2\, C_1 C_5}$ $(= \mu)$; aufserdem wissen wir, dafs

---

211) Bei Gerhard lautet diese Stelle so: *„Et propterea quod hec forma est sicut ipsa est, declaratur* ***in lineis rectis,*** *quod arcus* $\overline{le}$ $(C_3 C_4)$ *est equalis uno duorum arcuum* $\overline{gm}$, $\overline{nh}$ $(A_1 A_5,\ A_3 A_4)$. *Verum ipse est maior arcu* $\overline{nh}$ $(A_3 A_4)$, *ergo argus* $\overline{el}$ $(C_3 C_4)$ *est equalis arcui* $\overline{gm}$ $(A_1 A_5)$ *....“*

$2\,C_3C_4 + 2\,C_1C_5 = 2\,A_3A_4 + 2\,A_1A_5\ (= k^0)$, und es läſst sich nun graphisch[212]) nachweisen, daſs entweder

$$\smile C_3C_4 = A_3A_4$$

oder

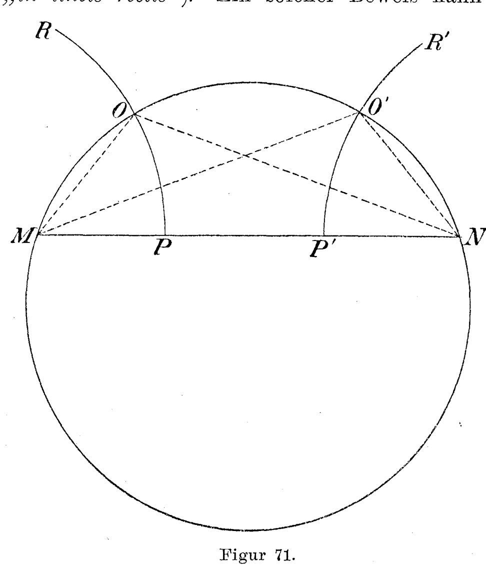
$$\smile C_3C_4 = A_1A_5;$$

$\smile C_3C_4$ ist aber gröſser als A_3A_4; denn:

$$\frac{\sin A_3A_4}{\sin C_3C_4} = \frac{r \cdot \varrho}{r_3 \cdot r_4} \quad (\text{III}, 15^1);$$

hier ist aber $r \cdot \varrho = r_1 \cdot r_4 < r_3 \cdot r_4$ [vgl. (1)], denn $r_1 < r_3$, also $\smile C_3C_4 > A_3A_4$[213]), womit die Schluſsreihe in Menelaos' Beweis hergestellt ist.

212) Daſs der Beweis graphisch war, sagt Menelaos selbst (siehe Note 211: „*in lineis rectis*"). Ein solcher Beweis kann auf vielfache Art geführt werden. Es handelt sich ja darum, auf der Basis (MN) eines gegebenen Abschnittes (von k^0) zwei in demselben eingeschriebene Dreiecke zu zeichnen, so daſs deren Schenkel proportional sind (Figur 71) im Verhältnisse μ. Der Ort der Dreiecksscheitel wird zwei gleiche Kreise (PR und $P'R'$) [vgl. Apollonios, ed. Heiberg II, p. 181 ff., und oben Seite 104 und Note 174]; die Scheitel müssen also in O oder O' liegen, d. h. die Dreiecke werden kongruent q. e. d. Dieser Beweis gleicht dem unsrigen, nämlich daſs $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin (c \div y)}{\sin (c \div x)}$, für $90^0 > c \gtrless \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$, nur von $x = y$ oder $x + y = c$ erfüllt wird. Für $c = 180^0$ wurde der Satz schon oben vorausgesetzt; vgl. Note 206. — Daſs ähnliche Sätze wie der hier referierte in der vorptolemaiischen Trigonometrie öfters vorkommen, zeigt der Umstand, daſs in Menel. III, 7 der Satz: „Wenn $\frac{\text{crd. } 2(k \div x)}{\text{crd. } 2x} = \frac{\text{crd. } 2(k \div y)}{\text{crd. } 2y}$, so wird $x = y$", ohne irgend eine Erörterung als bekannt vorausgesetzt wird.



Figur 71.

213) Daſs Menelaos ohne irgend eine Erklärung voraussetzt, daſs $\smile C_3C_4 > A_3A_4$, kommt wohl daher, daſs diese Thatsache aus den Rektascensionstafeln allgemein bekannt war. In III, 15^2 hat er ja schon den Punkt der Ekliptik (C_2: Figur 69—70) bestimmt, von wo aus die Längendifferenzen gegen die Wenden hin anfangen kleiner als die zugeordneten Rektascensionsdifferenzen zu werden.

Wir haben die Sätze III, 15^{1-4} so genau erörtert, nicht nur, weil wir in deren Beweisen Voraussetzungen aus der Trigonometrie der Ebene und, wenn wir uns nicht irren, Überreste der ältesten sphärischen Trigonometrie gefunden haben, sondern auch, weil Maurolycus die Beweise des Menelaos weiter entwickelt und zur Berechnung angewandt hat.

Wie Menelaos setzt Maurolycus[214]):

$\sin 90^0 \cdot \sin PC = \sin^2 PC_2 = \sin PC_1 \cdot \sin PC_5$ [Menel. III, 15^{3-4}],

folgert daraus $\smile BC_2 + BA_2 = 90^0$ [Menel. III, 15^3], ferner dafs $\smile BC_2 \div BA_2$ ein Maximum ist [Menel. III, 15^3], endlich dafs

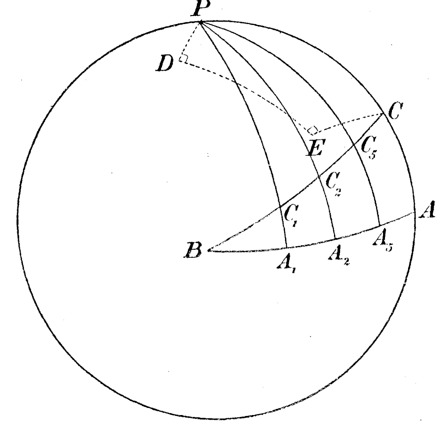
$$\smile C_1 C_2 = A_2 A_5$$
$$\smile C_2 C_5 = A_1 A_2$$
$$\left.\begin{aligned}\smile BC_1 &= AA_5\\ \smile BA_1 &= CC_5\end{aligned}\right\} \text{[Menel. III, } 15^4\text{],}$$

und nun giebt er mit Hülfe von Menelaos III, 2 Berechnungsbeispiele für alle Fälle des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, das je nach Bedarf mit einem der Dreiecke BA_1C_1, BA_2C_2 oder BA_5C_5 identifiziert wird.[215])

Ist z. B. BC_1 und BA_1 gegeben, so findet Maurolycus C_1A_1 durch Anwendung von III, 2 auf die Dreiecke PCC_1 und PAA_1, was ergiebt:

$$\frac{\sin PC_1}{\sin PA_1} = \frac{\sin C_1 C}{\sin A_1 A},$$

d. h. $\dfrac{\cos C_1 A_1}{\sin 90^0} = \dfrac{\cos BC_1}{\cos BA_1}$ (Grundformel III), wo BC_1 und BA_1 gegeben sind.



Figur 72.

Ganz neu ist wahrscheinlich der Beweis des Maurolycus, dafs

$$\sin B\widehat{C_1}A_1 = \sin \widehat{PC_5},$$
$$\sin B\widehat{C_2}A_2 = \sin \widehat{PC_2}$$

und

$$\sin B\widehat{C_5}A_5 = \sin \widehat{PC_1}.$$

Der Beweis kann durch Menelaos III, 2 geführt werden, denn ziehen wir (Figur 72) mit C_1 als Pol den gröfsten Kreis DE, so bekommen wir:

214) Vgl. Bulletino Boncompagni **9** (1876), p. 71 ff.

215) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 152—153. Dafs v. Braunmühl dem Maurolycus diese Konstruktion zuschreibt, kommt daher, dafs letzterer die Sätze III, 15^{2-4} aus seiner Menelaosausgabe ausgeschlossen hat, um sie in einer verbesserten Gestalt in seine eigene *Sphärik* aufzunehmen; vgl. Seite 20—21 oben.

$$\frac{\sin DE}{\sin 90^0} = \frac{\sin BA_1}{\sin BC_1} = \frac{\sin PC}{\sin PC_1} = \frac{\sin PC_5}{\sin 90^0},$$

d. h.

$$\sin PC_5 = \sin DE = \sin B\widehat{C_1}A_1 \quad \text{q. e. d.}$$

Durch diese Neuerung ist es Maurolycus gelungen, Berechnungen zu erledigen, zu welchen wir die zwei Grundformeln V und VI (vgl. Seite 82) gebrauchen, die wir nicht einmal implicite in Menelaos' und Ptolemaios' Werken gefunden haben.

Maurolycus' Anwendung von Menelaos III, 2 und 15 zeigt uns durchaus, dafs diese Sätze auch von Menelaos zu Berechnungen verwendet werden konnten, statt allein zum Beweis von Ungleichheiten von Bogenverhältnissen. Ob Menelaos sie thatsächlich *ähnlich* wie Maurolycus verwandt hat, das mufs lediglich Vermutung bleiben, so lange die Belege fehlen.

c. Die Erfindung der Trigonometrie.

Um ein Totalbild von der ältesten Geschichte der Trigonometrie zu gewinnen, wollen wir zum Schlufs die zerstreuten Elemente aus den vorhergehenden Untersuchungen sammeln.

Zuerst können wir es als ausgemacht betrachten, dafs sowohl die ebene als die sphärische Trigonometrie schon zur Zeit des Menelaos eine so hohe Entwickelungsstufe erreicht hatte, dafs Ptolemaios kaum etwas Neues hat hinzufügen können.

Es leuchtet ein, dafs Ptolemaios aus den älteren trigonometrischen Werken in seiner *Syntaxis* nur dem für seine Zwecke durchaus Nötigen Platz gegeben und sogar wichtige Sätze wie Menelaos III, 2 und 15[1] ausgeschlossen hat, um seine mathematischen Hülfsmittel so einfach und leicht fafsbar wie möglich zu machen.[216]) Selbst wenn dadurch seine Berechnungen schwerfälliger werden, so läfst sich dieses Verfahren schon verteidigen. Eine Folge dieser Vereinfachung ist indessen, dafs wir von der ältesten Trigonometrie ein verschleiertes, ja teilweise sogar verzerrtes Bild bekommen haben.

Aus den Kenntnissen, die Menelaos aus der Trigonometrie der Ebene voraussetzt, schliefsen wir mit Sicherheit, dafs die betreffenden Werke, welchen

216) Dafs Ptolemaios das ihm zur Verfügung stehende Material möglichst abkürzte, sagt er selbst in den Einleitungen zur Sehnentafelberechnung und zu den *σφαιρικαὶ δείξεις*. Da heifst es nämlich (*Syntaxis* I, cap. 10, ed. Heiberg I, p. 31): „*πρότερον δὲ δείξομεν, πῶς ἂν ὡς ἔνι μάλιστα δι' ὀλίγων καὶ τῶν αὐτῶν θεωρημάτων εὐμεθόδευτον καὶ ταχεῖαν τὴν ἐπιβολὴν τὴν πρὸς τὰς πηλικότητας αὐτῶν ποιοίμεθα*, ..." und *Syntaxis* I, cap. 13, ed. Heiberg I, p. 68: „*προεκθησόμεθα λημμάτια βραχέα καὶ εὔχρηστα, δι' ὧν τὰς πλείστας σχεδὸν δείξεις τῶν σφαιρικῶς θεωρουμένων, ὡς ἔνι μάλιστα, ἁπλούστερον καὶ μεθοδικώτερον ποιησόμεθα.*"



er seine Voraussetzungen entnahm, viel mehr enthielten als die einzelnen Theoreme, die Ptolemaios zur Erklärung seiner Sehnentafelberechnung gerade herausgreift.

Nur zwei von Menelaos' Voraussetzungen ($\sin a = \sin(180^0 \div a)$ und $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$) treffen wir in der *Syntaxis,* und zwar in dem Kapitel „περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν"; was diese Voraussetzungen betrifft, so nennt Menelaos keine Quelle. Von einer der Voraussetzungen, die sich in der *Syntaxis* nicht finden, sagt Menelaos, daſs sie „*in rectis lineis*" bewiesen wird (vgl. Note 211—212), von anderen, daſs er sie einem seiner eigenen Werke entnommen hat (vgl. Seite 106—107 und 110 ff).

Nun legt Theon dem Menelaos ein Werk von 6, dem Hipparch ein Werk von 12 Büchern „περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν" bei. Es dürfte sich daraus ergeben, daſs die nämlichen Werke des Menelaos und Hipparch Lehrbücher der Trigonometrie der Ebene waren, denen Menelaos dann seine genannten Voraussetzungen entnommen. Diejenigen dieser Voraussetzungen, von denen Menelaos nicht ausdrücklich sagt, daſs er sie seinem eigenen Werke entnimmt, dürften schon bei Hipparch vorkommen, die anderen dagegen nicht. Jedenfalls verbreiten die in Menelaos' *Sphärik* vorausgesetzten Sätze einiges Licht über den Inhalt der beiden verlorenen Werke.

Ferner, da Menelaos gewisse, offenbar nur trigonometrisch, d. h. annäherungsweise durch Berechnung bestimmbare Gröſsen als „*gegebene*" (δεδομένα) bezeichnet (vgl. Seite 119), und da dieselbe Bezeichnung auf genau dieselbe Weise in Ptolemaios' *Analemma* benutzt wird (vgl. Seite 83), und da endlich Marinos dem Ptolemaios eine dem entsprechende Definition vom Wort δεδομένον zuschreibt (vgl. Seite 120), so schlieſse ich, daſs Menelaos trigonometrische Tafeln besaſs, d. h., daſs in seinem Werke „περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν" ein „κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν" stand (so lautet nämlich die Überschrift der Sehnentafel im Ptolemaios).

Es ist nun nicht zuviel gewagt, anzunehmen, daſs in Hipparchs Werk mit demselben Titel, das von Theon auf analoge Weise erwähnt wird, auch eine trigonometrische Tafel stand; denn wie man schon längst hervorgehoben hat, lassen sich die Beispiele und Bestimmungen in Hipparchs *Kommentar* zu Aratos' *Phainomena* kaum anders erklären als Ergebnisse trigonometrischer Berechnungen (vgl. Seite 84 ff.). Hinzu kommt ferner, daſs Pappos dem Hipparch eine numerische Lösung ganz ähnlicher Probleme zuschreibt (vgl. Seite 70), und daſs wir nachweisen können, daſs die zu dieser Lösung notwendigen sphärisch-trigonometrischen Sätze schon *vor* Menelaos existierten.

Überblicken wir doch unsere Resultate in Bezug auf die sphärische Trigonometrie genauer.

Aus Menelaos' *Sphärik* konnten wir konstatieren, daſs der Doppel-

verhältnissatz (der Satz von der Erhaltung des anharmonischen Sinusverhältnisses durch Projektion) auf der Kugel von Menelaos als allgemein bekannt vorausgesetzt wurde. Wir haben nachgewiesen, dafs dieser Satz eine direkte Folge vom sogenannten Satz des Menelaos war, oder aber auf ganz ähnliche Weise wie dieser aus der Ebene auf die Kugel übertragbar war. Wir sahen endlich, dafs Menelaos' Satz anders formuliert war als die anderen Sätze der *Sphärik,* und zwar zunächst wie ein zu einem astronomischen Werk gehörender Hülfssatz, ferner, dafs Menelaos die aus der ebenen Geometrie und Trigonometrie zum Beweise dieses Satzes notwendigen Hülfssätze als allgemein bekannt voraussetzt. Diese Hülfssätze knüpft Ptolemaios in seiner *Syntaxis* an die *σφαιρικαὶ δείξεις* und nicht an die Sehnentafelberechnung an.

Die einzige natürliche Erklärung dieser Thatsachen ist die, dafs der Satz des Menelaos sowie der Doppelverhältnissatz, beide auf die Kugel übertragen, in einem älteren astronomischen Werk standen. Es gewinnt somit die Annahme an Wahrscheinlichkeit, dafs sie dem Hipparch bekannt gewesen sind.

Nun wissen wir, dafs die numerischen Beispiele in Hipparchs *Kommentar* sich auf die Auf- und Untergänge der Tierkreisbilder beziehen, ferner, dafs eine genauere Auseinandersetzung dieses Problems, sowie des der Auf- und Niedergänge der Tierkreiszeichen (mit denen die Bilder verglichen werden) sich in seinem Werke „*περὶ συνανατολῶν* etc. *τῶν ἀπλανῶν*“ fand. Pappos schreibt ihm die *numerische* Lösung des Obliquascensionsproblems (Aufgang der Tierzeichen) zu. Hipparchs Angabe, dafs er seine Lösung *διὰ τῶν γραμμῶν* erledigt, kann sich, wie wir sahen, auf die *σφαιρικαὶ δείξεις* beziehen, und dem entsprechend werden sämtliche diese Probleme im Ptolemaios mit Hülfe der *σφαιρικαὶ δείξεις* (d. h. der Anwendungen von Menelaos' Satz) und der Sehnentafel gelöst. Ferner sahen wir, dafs Ptolemaios bei der Lösung des einen dieser Probleme (die Berechnung einer Obliquascensionstafel) zwei Methoden giebt, deren eine durch Beispiele erläutert wird, die mit der Tafel nicht übereinstimmen, während die Beispiele der anderen in voller Übereinstimmung mit der Tafel sind. Endlich haben wir in Menelaos III, 15 (vgl. Seite 115, 119 und Note 213) Sätze gefunden, deren Aufstellung sich einerseits erst durch die Kenntnis einer Rektascensionstafel natürlich erklären läfst, und die andererseits der Berechnung einer solchen Tafel dienlich sind.

Alle Anzeichen laufen also dahin zusammen, dafs Hipparch die zur Berechnung notwendigen sphärisch-trigonometrischen Sätze besafs, dafs er eine trigonometrische Lösung des Rektascensions- und des Obliquascensionsproblems gegeben hat, und dafs sein Hülfsmittel dazu eine trigonometrische Tafel war. Es ergiebt sich somit, dafs Hipparchs trigonometrische Kennt-

nisse keineswegs hinter denen des Ptolemaios, wie sie in der *Syntaxis* dargelegt sind, zurückstehen, und daſs die Trigonometrie bei Menelaos schon bedeutend weiter fortgeschritten war.

Bis zu diesem Punkt sind unsere Schluſsfolgerungen sicher und bestätigen durchaus die Ansichten von Delambre und Tannery. Was die noch übrig bleibenden Fragen betrifft, so sind wir auf Vermutungen angewiesen.

Was wir gern wissen möchten, ist dies:

1. Welche trigonometrischen Methoden besaſsen die Griechen überhaupt?
2. In welcher chronologischen Reihenfolge wurden diese Methoden entwickelt, und wie wurden sie erfunden?
3. Wem gehören die Erfindungen dieser Methoden, oder, wenn dies nicht zu ermitteln ist, in welche Zeit fallen sie ungefähr?

Wir können deutlich vier von einander mehr oder weniger abhängige Richtungen unterscheiden, die alle auf die annäherungsweise Berechnung abzielen. Wir können auch nachweisen, daſs jede dieser vier Gruppen von Werken vertreten ist, die, insofern sie zu derselben Gruppe gehören, alle denselben Titel führen, nämlich:

1. *Die Trigonometrie der Ebene mit den Sehnentafeln:* „περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν“.

   Hipparch (12 Bücher). — Menelaos (6 Bücher). — Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 10—11. — Theons *Kommentar* (Baselerausgabe p. 39—55).
2. *Die sphärisch-trigonometrischen Hülfssätze:* „αἱ σφαιρικαὶ δείξεις“.

   Hipparch. — Menelaos' *Sphärik* III. — Ptolemaios' *Syntaxis* I, cap. 13. — Theons *Kommentar* (Baselerausgabe p. 61—70).
3. *Die Sonnenuhrkonstruktionen:* „περὶ ἀναλήμματος“.

   Ptolemaios. — Diodoros.
4. *Die Planisphären:*

   Hipparch (?). — Ptolemaios.

Welche von diesen Methoden ist aber die älteste?

Schon im voraus können wir annehmen, daſs die Trigonometrie der Ebene nicht die älteste gewesen ist, d. h., daſs die Sehnentafeln verhältnismäſsig spät berechnet worden sind. Denn so wie die Griechen nun einmal veranlagt waren, können wir uns kaum denken, daſs solche Tafeln an sich das Ziel gewesen sein könnten. Sie bildeten für die Griechen vielmehr lediglich ein Mittel — ein notwendiges Übel möchten wir fast sagen —, das zu entwickeln man sich nur in Rücksicht auf praktisch astronomische Zwecke veranlaſst sah. Die Probleme aber, durch die man zur Tafelberechnung angeregt wurde, müssen wir zunächst in der sphärischen Astronomie suchen; denn in der Ebene wuſste man sich schon zu helfen, wie Archi-

medes' Kreismessung und Aristarchs Werk bezeugen, während man auf der Kugel in der That, sobald es sich um Berechnungen handelte, ganz hülflos, und wie Hypsikles (oder besser wie der Urheber der in seinem ἀναφορικός angewandten Methode) auf Postulate angewiesen war.

Was die Sonnenuhrkonstruktionen betrifft, so sind wir mit v. Braunmühl geneigt, die dazu angewandte Methode als die älteste zu betrachten, aber nur als eine instrumentale, die dann später durch den Gebrauch der indessen berechneten Sehnentafeln vervollständigt wurde. Die Gründe für diese Ansicht haben wir oben (Seite 85—86) entwickelt.

Die Planisphären zielen wie die Analemmata zunächst auf die Bestimmung der Zeit ab. Wie es Tannery hübsch dargelegt[217]), ist die Entwickelung der planisphärischen Methode ungefähr dieselbe, die wir bei den Analemmata angenommen haben. Es bestand zuerst eine rein instrumentale Methode zur Auffindung der Zeit während der Nacht. Diese primitive Methode wurde dann später mit einer konstruktiven (der stereographischen Projektion) in Verbindung gebracht, blieb aber dennoch immerhin eine instrumentale. Zuletzt endlich wurden dann die Sehnentafeln zur Auflösung der durch die Konstruktion hervorgebrachten ebenen Dreiecke angewandt, wodurch in der That eine Berechnung sphärischer Probleme erreicht wurde. Dieser Schritt ist aber nach Tannery erst von Ptolemaios gethan.

Wegen solcher Erwägungen glauben wir, daſs es die Erfindung der σφαιρικαὶ δείξεις war, die eine trigonometrische Tafelberechnung notwendig machte, und daſs die in Bezug auf die zu der sphärischen Astronomie (den φαινόμενα) gehörenden Figuren vorgenommenen Vergleichungen zwischen Bogengröſsen und Geraden als die ältesten primitiven trigonometrischen Erscheinungen zu betrachten sind.

Zur Stütze dieser Annahme können wir auch mehrere recht triftige Gründe anführen:

Die uralte sphärische Astronomie, so wie wir sie durch die φαινόμενα des Eudoxos, Aratos und Euklid kennen gelernt, konnte auf die Dauer die Bedürfnisse der praktischen Anwendungen nicht befriedigen, aber noch mehr, es gab schon in der *voreuklidischen Sphärik,* d. h. auch in den ältesten φαινόμενα ein Problem, das Obliquascensionsproblem, dessen Lösung selbst nach den damaligen primitiven Forderungen nicht geometrisch zu bewältigen war. Dazu war dieses Problem wegen seiner Anwendungen in der Nautik, Astronomie u. s. w. für die Griechen von einer solchen Wichtigkeit, daſs man sich eifrig bemühte, eine Lösung zu finden (das bestätigt Pappos' Bericht, vgl. Seite 70, und Hypsikles' ἀναφορικός, vgl. Seite 72 und 76).

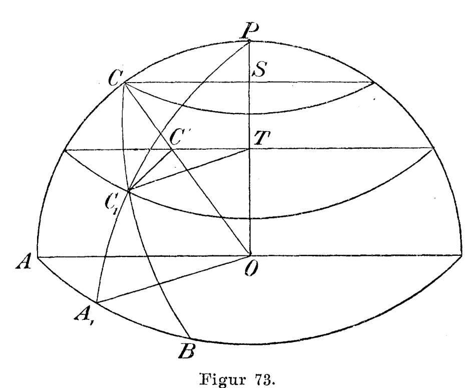
---

217) Tannery, *l'astr. anc.* p. 50—55.

Anfangs hat man natürlich nicht an eine numerische annäherungsweise Lösung gedacht, sondern an eine exakte geometrische. Das Problem war aber, wie oben dargelegt (vgl. Seite 78), nicht in der gewünschten Weise lösbar. Man wurde einfach gezwungen, neue Bahnen einzuschlagen, und fing dann an, die Bogenverhältnisse (zwischen ekliptischen Längen auf der einen, Rektascensionen und Obliquascensionen auf der anderen Seite) mit denen gerader Linien zu vergleichen, und zwar benutzte man dazu das Zunächstliegende, nämlich den Kugel- und die Parallelkreisdurchmesser.

Die Gründe, die uns zu der Annahme geführt haben, dafs die Entwickelung gerade diese gewesen ist, sind erstens die Sätze III, 11—12 im Theodosios (vgl. Seite 79—80), zweitens, dafs die Kenntnis des ersten dieser Sätze wahrscheinlich von Menelaos, aber jedenfalls von den Arabern dem Apollonios zugeschrieben wird (vgl. Seite 117), schliefslich, dafs wir aus den letzten Sätzen (III, 15^{1-4}) in Menelaos' *Sphärik* schliefsen dürfen, dafs die Parallelkreisdurchmesser auch von seinen Vorgängern als primitive trigonometrische Funktion verwendet wurden.

Da es sich nun zeigte, dafs die Herstellung von Ungleichheiten zwischen Bogen- und Durchmesserverhältnissen nicht weiter führte, so begann man bei der anschaulichen Betrachtung der sphärischen Figuren, die sich durch die Probleme selbst darboten, dieselben mit einem Netz von Durchmessern *und Sehnen* zu durchziehen; denn mit den Durchmessern allein kam man natürlich nicht vorwärts.



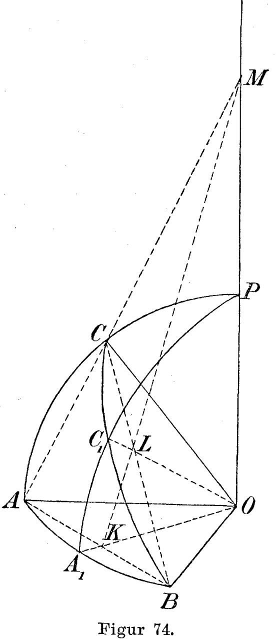
Figur 73.

Die sphärische Figur, die sich in Theodosios III, 11 darbot, war das sphärische Viereck, die Figur von Menelaos' Satz (Meridian-Äquator-Ekliptik-Deklinationskreis), und nun war der Weg zum Beweis von Menelaos' Satz, wenn die analoge Figur und der analoge Satz in der Ebene schon aus den *Porismen* bekannt waren, nicht weit. Figur 73, die Figur von Theodosios III, 11, und 74, die Figur von Menelaos' Satz (zum Vergleich mit Figur 73 spezialisiert) zeigen in der That, wie leicht der Übergang von ersterer zu letzterer gewesen sein mufs.

Es ist jedoch immerhin eine Frage, ob man direkt von Theodosios III, 11 zum Satze des Menelaos gelangt ist. Sowohl v. Braunmühl[218])

218) Vgl. v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 16.

als namentlich Zeuthen[219]) trägt Bedenken, zu glauben, daſs alle Fälle der Auflösung sphärischer Dreiecke durch Spezialisierung eines allgemeinen Theorems erledigt worden sind (wie es in der *Syntaxis* mit Menelaos' Satz der Fall ist), ohne daſs erst die für jeden Einzelfall nötigen Sätze entwickelt waren. Zeuthen[220]) ist deswegen der Ansicht, daſs wenigstens ein Teil der in der *Syntaxis* behandelten Probleme der sphärischen Astronomie auf eine mehr direkte Weise gelöst worden ist, ehe alle die Lösungen auf die Anwendung von Menelaos' Satz zurückgeführt wurden.



Figur 74.

Obwohl man zugeben muſs, daſs Zeuthens Erwägungen schwer wiegen, so kann ich es doch nicht für durchaus undenkbar halten, daſs man in diesem Fall, wo es sich um eine Übertragung eines schon lange wohlbekannten Satzes aus der Ebene handelt, gleich auf eben diesen Satz, der sich als der ergiebigste erwies, gekommen ist.

Wir können uns aber auch vorstellen, daſs man mit der Figur in Theodosios III, 11 (Figur 73) als Ausgangspunkt zuerst auf mehr spezielle Methoden zur Lösung der einfachsten Probleme, d. h. zunächst des Rektascensions- und Deklinationsproblems, gekommen ist.

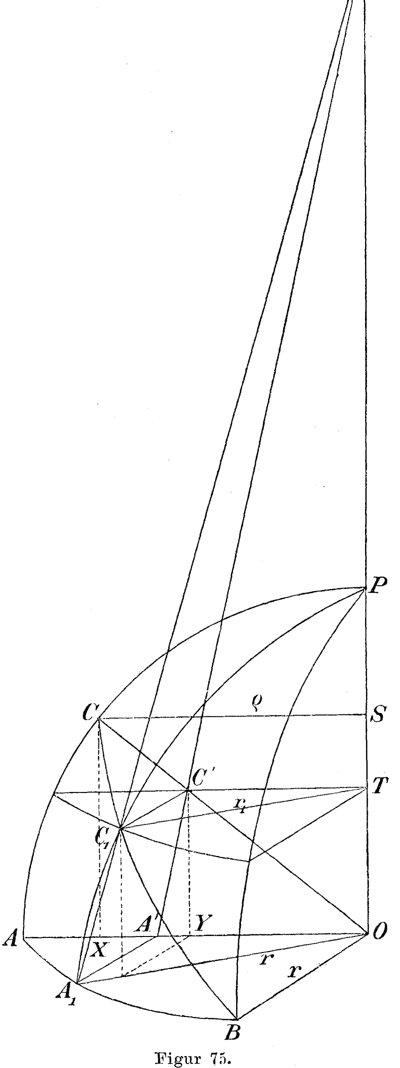
219) Vgl. Zeuthen, Bibl. math. 1900, p. 20.

220) Zeuthen sagt (l. c. p. 20—21): *„selon moi un tel commencement serait même inouï dans l'histoire des mathématiques, où l'on connaît ordinairement les solutions particulières des principales questions resolues plus tard par une méthode générale avant de construire cette méthode. Il est donc à supposer qu'on ait résolu d'une manière plus directe les questions de trigonométrie sphérique dont s'occupe Ptolémée, ou du moins une partie de ces questions, avant d'en réduire toutes les solutions à l'application du théorème de Menelaos."* — Wenn Zeuthen nun im Folgenden vermutet, daſs Menelaos derjenige ist, der alle Fälle der Auflösung sphärischer Dreiecke auf die Anwendung von Menelaos' Satz zurückführte, so widerlegt unsere Untersuchung von Menelaos' drittem Buch diese Vermutung. Die ganze von Zeuthen angenommene Entwickelung liegt jedenfalls vor Menelaos, wahrscheinlich vor Hipparch. Menelaos baut allerdings seine sphärisch-trigonometrischen Sätze fast ausschlieſslich auf dem Satz des Menelaos auf; bei den Berechnungen aber müssen wir zunächst annehmen, daſs er den entgegengesetzten Weg einschlug, und die von ihm selbst erfundenen Sätze statt des Satzes des Menelaos anwandte, sobald dieselben ihm die Berechnung erleichtern konnten (vgl. die Seiten 93, 115—116 und Note 205[a]). Die allgemeine Zurückführung zum Satze des Menelaos ist dann entweder vor Menelaos erledigt und von Ptolemaios nachgeahmt, oder erst von Ptolemaios unternommen.

Überreste solcher Methoden haben wir allerdings nicht in der *Sphärik* des Menelaos gefunden, die ganz auf dem Satz des Menelaos gebaut ist, und die Erleichterungen in den Berechnungen, die wir dem Menelaos zuzuschreiben geneigt waren (vgl. die Seiten 93, 115—116 und Note 205[a]), gehören ohne Zweifel ihm selbst und beruhen alle auf der Kenntnis des Satzes des Menelaos. Auch nicht die anderen kugelgeometrischen Sätze, deren Kenntnis wir bei den Griechen vor Menelaos voraussetzten, kommen hier in Frage, erstens weil sie nicht zur Berechnung geeignet sind, zweitens weil sie die Übertragung von Menelaos' Satz voraussetzen.

Dagegen kann man, von der Figur in Theodosios III, 11 (Figur 73) ausgehend, ohne viel zu dieser hinzuzufügen, auf sehr einfache Weise zum Beweis von zwei Spezialfällen des allgemeinen Satzes III, 15[1] im Menelaos gelangen, und mit Hülfe dieser Spezialfälle lassen sich mehrere der Probleme in der *Syntaxis* lösen.

Projizieren wir nämlich in Theodosios' Figur (73) die Punkte A_1 und C_1 senkrecht auf die Ebene OAP, so bekommen wir die Punkte A' und C'. Die Geraden A_1C_1 und $A'C'$ treffen sich dann in einem Punkte Q auf der Verlängerung von OP, und wir bekommen (Figur 75):



Figur 75.

1) $$\frac{\frac{1}{2}\,\text{crd. }2\,AA_1}{\frac{1}{2}\,\text{crd. }2\,CC_1} = \frac{A_1A'}{C_1C'} = \frac{A_1Q}{C_1Q} = \frac{A_1O}{C_1T} = \frac{r}{r_1},$$

d. h. $$\frac{\sin AA_1}{\sin CC_1} = \frac{r}{r_1}. \qquad (1)$$

2) $$\frac{\frac{1}{2}\,\text{crd. }2\,A_1B}{\frac{1}{2}\,\text{crd. }2\,C_1B} = \frac{OA'}{OC'} = \frac{OA'}{C'T}\cdot\frac{C'T}{OC'} = \frac{OA_1}{C_1T}\cdot\frac{CS}{CO} = \frac{r}{r_1}\cdot\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho}{r_1},$$

d. h. $$\frac{\sin A_1B}{\sin C_1B} = \frac{\varrho}{r_1} \qquad (2)$$

(1) und (2) bilden offenbar zwei Spezialfälle von Menelaos III, 15[1] (vgl. Seite 114—115), welcher Satz sagt:

$$\frac{\sin A_1 A_3}{\sin C_1 C_3} = \frac{r \cdot \varrho}{r_1 \cdot r_3}.$$

Implicite stehen die Gleichungen (1) und (2) in Menelaos' *Sphärik,* wo sie gefunden worden sind (Fig. 75) durch Anwendung von III, 2 bezw. auf die Dreiecke PCC_1 und PAA_1 und auf BC_1A_1 und PC_1C.[221])

Wenn die Deklinationen der Ekliptikpunkte bestimmt sind, giebt (1) die Rektascensionen derselben. Für den Punkt C_1 der Ekliptik (BC) mit der Länge BC_1 ($= \lambda$) und der Deklination C_1A_1 ($= \delta$) giebt (1) nämlich zur Bestimmung der Rektascensionen BA_1 ($= \alpha$):

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} = \frac{1}{\cos \delta}, \qquad \text{(Grundformel III)}$$

welche Gleichung ebenso brauchbar ist wie die von Ptolemaios benutzte[222]):

$$\frac{\sin (90^0 \div \varepsilon)}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin (90^0 \div \delta)}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin 90^0}, \qquad \text{(Grundformel II)}$$

wo ε die Neigung der Ekliptik ist.

(2) giebt $\frac{\cos \varepsilon}{\cos \delta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda}$ und ist also weniger brauchbar.

Um durch Figur 75 die Deklinationen zu bekommen, müssen wir die Punkte C und C' senkrecht auf AO projizieren; dadurch erhalten wir die Punkte X und Y, und die ähnlichen Dreiecke OCX und $OC'Y$ geben dann:

$$\frac{C'Y}{CX} = \frac{C'O}{CO},$$

d. h.

$$\frac{\frac{1}{2} \text{crd. } 2\, C_1 A_1}{\frac{1}{2} \text{crd. } 2\, CA} = \frac{\frac{1}{2} \text{crd. } C_1 B}{r},$$

also:

$$\frac{\sin C_1 A_1}{\sin CA} = \frac{\sin C_1 B}{r}. \qquad (3)$$

In diesem Falle giebt (3) zur Berechnung von δ:

$$\frac{\sin \delta}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \lambda}{1}.$$

Es ist dies die Grundformel I für Dreieck AC_1A_1; dieselbe findet sich

---

221) (1) finden wir in III, 15[2] (vgl. Gleichung (2) Seite 118), (2) in III, 15[1] (vgl. Gleichung (2) Seite 115). — (1) kommt der Grundformel III: $\cos a = \cos c \cos b$ (vgl. Seite 82) gleich und zwar für Dreieck BA_1C_1 (vgl. Note 205[a]). — (2) kommt der Formel des Ibn-Junos: $\frac{\cos B}{\cos b} = \frac{\sin c}{\sin a}$ gleich (vgl. Seite 118).

222) Vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* I, cap. 16, ed. Heiberg I, p. 82—83.

implicite im Menelaos III, 12 (vgl. Seite 108 und Note 185[a]), wo sie durch III, 2 bewiesen wird. Ptolemaios[223]) erhält durch Menelaos' Satz:

$$\frac{\sin 90^0}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin 90^0}{\sin \delta} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin 90^0}.$$

Diese Erörterung zeigt, wie man durch die an Theodosios III, 11 sich eng anschliefsende Figur 75 eine Berechnung der Sonnendeklinationen und Sonnenrektascensionen und einer Deklinations- und Rektascensionstafel, wie die in der *Syntaxis*, leicht erledigen kann. Die Obliquascensionen dagegen, deren Berechnung auf Grundformel II (vgl. Seite 73 und 82), d. h. $\operatorname{tg} c = \sin b \cdot \operatorname{tg} C$, beruht, ergeben sich schwerlich durch Figur 75.

Methoden wie die hier in Bezug auf Figur 75 dargelegten können wir bei den Griechen vor Hipparch oder möglicherweise noch bei Hipparch selbst voraussetzen. Sie würden mit den Ergebnissen unserer Untersuchungen von Theodosios' und Menelaos' *Sphärica* übereinstimmen, denn sie schliefsen sich eng an die Figur im Theodosios an und kommen in einer allgemeinen Gestalt im Menelaos vor. Aufserdem bildet Figur 75 ein natürliches Zwischenglied zwischen 73 und 74, d. h. zwischen dem dem Apollonios zugeschriebenen Satz und dem Satz des Menelaos.

Wirkliche Spuren solcher Zwischenglieder haben wir aber durchaus nicht gefunden; wir können deswegen nur sagen: Wenn die Griechen nicht direkt auf Menelaos' Satz gekommen sind und denselben nicht gleich vom Anfang ab benutzt haben, so können wir uns wohl denken, dafs die vor der Übertragung dieses Satzes angewandten Methoden der oben erwähnten Art gewesen sind.

Nur die Frage ist noch übrig, *wann* die verschiedenen Fortschritte in der Erfindung und Entwickelung der ältesten Trigonometrie geschehen sind, und wem wir sie zuschreiben können.

Mit Sicherheit läfst sich nur eine obere und untere Grenze feststellen:

Zur Zeit des Aristarch von Samos (c. 275 v. Chr.) existierte keine berechnende Trigonometrie, zur Zeit des Hipparch (c. 150 v. Chr.) waren aller Wahrscheinlichkeit nach sämtliche in Ptolemaios' *Syntaxis* gebrauchte Methoden vollkommen entwickelt.

Zur Zeit des Menelaos endlich erreichte die Trigonometrie sicherlich die höchste Entwickelungsstufe, zu der sie sich überhaupt bei den Griechen emporschwang; denn aus unserer Untersuchung geht es deutlich hervor, dafs Menelaos zuerst die Definition des sphärischen Dreiecks aufstellte, und dafs die Sätze III, 2—10 seiner *Sphärik*, die eben auf dieser Neuerung beruhen, von ihm selbst erfunden sind.[224])

223) Vgl. Ptolemaios, *Syntaxis* I, cap. 14, ed. Heiberg I, p. 76—77.

224) Auch die Sätze III, 11—14 gehören wohl hauptsächlich dem Menelaos

Wieviel von der Trigonometrie schon vor Hipparch erfunden war, ist dagegen nicht leicht zu entscheiden.

Dafs Hipparch die Trigonometrie ohne Vorgänger erfand und so weit entwickelte, darf man kaum annehmen. Wir haben aber nur eine einzige Nachricht gefunden, die uns auf die Zeit vor Hipparch hinweist, und zwar eine, deren Authentizität nicht festgestellt und deren Bedeutung nicht leicht zu beurteilen ist.

Diese Nachricht redet von Apollonios (c. 250—200 v. Chr.) und bezieht sich offenbar auf das Obliquascensions- und Rektascensionsproblem. Wir vermuten deswegen auch, dafs Apollonios in der That die ersten Schritte zur berechnenden sphärischen Geometrie gethan. Was er in dieser Beziehung geleistet hat, kann viel, aber auch sehr wenig sein. Wir wissen es nicht und stofsen aufserdem auf Schwierigkeiten, in dieser Frage irgend etwas zu entscheiden. Die Übertragung der Sätze aus den *Porismen* auf die Kugel sind wir ja zunächst geneigt, bei einem grofsen Geometer wie dem Apollonios zu suchen, um so mehr, weil derselbe eben mit den betreffenden Sätzen durchaus vertraut war, was seine Kegelschnittlehre beweist. Die eigentliche Berechnung von Sehnentafeln dagegen können wir zunächst von einem ausschliefslich praktischen Astronomen wie Hipparch erwarten, und infolge Theons Bericht sind wir in der That berechtigt zu glauben, dafs Hipparchs Tafel die erste war.

Die Annahme aber, dafs Apollonios die geometrischen Hülfsmittel, Hipparch die praktischen entwickelt habe, führt uns zur Konsequenz, dafs Menelaos' Satz bis auf Menelaos, ganz wie später von Ptolemaios ab bis zu den Indern und Arabern, das einzige sphärisch-trigonometrische Mittel zur Auflösung sphärischer Dreiecke gewesen ist. Nach dem überlieferten Material ist dies allerdings das zunächst Wahrscheinliche, nach den natürlichen Regeln für die Entwickelung der Mathematik dagegen nicht. Wir geraten deswegen in ein Dilemma, zu dessen Lösung uns die notwendigen Kriterien nicht zur Verfügung stehen.

Müssen wir aber darauf verzichten, die frühesten Vorgänge bei der Erfindung der Trigonometrie klar zu legen, so können wir uns damit trösten, dafs mit Hülfe von Menelaos' *Sphärik* wenigstens ziemlich genau festzustellen ist, wie in grofsen Zügen der Gang der Entwickelung gewesen ist, durch welche Probleme die antreibenden Kräfte erzeugt wurden, wie richtig die Vermutungen, die man in Bezug auf Hipparchs Thätigkeit gehabt hat,

---

selbst; denn sie setzen ja die Sätze aus seinem eigenen Werk über die ebene Trigonometrie voraus. — III, 15 2—4 schreibt Menelaos ganz deutlich sich selbst zu. Von Menelaos' drittem Buch dürften also nur III, 1 (Menelaos' Satz) und möglicherweise III, 15[1] seinen Vorgängern bekannt gewesen sein.

gewesen sind, und endlich, wieviel Verdienste sich Menelaos um die sphärische Trigonometrie erworben hat.

Er ist insofern der eigentliche Urheber der sphärischen Trigonometrie geworden, als es ihm mit der Definition des sphärischen Dreiecks sogleich auch gelang, die ersten primitiven Elemente der sphärisch-trigonometrischen Dreieckslehre zu erschaffen. Wahrscheinlich hat er damit auch für die Berechnungen Erleichterungen eingeführt, die jedoch nicht die erwünschten Früchte trugen, weil die Nachfolger und in erster Linie Ptolemaios nicht die Fähigkeit hatten, seine Methoden weiter zu entwickeln. Seine sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze aber, die glücklicherweise nicht von den Ptolemaiischen Kompilationsarbeiten unterdrückt wurden, gingen in die Hände der Araber über, die die eigentlichen Erben des in der Geschichte der griechischen Geometrie ziemlich allein dastehenden Menelaos wurden.

Tafel über den Inhalt der alten Sphärik.

Theodosios' Sphärik:	Gebraucht von demselben Werk die Sätze: Buch, Satz	Wird als Voraussetzung*) **zitiert** oder gebraucht in Autolykos' περὶ κινουμένης σφαίρας: Satz, Seite	Autolykos' περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων: Buch, Satz, Seite	Euklids φαινόμενα: (ed. Gregory) Satz, Seite, Zeile
I, Defin. 1	—	1, 2	—	—
2	—	12, 44	—	—
3	—	1, 2	—	—
4	—	1, 2	—	—
5	—	1, 2	—	—
6	—	7, 22	—	—
I, Satz 1	—	1, 4—6	—	Einl. **561,32**
2	I, 1, Corollar 2	—	—	—
3	I, 1, 2	—	—	—
4	—	—	—	—
5	I, 4	—	—	—
6ᵃ	I, 1, Coroll. 2	12, 46	—	—
6ᵇ	—	—	—	—
7	—	**12, 46**	—	—
8	—	**1, 4**	—	—
9	I, Defn. 5	(1, 2)	—	—
10	I, 2, Coroll.	—	—	—
11	I, 6ᵇ	2, 8	I, 10, 86—88	6, 569, 15
12	I, 6ᵃ	(12, 44?)	—	Einl., **562,16**
13	I, 8	—	—	**2, 565, 8**
14	I, 8	—	—	—
15	I, 10, 13	**5, 16; 6, 20**	—	**2, 564, 30**
16	—	—	—	—
17	I, Def. 5, Satz 15	—	—	—
18	—	—	—	—
19	I, 18	—	—	—
20	I, 17	6, 18; 10, 36	—	—
21	I, 13, 14, 15, 20	—	—	—
22	—	—	—	—
23	—	—	—	—
II, Defin.	—	6, 16	—	—
II, Satz 1	I, 8	—	—	{Einl., 557, 19 / „ 561, 30
2	I, 10	**1, 6**	—	—
3	I, 15; II, Def.	6, 20	—	
4	II, 2, 3.	—	—	
5	I, 11; II, 4	10, 36	—	**2, 564, 21**

Theodosios' Sphärik:	Gebraucht von demselben Werk die Sätze: Buch, Satz	Wird als Voraussetzung*) **zitiert** oder gebraucht in Autolykos' περὶ κινουμένης σφαίρας: Satz, Seite	Autolykos' περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων: Buch, Satz, Seite	Euklids φαινόμενα: (ed. Gregory) Satz, Seite, Zeile
II, Satz 6	I, 20, 21; II, 2, 3, 5	—	—	—
7	II, 2, 6	—	—	—
8	II, 2, 3, 6	6, 16	—	Einl., 561, 31
9	I, 15	—	(I, 10, 86—88)	**2, 564, 5**
10	I, Def. 5, Satz 15	**2, 8**	—	—
11	—	—	—	—
12	—	—	—	—
13	{I, Def. 5, Satz 15; II, 2, 3, 5	**8, 30**	—	{4, 567, 19 / 14, 586, 12
14	I, 17	—	—	—
15	I, 17; II, 3, 12	—	I, 9, 82	**4, 567, 22**
16	II, 8, 10, 13	—	—	{8, 572—573 / Cod. Vind. / Satz 12.
17	I, 15, 21; II, 9, 12	—	—	
18	II, 17	—	—	**8, 573, 2**
19	I, 15; II, 17, 18	—	—	**6, 569, 32** **)
20	II, 10 oder 19	9, 34	—	9, 574, 1
21	I, Def. 6, Satz 15	—	—	—
22	I, 15; II, 5, 9, 12, 21	—	—	**7, 571—572**
23	I, 15; II, 5, 9, 12, 22	—	—	—
III, Satz 1	—	**7, 24**	—	—
2	—	—	—	14, 585, 41
3	I, 15	(10, 38)	—	{**Cod. Vind. / Satz 12**
4	I, 15	—	—	—
5	II, 10; III, 1, 4	—	—	—
6	{I, 6a, 15; II, 10; III, 1, 3	—	—	—
7	{I, 15; II, 13; III, 1, 4	—	—	**8, 572, 30**
8	{I, 6a, 15; II, 13; III, 2, 3, 7	—	—	{**Cod. Vind. / Satz 12**
9	III, 6	—	—	—
10	III, 6	—	—	—
11	I, 10, 15	—	—	—
12	{II, 10, 13, 15; III, 10	—	—	—
13	{II, 10 oder 13, 17, 18; III, 3	—	—	—
14	II, 13	—	—	—

*) Nur die Stellen aus Autolykos und Euklid, die notwendig sind um die Sachlage klar zu legen, sind hier mitgenommen. **) Nur der letzte Teil von Theod. II, 19 wird hier vorausgesetzt. **Anm.** Was die in dieser Tafel angeführten Stellen aus Autolykos, sowie die in Kolonne 2 aufgeführten Sätze des Theodosios betrifft, so müssen wir den Vorbehalt nehmen, daſs Neuausgaben der betreffenden Werke natürlich die Resultate ändern können; so meint z. B. Tannery (vgl. *Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, X, I, pag. 195 ff.*), daſs gröſsere Teile von Autolykos' Werken unecht sind.

Nachtrag.

1.

Über die lateinischen Menelaoshandschriften (vgl. Seite 11—12).

In Italien habe ich nachträglich Gelegenheit gehabt, die Seite 12 genannten unter den Nummern 6—9 und 13—15 aufgeführten Handschriften zu untersuchen oder wenigstens einzusehen; außerdem fand ich in der Vatikanischen Bibliothek noch eine Menelaoshandschrift, nämlich den Cod. Vatic. lat. 3380. Mit dem so gesammelten Material bin ich im Stande, eine vorläufige Klassifizierung der bis jetzt untersuchten Hss. zu unternehmen. Es ergiebt sich, daß die lateinischen Menelaoshss. sich in zwei Klassen teilen, von denen erstere (nennen wir sie A) die reine Übersetzung von Gerhard von Cremona, letztere (B) dieselbe mit einem Kommentar des 13. Jahrh. enthält, dessen Urheber der bekannte Euklidkommentator Johannes Campanus von Novara ist.

A.

Es gehören zu dieser Klasse folgende Handschriften:

1.

Cod. Parisinus lat. 9335, membr. XIV saec.

Eine Beschreibung und ein Inhaltsverzeichnis dieser berühmten Hs. gab ich in der Bibl. math. 1901, p. 63—75. In Anschluß an diese Beschreibung kann ich Folgendes mitteilen:

Fol. 134^{r} ist »Johannem Fontana« (nicht Pontana) zu lesen. Es geht dies aus dem Cod. Barberinus lat. X, 168 hervor. Diese Hs. besteht aus mehreren Heften aus dem 14. und dem Anfang des 15. Jahrh. teils von Pergament und teils von Papier. Über einem anonymen, scheinbar astronomischen Text, welcher in einem Pergamentheft dieser Hs. enthalten ist, und der im 14. Jahrh. geschrieben ist, hat eine dem Anfang des 15. angehörige Hand folgende Worte notiert: *Libellus de speculo mukesi magistri Johannis Fontana Venetiis No. VIIII.* Diese Überschrift gehört kaum zu dem Texte, über dem sie angebracht ist; vielmehr gehört sie zu einem weggefallenen Heft; denn es sind ganz deutlich mehrere Hefte aus dem Einband herausgefallen, und die Numerierung der Hefte ist ganz offenbar unkorrekt. Die Überschrift stimmt aber mit dem überein, was wir aus der Subskription im Pariser Codex schliessen dürfen, nämlich daß ein Johannes Fontana aus Venedig in der ersten Hälfte des 15. Jahrh. mit Untersuchungen über den Brennspiegel beschäftigt war. Weitere Aufschlüsse über die Person dieses Fontana, der mit dem um das Jahr 1600 lebenden nicht zu verwechseln ist, habe ich nicht finden können.

Der Anhang zum Menelaostexte fol. 54^{v}—55^{r}: *Volo ostendere, quod omnium trium linearum . . .,* welcher auch im Cod. Arsenalis 1035, fol. 104

und im Cod. Reginensis 1268, fol. 238 (vgl. unten) als Anhang zum Menelaostexte vorkommt, findet sich als selbständiger Text mit der Überschrift: *Propositiones de proportione* im Cod. S. Marco Venet. 332 (*Valentinelli* XI, 6) fol. 292ᵛ—293ᵛ, XIII saec. — Dieser Text besteht aus nichts anderem als den letzten Sätzen (Buch 4, Satz 26—28) aus Jordanus Nemorarius' *de triangulis*.

2.

Cod. Parisinus Arsenalis lat. 1035, membr. XV saec.

Was den Inhalt dieser Hs., deren Menelaostext (fol. 81ʳ—104ʳ) aus dem vorigen Codex abgeschrieben ist, betrifft, genügen die Angaben in Martins Katalog (vgl. Seite 11, Note 40).

3.

Cod. Reginensis lat. 1268, membr. XIV saec. 25,6 × 18,5 cm.

Dieser Codex besteht aus einem leeren Vorsatzblatt und 238 numerierten Folien. Die Schriftfläche (keine Kolumnen) sowie die Zeilenzahl (35—50) variiert. Die Schrift, von mehreren Händen derselben Zeit, weist auf das zweite Drittel des 14. Jahrh. hin. Datierung, Subskriptionen oder Inhaltsverzeichnis sind nicht aufzufinden. Textkorrekturen von der ersten oder von einer zweiten gleichzeitigen Hand kommen öfters vor. Randnoten von einer dem Schluſs des 14. oder Anfang des 15. Jahrh. angehörigen Hand finden sich namentlich im Anaritiustexte.[1] Initialen, die nur im letzten Drittel der Hs. ausgeführt sind, sowie die mathematischen Figuren (teilweise mit roter und blauer Tinte) sind mittelmäſsiger Arbeit.

Eine Untersuchung der Quaternionen zeigt, daſs der Codex aus 5 ursprünglich von einander getrennten Teilen bestand.[2] Der Inhalt ist folgender:

Erster Teil, fol. 1—71, besteht aus 9 Quaternionen aus je 4 Lagen. In der letzten Quaternion ist das letzte Blatt, welches wahrscheinlich unbeschrieben war, weggeschnitten.

1. Euklids *Elemente* I—XV (fol. 1ʳ—69ʳ).

Überschrift: fehlt.[3]

Anfang: *Punctus est cui non est pars. — Linea est longitudo sine latitudine* . . .

Schluſs (Buch XV, Satz 6): . . . *constabit quia equidistat substrato, qui totus est in una superficie. Idem intelligatur de aliis.*

Anhang: Euklidscholien[4] (fol. 69ʳ—71ʳ): *Communis et consuetus rerum cursus utriusque ordinis naturalis raro* . . . *ordinato numero per*

1) Überschriften von einer viel späteren Zeit, die an mehreren Stellen vorkommen, erwähne ich nur, wenn sie von wirklichem Wert sind.

2) Es ist notwendig, diese 5 Teile, die scheinbar in einander übergehen, auseinander zu halten, wenn man mit Hilfe dieser Hs. die Überlieferungsgeschichte von Euklids *Elementen* untersuchen will.

3) Man bemerke jedoch die Schluſsworte des 9. Buches: *perfectus est liber arismetice Euclidis. Explicuit VIIII*ᵘˢ. — Diese Übersetzung stimmt zunächst mit der von Atelhart von Bath in den Codd. Ampl. Q. 23 und 352 überein; sie liegt jedoch der Campanischen Rezension näher als die in den Erfurter Hss.; die Beweise bestehen lediglich in kurzen Résumés.

4) Diese Scholien haben keine Figuren; sie gehören zu den arithmetischen Büchern.

differentias suas a prima inchoabimus, que est mutatum in qua si fuerit numerus inpar quantum (?) *totus est inpar.*

Fol. 71ᵛ ist leer.

Zweiter Teil, fol. 72—91, besteht aus 3 Quaternionen, von denen die zwei ersten 4, die letzte nur 2 Lagen enthält.

2. Euklids *Elemente V—VI mit Kommentar*[1]) (fol. 72ʳ—91ᵛ).

Überschrift (der Seite 72ʳ): *Incipit quintus liber.*

Anfang (Einleitung des Kommentators): *Executus Euclidis in superiribus libris quasdam linearum et angularium circulariumque figurarum naturas; de angulis etiam pleraque interserens ad eorundem proprietates pertractandas paulatim ascendendo competenter accedit . . .*

fol. 81ᵛ: Überschrift (der Seite): *Incipit sextus liber.*

Text: *Mensurarum alie sunt in actu alie sine intellectu; mensurarum vero, que sunt in actu, tria genera sunt, scilicet altimetria, planimetria et cosmimetria; cuius generis sunt ille, quibus agrimensores et architecti utuntur . . .*

Schlufs: . . . *etiam angulus ā ad angulum d̄ accedit. Manifestum est ergo, quoniam* (sic!) *in circulis equalibus qua proportione arcus iungantur, eadem omnes eorum angulos referri. Quod presens signat descriptio.*

Dritter Teil, fol. 92—143, besteht aus 7 Quaternionen, von denen die 6 ersten 4, die letzte nur 2 Lagen enthält.

3. Euklids *Elemente* X—XV (fol. 92ʳ—142ᵛ).[2])

---

1) Dieser Euklidtext und der dazu gehörige Kommentar sind meines Wissens weder ediert noch genau untersucht. Jedes der zwei Bücher (V und VI) wird mit einem Kommentar eingeleitet, welcher bezw. die Seiten fol. 72ʳ—76ʳ und fol. 81ᵛ—82ʳ einnimmt. Nach dieser Einleitung folgen Übersetzungen von den *Elementen* mit am Rande aufgezählten Sätzen, im 5. Buch 25 (wie allgemein), im 6. Buch 33, wie in dem griechischen Text, gegen 32 bei Atelhart und Campanus. Zitiert werden in den Einleitungen Alfarabius, Aristoteles, Peripatheticus (sic!). Dafs die Einleitungen in letzter Instanz aus einer griechischen Quelle herrühren, beweist z. B. folgender Passus, den ich als charakteristisch herausgegriffen habe: *Magnum itaque huius in diffinitionis notitia fructum pollicetur; tamen predictarum in medio ponit primordia mensurarum. In ea siquidem tondit Euclides intellectualium, actualium, logicarum, alogarum, dimensionum species, quam plures, quales sunt apodictice omnes nec non ergastice. Inueniuntur enim in hoc sexto libro septem ergasticarum genera figurarum, que sunt sisticum, idmeniaticum* (?), *anagrafum, engrafum, perigrafum, perebolum, proseureticum, quorum omnium locis propriis, quemadmodum ab Euclide disposita sunt, ethymologiam descriptionemque annotabimus.*

2) Es liegt hier nicht ein Kommentar vor, was man nach der von einer ganz jungen Hand hinzugefügten Überschrift annehmen müfste. Wir haben vielmehr mit einer Übersetzung zu thun, die weder mit der von Campanus kommentierten, noch mit der voranstehenden (von Atelhart?) übereinstimmt. Die Propositionen weichen in dem Wortlaut mitunter von den zwei anderen Übersetzungen nicht wenig ab; die Beweise haben nicht die Form eines Résumés, fallen aber keineswegs mit denen in der von Campanus edierten Übersetzung zusammen. Die Satzanzahl der Bücher X—XIV ist bezw. 105 (+ 2 Extrasätze), 41, 15, 18, 10. Buch XV hat nur 5 aufgezählte Sätze. Da die Verdrehung Assicolaus (statt Hypsikles) bezeugt, dafs diese Übersetzung vom Arabischen herrührt, so haben wir in der That hier zwei von einander und von der Campanischen abweichende Rezensionen, die beide vom Arabischen herkommen. Ich vermute deswegen, dafs eine genaue Untersuchung des Cod. Reginensis 1268 über die noch offene Frage von Atelharts und Gerhard v. Cremonas Euklidübersetzungen Licht verbreiten würde. Terminologie und Sprache der gegenwärtigen Übersetzung der Bücher X—XV erinnern vielfach an Gerhard v. Cremona.

Anfang: *Qvantitates, siue sunt linee siue superficies siue corpora, quibus fuerit una quantitas communis eas numerans omnes, dicentur communicantes . . .*

fol. 112v (Schlufs des X. Buches): *. . . sub alterius termino possibile est incidere. Eadem quoque ratio, cum multe sunt inrationales linee, per infinita licet, ad eundem finem perducit.*

fol. 113r (Anfang des XI. Buches): *Corpus est, quod longitudinem et latitudinem habet et altitudinem habet, cuius termini superficies . . .*

fol. 121v: *. . . ergo duo serratilia* $\overline{abgdez}$ *et* $\overline{htklmn}$ *sunt equalia, verum illud e. q. d. v. Libri elementorum Euclidis pars XI explicit.*

fol. 122r: *Incipit pars eiusdem duodecima. Omnium duarum superficierum poligoniarium similium in duobus circulis existentium unius ad alteram proportio est sicut . . .*

fol. 128v: *. . . est proportio* $\overline{bd}$ *ad* $\overline{zt}$ *triplicata, verum illud e. q. d. v. Expleta est XII libri Euclidis.*

Incipit pars eiusdem tercia decima. Sic linea diuidatur secundum proportionem habentem medium et extrema et maiori eius sectioni in longitudine addatur . . .

fol. 135r: *. . . quod latus habentis XX bases est longius latere habentis duodecim bases, quod illud e. q. d. v. Pars tertia decima libri Euclidis expleta est.*

Pars quartadecima, quam edidit Assicolaus, que convenit libro Evclidis. Cum Thesilides[1]) *Sirus perrexisset Alexandriam, inuenit ibi patrem meum, aput quem per maiorem partem temporis, quo ibi moratus est, mansit . . .*

fol. 141r: *. . . linea igitur* $\overline{ag}$ *est latus decagoni eiusdem circuli, verum et hoc est q. d. v.*

Incipit pars quinta X ab Assicolao edita libro Evclidis utilis. Intra datum cubum corpus quatuor bases triangulas equales et equilateras habens signare . . .

fol. 142v (Schlufs:) *. . . erit habens XII bases pentagonales equilateras equalium angulorum, quod illud est q. d. v. Expletus est liber Evclidis simul cum duabus partibus ab Assicolao editis, cuius partes sunt quindecim.*

Anhang: Euklidscholien (fol. 142v—143v).

a) *In capitulis, que transtulit Isaac, hoc quod consequitur inuenitur post figuram uicesimam primam libri Euclidis, in qua ponuntur latera quinque figurarum et proportiones earum; reperi hec: Dico, quod non est figura corporea continens superficies equilateras et ortogonas ad inuicem preter eas, quas nominaui. Probatio eius . . .* (1 Seite)

b) *Quidam, qui uocabatur Iohannes, hoc quod sequitur, inuenit: Dico, quod non contingit, ut spera figura corporea continens superficies equalium angulorum et laterum describatur praeter has quinque . . .* (21 Zeilen)

c) *In fine cuiusdam libri fuit repertum hoc, scilicet quod he quinque corporea quatuor elementis referuntur equalibus . . .* (6 Zeilen)

d) *Quod in tercia X figura XII partis probetur, quod* $\overline{zt}$ *sit equi-*

1) Man vergleiche diese Vorrede des Hypsikles mit dem Urtext, Euclidis *Elementa*, ed. Heiberg V, 4 ff. — Diese Vorrede fehlt sonst immer in den vom Arabischen geflossenen Euklidübersetzungen.

distans ek̄, aliter quam ibi continetur hic demonstratur, hoc modo scilicet: Quoniam . . . (18 Zeilen)

e) *Continet totus iste liber CCCLXV proposita et propositiones et XI corrollaria preter auxiomata singulis libris premissa, proposita autem inf* * * (?), *propositiones uero indicantis explicans* (sic!).

f) *A dato puncto in quolibet laterum assignati trigoni lineam in oppositum latus ducere, que assignatum trigonum in duo equalia seccet. Verbi gratia. Esto . . .* (1/2 Seite)

Vierter Teil, fol. 144—211, besteht aus 9 Quaternionen aus je 4 Lagen. Die 4 hinteren Blätter der letzten Quaternion sind nach der Einbindung weggeschnitten worden.

4. Al-Narizis *Kommentar zu* Euklids *Elementen I—X* (fol. 144ʳ —207ᵛ).

Überschrift: fehlt.[1])

Anfang: *Dixit Euclides: Punctum est quod partem non habet. Supra hoc Sambelichius . . .*

Schlufs: . . . *sed ipse est equalis numeris istis, ergo ipse est perfectus et illud.*

5. Scholien zu Werken, die der Sphärik und Trigonometrie angehören (fol. 207ᵛ—211ᵛ):

a) Scholien zu Theodosios' *Sphärik.*

Anfang: *Hee probationes sunt necessarie in theoremate vndecimo secundi libri Theodosii de speris . . .*

b) Scholien, die durch folgende Worte charakterisiert werden (fol. 208ᵛ)[2]): *iste probationes sunt necessarie in ultimo theoremate libri 30 figurarum . . .*

c) Scholien zu Gebers *Astronomie* (?) (210ʳ,5—211ᵛ,4).

Anfang: *Nota in figura tercia decima primi libri Geber . . .*

d) Scholion zu einem Werke über die *figura sectoris* (211ᵛ,5—21)[3]).

Anfang: *Illud autem punctum orbis signorum, apud quod est maior diuersitas, inuenitur sic . . .*

Schlufs: . . . *hec probatio est necessaria in figura sectoris.*

---

1) Überschrift mit Al-Narizis Namen findet sich nur über Buch 3: *Expositio secundum Anarissi prologi tertie partis Euclidis.* — Die Anordnung der Textteile ist eine andere als in dem von Curtze zu seiner Ausgabe (Leipzig 1899) benutzten Cod. Cracov. 569. Im Cod. Regin. 1268 kommt nämlich zuerst Curtze, p. 1—199, dann p. 204, 15—207, 20, ferner p. 211—386 (statt 386, 16 hat Cod. Reg. 1268 die Worte: *Expletus est liber*); zuletzt folgen endlich die p. 200 —204, 14 und p. 207, 21—210 entsprechenden Textteile. Die Stelle, wo der wahrscheinlich unechte Teil des Textes (siehe Curtzes Ausgabe p. 252 und Bibl. math. 1901, p. 365 und 1902, p. 71—72) anfängt, ist im Cod. Regin. 1268 nicht besonders hervorgehoben.

2) Die unter b—d aufgeführten Scholien beziehen sich alle auf das, was wir die *Trigonometrie des Gegebenen* nennen möchten, d. h. auf solche trigonometrische Bestimmungen, wo nur die Möglichkeit einer Berechnung angegeben wird. Diese Art und Weise, unsere Formeln da zu ersetzen, wo eine Ausrechnung nicht erheischt war, die schon im Menelaos angewandt wurde (vgl. Seite 83, 119—120 und 125), hat auch in späteren Zeiten eine grofse Rolle gespielt und läfst sich bis auf Johs. Werner nachweisen.

3) Dieses Scholion bezieht sich auf das in Menelaos III, 15² erörterte Problem (vgl. Seite 119).

Fünfter Teil, fol. 212—238, besteht aus 3 Quaternionen aus je 8 und 1 aus 3 Lagen. Die 3 hinteren, wahrscheinlich leeren Blätter der letzten Quaternion sind nach der Einbindung weggeschnitten worden.

6. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 212^r—238^r).

Überschrift (der Seite): *Liber Myleii de spericis figuris primus* (später hinzugefügt mit grauer Tinte von einer noch sehr alten Hand).

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam* . . .

Schlufs: . . . *et equidistat arcui* · $\overline{bg}$ · *et illud e. q. d. v.*

Anhang (fol. 238^r—^{v}): *Volo ostendere, quod omnium trium linearum* ... (d. h. Jordanus Nemorarius' *de triangulis* Buch 4 Satz 26—28; vgl. oben).

4.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. 329, chartac. XV saec. (in Valentinellis Katalog: XI, 5).

Was die Beschreibung dieser teilweise vom Kardinal Bessarion geschriebenen Hs. betrifft, verweise ich auf Valentinellis Katalog.

Der Inhalt ist folgender:

fol. A^r (Vorsatzblatt aus Pergament): leer.

fol. A^v: „*Epitoma Almagesti optima*" (sowohl in lat. als griech. Buchstaben). — „*Cardinalis Tusculanus*" (in lat. Buchstaben). — „*Kardinal Bessarion*" (in griech. Buchstaben).

fol. 1^r: $^1/_4$ Seite griechische Notizen.

fol. 1^v—10^v: leer.

fol. 11^r—12^v: Griechisch-lat. Lexikon über math. Fachwörter.

fol. 13^r—34^r: Übersetzung der Propositionen der Euklidischen *Elemente* (nach Valentinelli Authograf von Bessarion).

fol. 34^v—38^v: leer.

fol. 39^r—213^r: Georg v. Peurbachs und Regiomontanus' *Epitome Almagesti I—XIII* (die 6 ersten Sätze fehlen).

fol. 213^v—218^v: leer.

fol. 219^r—282^v: Menelaos' *Sphärik I—III.*

fol. 282^v—283^r: Scholion zu Menelaos' *Sphärik* mit der Überschrift „*Extra*". Anfang: *Omnis trianguli arcubus circulorum magnorum* ...

fol. 283^v—291^v: leer.

fol. 292^r—296^r: Die Kapitelüberschriften aus Ptolemaios' *Syntaxis,* sowohl in der Ursprache als in lateinischer Übersetzung.

fol. 296^v—299^v: leer.

fol. 300^r—331^v: Los hingeworfene Notizen und Berechnungen (auf griechisch), die an Ptolemaios' *Syntaxis* und Theons *Kommentar* anknüpfen.

Von besonderem Interesse sind die Randnoten des Kardinals Bessarion. Wo im Texte „Abrachis" steht, ist am Rande „Ipparchus" hinzugefügt (z. B. fol. 64^r, 74^r, 75^v u. s. w.). In derselben Weise wird „Taion" in „*Θεων*" korrigiert. Uns interessiert in erster Reihe die Korrektur „*Μενελαος ὁ γεωμετρης*", die fol. 132^r—133^r viermal vorkommt, wo der Text „Mileus" hat. In Übereinstimmung hiermit treffen wir auch in dieser Hs. in den Überschriften des Menelaostextes immer den Namen „Mene-

laos" statt der von Gerhard v. Cremona eingeführten Verdrehung „Mileus" und ihrer Varianten. Bessarions Noten bezeugen seine genaue Bekanntschaft mit Ptolemaios' und Theons griechischen Texten.

5.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. 328, membr. XV saec. (in Valentinellis Katalog: XI, 63).

Was die Beschreibung dieser prachtvollen Hs. betrifft, verweise ich wieder auf Valentinelli.

Der Inhalt ist folgender:

1. Georg v. Peurbachs und Regiomontanus' *Epitome Almagesti I—XIII* (fol. 1—117).

Überschrift[1]): *Magistri Iohannis de Kunigsperg prohemium in epitomam almagesti siue magne constructionis Ptolemaei, factam partim per eum, partim per magistrum Georgium de Peurbach et dedicatam L. Reuerendissimo domino cardinali Nicaeno* (d. h. Bessarion).

2. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 120—157ʳ).

Überschrift: *Menelaus de sphaericis.*

Unterschrift: *Finit Menelaus de spheralibus figuris.*

Anhang (fol. 157ʳ—ᵛ): Scholion zu Menelaos' *Sphärik* mit der Überschrift *„Extra"*[2]): *Omnis trianguli arcubus circulorum magnorum . . .*

Zu bemerken ist noch die Subskription auf dem Vorsatzblatt: *Epitoma per magistrum Georgium de Peurbach et eius discipulum magistrum Johannem de Kunigsperg et Menelai de sphericis liber b. Cardinalis Tusculani* und gleich danach dieselbe Subskription auf griechisch.

6.

Cod. Vaticanus lat. 3380, chartac. XVI saec. 28,7 × 21 cm.

Dieser von mehreren Händen geschriebene Sammelband hat bald Kolumnen, bald keine, eine sehr variierende Schriftfläche und Zeilenzahl. Im ganzen enthält der Codex zwei Vorsatzblätter und 322 numerierte Textfolien.

Das erste Vorsatzblatt führt die Inskription: *Libro di mathematica, scritto di mano di Pomponio Ceçio Cardinale.*[3]) Der Inhalt ist folgender:

1. Theodosios' *Sphärik I—III* (defekt) (fol. 1ʳ—24ʳ).

Überschrift: *Theodosius de speris.*

Anfang: *Spera est figura Corporea una quidem superficie contenta, intra quam unum punctorum . . . .* Im Schlufs ist der Text nicht fertig geschrieben, indem nur die Propositionen abgeschrieben sind, und Platz für die Beweise offen gelassen.[4])

---

1) Da der Text offenbar von einem professionellen Schönschreiber geschrieben ist, diese Überschrift aber von einer anderen Hand, so vermute ich, dafs diese Überschrift eine Dedikation an Bessarion von Regiomontanus ist.

2) Dieses Scholion ist mit dem im vorigen Codex (fol. 282ᵛ—283ʳ) identisch.

3) Pomponio Cesio oder Cecio wurde im Jahre 1542 Kardinal, war als Papst designiert, starb aber in demselben Jahre. Er war sehr gelehrt und beschäftigte sich mit Philosophie und Mathematik.

4) Der Theodosiostext fängt hier mit dem von der kürzeren Theodosiosrezension bekannten Wortlaut an (vgl. Bibl. math. 1902, p. 67); später aber, wenigstens von Satz 9 des ersten Buches an, stimmt der gegenwärtige Text ganz mit dem der längeren Theodosiosrezension und enthält auch Campanus' Kommentar.

fol. 24ᵛ—26ᵛ sind leer.

fol. 27ʳ enthält, ein Fragment von 15 Zeilen.

fol. 27ᵛ—70ᵛ sind leer.

2. Levi ben Gersons *Astronomie*[1]) *I—III* (fol. 71ʳ—230ʳ).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Hec ait Leo de balneolis habitator amayte* (?)[2]): *Premissis his, que ad intentionem nostram necessaria uidebantur, et quorum scientia omitti non potuit* . . .

Schlufs: . . . *in ea est linea* $\overline{bf}$ $8^0\, 16'\, 19''$, *et hoc est, quod voluimus declarare.*

fol. 231ʳ—280ᵛ sind leer.

3. Menelaos' *Sphärik I—III*[3]) (fol. 281ʳ—315ᵛ).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam* . . .

Schlufs: . . . *et equidistat arcui* $\overline{gb}$ *et illud est q. d. v.*

4. Campanus, *de proportione et proportionalitate* (Überschrift) fol. 315ᵛ —319ᵛ.

Anfang: *Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis unius ad alteram* . . .

Schlufs: . . . *erit ista data secundam magnitudinem quare et reliqua illi equalis.*[4])

fol. 320ʳ—322ᵛ sind leer.

7.

Cod. S. Marco Florent. 184 (Bibliotheca Laurenziana) membr. XV saec. 28,5 × 20,3 cm.

Diese Hs. habe ich vorläufig nur oberflächlich einsehen können. Der Menelaostext (ohne Figuren), und zwar der reine Gerhardsche Text steht daselbst fol. 47ʳ—79ᵛ. Der Text ist aber defekt, da 6 Blätter schon vor der Paginierung weggeschnitten sind, und zwar 2 zwischen fol. 57 und 58, 1 zwischen 63 und 64, 1 zwischen 66 und 67, 1 zwischen 76 und 77 und 1 zwischen 79 und 80. Auch in anderen Beziehungen ist diese Hs. als minderwertig zu bezeichnen.

8.

Cod. S. Marco Florent. 213 (Biblioteca nazionale), mit der neuen Signatur „*Conventi soppresi* J, V, 30", membr. XIV (?) saec. 29,5 × 23,3 cm.

Die Sätze sind nicht am Rande aufgezählt, und meine Aufzählung halte ich nicht für sicher, aufser was das erste Buch betrifft, welches 32 Sätze hat.

1) Dieses Werk ist in drei Bücher mit bezw. 136, 9 und 14 Kapiteln geteilt. Aus einer Randnote (fol. 168ᵛ) geht hervor, dafs das Werk vor dem Jahre 1336 beendet war. Das Werk findet sich auch im Cod. Vatic. 3098, chartac. XV saec. fol. 1ʳ—108ʳ.

2) Cod. Vat. 3098 hat *aisrayce;* Levi ben Gerson wohnte in Avignon.

3) In den geschriebenen Katalogen der Vaticanischen Bibliothek wird der Menelaostext dieser Hs., der durch keine Überschrift kenntlich ist, dem Levi ben Gerson beigelegt.

4) Ich kann nicht dafür einstehen, dafs Campanus' Text nicht schon früher (fol. 317ᵛ Mitte) schliefst und zwar an der Stelle: . . . *de propositis quoque sufficit, quod dicimus. Ex omnibus istis elicitur una notabilis propositio* . . . An der entsprechenden Stelle schliefst Campanus' Text wenigstens in der folgenden Hs.

Auch diese Hs. habe ich nur oberflächlich untersucht. Der Menelaostext, und zwar die reine Gerhardsche Übersetzung steht fol. 45^r—52^v, die drei Bücher bezw. mit den Überschriften: *Incipit liber primus Millei Romani de figuris spericis. — Incipit liber secundus Millei de speris. — Incipit liber tertius Millei Romani de figuris spericis.*

B.

Diese Klasse, die den von Campanus kommentierten Menelaostext enthält, fällt in zwei Abteilungen (nennen wir sie I und II); in I steht der Kommentar noch am Rande, in II ist er in den ursprünglichen, von Gerhard von Cremona gegebenen Text eingefügt, so daſs der Urtext in den meisten Fällen äuſserlich vom Kommentar nicht zu unterscheiden ist. Es gehören zu Abteilung

I.

9.

Cod. Palatinus lat. 1351, membr. XIV saec. (ca. 1300—1325), 23,3 × 16,7 cm.

Dieser Codex besteht aus 287 numerierten Textfolien und 1 unnumerierten (zwischen fol. 133 und 134). In der ersten Quaternion (fol. 1—8) fehlen zwei der äuſseren Lagen, so daſs die Handschrift im Anfang defekt ist und nach fol. 8 eine Lücke von zwei Folien aufweist. Der ganze Text ist mit einer Hand (sehr deutlich) geschrieben, die Schriftfläche 13,5 × 8,5 cm, die Zeilenzahl bis auf fol. 233 ist 33, darnach 27; keine Kolumnen; im Rande der Folien 234^r—287^v (Menelaos' *Sphärik*) findet sich ein Kommentar, welcher mit derselben Hand wie der Text geschrieben ist. Dagegen sind einzelne Notizen, sowie mehrere Textüberschriften von Händen hinzugefügt, die dem 16. Jahrh. gehören. Die am meisten vorkommende ist jünger als 1558; denn fol. 201^v als Note zu Theodosios' *Sphärik* I, 21 schreibt sie: *Haec est 23 Maurolicj,* und Maurolycus' Theodosiosausgabe sowie seine eigene *Sphärik* erschien im Jahre 1558 (vgl. Seite 19).

Der Inhalt ist folgender:

1. Euklids *Elemente I—XV*[1]) (fol. 1^r—195^v), defekt. Der Text fängt mit dem Schluſs des Beweises I, 3 an: *exeunt a centro eiusdem circuli ad circumferentiam . . .* (Es fehlen die Sätze I, 39—44, der Schluſs von I, 38 und der Anfang von I, 45.)

Schluſs: . . . *quare assignato corpori constat nos speram, quemadmodum propositum erat, inscripsisse.*

2. Theodosios' *Sphärik* I—III[2]) (fol. 196^r—233^r).

---

1) Dieser Euklidtext ist der von Campanus' Ausgabe her bekannte. Campanus' Kommentar ist in den Text eingefügt.

2) Dieser Theodosiotext hat, wie der in den folgenden Hss. (Nr. 11 und 13), 3 Bücher mit bezw. 32, 31 und 10 Sätzen, fällt hauptsächlich mit dem in Venedig 1518 gedruckten mit bezw. 33, 31 und 15 Sätzen zusammen, ist dagegen nicht mit dem in den Codd. Paris. 9335, S. Marco Venet. 332 und S. Marco Flor. 206 (Conventi soppressi J, I, 32) befindlichen mit bezw. 22, 22 und 13 Sätzen zu verwechseln. Der gegenwärtige Text enthält Campanus' Kommentar eingefügt.

Anfang: *Spera est figura solida una tantum superficie contenta . . .*

Schlufs: . . . *sicut processimus in demonstratione antepremisse quartam.*

3. Menelaos' *Sphärik* I—III [1]) (fol. 234r—287v).

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: . . . *et equedistat arcui .bg. et illud est, quod declarare uoluimus. Expletus est tractatus tertius libri Milej de spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

10.

Cod. Vindobonensis lat. 5277, chartac. ca. 1525 (vgl. den Handschriftenkatalog).

Diese vielbenutzte Hs. enthält den Menelaostext, einen Teil (fol. 171r—185r) in Abschrift von Johs. Vögelin, den Rest (fol. 361r—378v) in Abschrift von einer mir unbekannten Hand, aber von Vögelin korrigiert. Dieser letzte Teil ist eine Abschrift nach der vorigen Hs (Cod. Palat. 1351). Campanus' Kommentar hat Vögelin teils am Rande, teils hinten (fol. 381v—385v) hinzugefügt.

II.

In folgenden 3 Hss. ist Campanus' Kommentar in den Menelaostext eingefügt:

11.

Cod. Reginensis lat. 1261, membr. XIV saec. (ca. 1350—1375), 24,9 × 17,5 cm.

Dieser Codex besteht aus einem Vorsatzblatt mit altem Inhaltsverzeichnis und 296 numerierten Textfolien; zuletzt findet sich ein leeres Blatt. Die 24 Quaternionen bestehen aus je 6 Lagen. Die letzte Quaternion ist nur teilweise beschrieben gewesen, deswegen ist auch ihr 9. Blatt leer, und die drei letzten Blätter (10—12) in den Einband aufgenommen. Der Codex ist also vollständig. Der ganze Text ist von einer Hand geschrieben; Randnoten von einer zweiten gleichzeitigen kommen sehr häufig vor. Die Schrift ist sehr deutlich, die Schriftfläche 17,2 × 10 cm, die Zeilenzahl 40, keine Kolumnen. Die Erhaltung ist ausgezeichnet. Treffliche mathematische Figuren und rot-blaue Initialen zieren den ganzen wertvollen Codex. Der Inhalt ist folgender:

1. Gebers sog. *Almagestum minor I—VI* [2]) (fol. 1r—49r).

Astronomische Auslegungen mehrerer der Sätze im 3. Buch hat die erste Hand am Rande hinzugefügt. Die Überschriften der 3 Bücher (bezw. „*Theodosius*", „*Theodosij sphaericorum liber 2̄*" und „*THEODOSII SPERICORUM liber III*") sind von 3 verschiedenen Händen des 16. Jahrh. hinzugefügt.

1) Die Überschriften der drei Bücher: „*Menelaus de sphaericis ex Arabica translatione latinè uersus, et scholijs utilibus auctus*" und „*Liber primus Milei de Spericis*" über Buch 1, „*Secundus liber incipit*" über Buch 2 und „*Tertius liber*" über Buch 3 sind von verschiedenen jüngeren Händen geschrieben.

2) Die 6 Bücher haben bezw. 17, 36, 25, 19, 28 und 25 aufgezählte Sätze. Von den Überschriften ist nur die über Buch 4 bemerkenswert. Sie heifst: *Explicit liber tercius, concinens universam de motu solis doctrinam. Incipit liber 4us de motu lune.*

Überschrift: *Incipit liber primus almagesti minoris.*

Anfang: *Omnium recte philosophancium non solum uerisimilibus et credibilibus argumentis, sed et firmissimis rationibus deprehensum est, formam celi spericam esse motumque ipsius orbicularem . . .*

Schluſs: . . . *quod non est circulus transiens super duo loca solis et lune. Nam uisus locus lune, tunc ipse locus solis et inclinationes quidem tenebrarum sic se habent.*

Anhang (fol. 49ᵛ): 2 groſse Figuren zu den Planetenbewegungen und dazu ein kleiner Text: *Nota: · p · est centrum terre, · o · centrum ecentrici deferentis . . . a primo argumento ad hoc quod diximus.*

2. Jordanus Nemorarius' *de ponderibus*[1]) (fol. 50ʳ—55ᵛ).

Überschrift: *Incipit pars prima libri Jordani de nemore de ratione ponderum.*

Anfang: *Omnis ponderosi motum esse ad medium, uircutemque ipsius esse potenciam ad inferiora . . .*

Schluſs: . . . *et ideo plus impelletur · a ·, quia motum plus impedit, totoque conatu impulsum habebit trahere · b ·. Explicit pars 4ª, et cum ea finitur liber Jordanis* (sic!) *de ratione ponderis.*

Anhänge (fol. 55ᵛ—58ʳ):

1. *Si fuerit aliquod corpus ex duobus mixtum corporibus notis, et uelimus scire, quantum in eo sit de utroque ipsorum . . .* (7 Zeilen)

2. *Si fuerit canonium simmetrum magnitudine et substantie eiusdem . . .* (24 Zeilen)

---

1) Das Buch mit dem Titel *de ponderibus, de ratione ponderum, de ponderosa et leui* oder *de ponderositate* liegt in mehreren Versionen vor (5 sind mir bis jetzt begegnet) und geht teils unter Euklids, teils unter Jordanus' Namen. Ich unterscheide:

1. einen Text mit 13 Sätzen, die mit langen Beweisen versehen sind (Cod. Vatic. 2975, fol. 164ʳ—171ʳ).
2. einen Text mit denselben 13 Sätzen, wo jeder derselben nur mit einem kurzen *Comentum* (Erklärung) versehen ist (Cod. Palat. 1377, fol. 19ʳ—20ᵛ).
3. einen Text mit 47 Sätzen, von denen die ersten 13 ganz mit denen in Text 1 übereinstimmen (Cod. Vatic. 3102, fol. 29ʳ—35ʳ);
4. einen Text mit 45 oder (durch Vereinigung der 3 letzten) 43 Sätzen, entweder wie hier im Cod. Regin. 1261 in 4 *partes* mit bezw. 10, 12, 6 und 17 Sätzen geteilt, oder ein Buch mit fortlaufenden Satznummern ausmachend wie in dem Drucke: *Jordani opusculum de ponderibus Nicolai Tartaleae studio correctum* ... Venetiis apud Troianum Curtium 1565. Die 5 ersten Sätze dieser Version fallen mit den 5 ersten der vorigen zusammen, 6—7 mit 8—9 der vorigen, 8—43 entsprechen wesentlich 14—47 der vorigen, und den Sätzen 10—13 der vorigen entsprechen die Anhänge 2—5 im Cod. Regin. 1261.
5. einen Text mit 9 Sätzen, den ich in den Codd. S. Marco Flor. 206 und 213 (Conventi soppressi J, I, 32 und J, V, 30) traf. Diese 9 Sätze fallen mit den 9 ersten der ersten Version zusammen. Einen Text, wieder mit 9 Propositionen, den ich im Cod. S. Marco Venet. 332 (Valentinelli XI, 6), XIII saec. fol. 257ʳ—259ʳ angetroffen habe, und der in den Schluſsworten von dem ebengenannten Text abweicht, habe ich mit den übrigen 4 Versionen nicht vergleichen können. Doch vermute ich, daſs auch die 9 Sätze dieses Textes mit den 9 ersten in den obengenannten Texten 1—3 identisch sind; im Venetianer Codex fol. 259ʳ—260ᵛ folgt nämlich ein *liber de canonio* mit 4 Sätzen, die mit den Sätzen 10—13 der obigen Texte 1—3, d. h. mit den Anhängen 2—5 des Textes 4 der gegenwärtigen Hs. zusammenfallen.

3. *Si fuerit proportio ponderis in termino minoris portionis* . . . (13 Zeilen)

4. *Estque ex hoc manifestum, quoniam* (sic!) *si fuerit canonium simmetrum* . . . (1 Seite)

5. *Si fuerit canonium datum longitudine, spissitudine et grauitate* . . . (1 Seite)

6. *Omne pondus cum quotlibet ponderibus ab eo continue sumptis* . . . (7 Zeilen)

7. *Si trianguli tria latera coaceruentur medietatisque compositi ad singula latera differentie*[1]) . . . (Beweis:) *Regula hec in arabico conscripta dicitur* . . . · *klm* · *ducatur in* · *z* ·, *radix producti erit area trianguli. Explicit.*

3. Anonym, *de natura cometarum* (fol. 58ʳ—59ʳ).

Anfang: *Occasione comete, que nuper apparuit, applicui animum ad cogitandum de natura cometarum, et quod mihi indaganti de eis innotuit ad communem utilitatem in lucem proferre curaui* . . .

Schluſs: . . . *et ex similitudine affectionis, quam imprimit in mentibus uidencium, potest connici qualitas rei future, cuius est signum. Explicit.*

4. Anonym, Nativitätsberechnung[2]) (fol. 59ʳ—60ᵛ).

Anfang: *In nomine patris et filii et spiriti sancti uolo supponere, quod natiuitas mea fuerit sub ascendente uirginis post mediam noctem, que sequitur diem sancti dyonisii, et quod dies crastina fuerit dies mercurii. Ex hoc arguo natiuitatem fuisse annis domini* · *1200* · *mensibus a martio* · *7* · *et diebus* · *9* · *perfectis* . . .

Schluſs: . . . *et eodem anno perfecti erunt anni alquoquodeu* (sic!) *cum augmento fere.*

5. Euklids *Elemente I—XV*[3]) (fol. 61ʳ—197ᵛ).

Überschrift der Seite: · *1* · *liber geometrie* (so auch in den folgenden).

Anfang: *Punctus est, cui pars non est. — Linea est longitudo sine latitudine.* — . . .

Schluſs: . . . *quare assignato corpori constat nos speram, quemadmodum propositum erat, inscripsisse. Explicit.*

6. Theodosios' *Sphärik I—III* (fol. 197ᵛ—222ᵛ).

Überschrift der Seiten im 1. Buch: · *1* · *liber Theodosii de speris, et dicitur* · *16* · *geometrie,* im 2. Buch: · *2* · *Theodosii de speris, qui dicitur* · *17* · *geometrie,* im 3. Buch: · *3* · *Theodosii de speris, qui dicitur* · *18* · *geometrie.*

Anfang: *Spera est figura solida, una tantum superficie contenta* . . .

Schluſs: . . . *sicut processimus in demonstratione antepremisse per quartam. Explicit Theodosius.*

7. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 223ʳ—257ᵛ).

Überschrift der Seite: · *1* · *liber Milei de figuris spericis* (so auch in den folgenden).

---

1) Am Rande steht: *hec est pars phyloteigni et debet ei subiungi.*

2) Dieser Text ist am Rande von der zweiten Hand stark kommentiert. Aus dem Inhalt des Textes und den vielen Hinweisungen auf bekannte Werke, die die Randnoten enthalten, wäre vielleicht eine genaue Zeitbestimmung dieser Hs. zu gewinnen.

3) Der Text ist der von Campanus kommentierte. Der Kommentar ist in den Text eingefügt, wird aber oft durch die Worte: „*addiciones*“ oder „*intraposita*“ hervorgehoben. Dasselbe gilt auch Text 6 und 7; vgl. Seite 145 Note 2.

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: . . . *et equidistat arcui · bg · et illud est quod demonstrare uoluimus. Expletus est tractatus primi · 2 · tertii libri Milei de figuris spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

8. Jordanus Nemorarius' *Planisphaerium*[1]) (fol. 257v—261v).

Überschrift der Seite (mit erster Hand): *Planisperium.*

Überschrift des Textes (mit jüngerer Hand): „Planispherivm".

Anfang: *Speram in plano describere*[2]) *est singula puncta eius in plano quolibet ordinare secundum similitudinem situs . . .*

Satz 1: *Spera in quolibet polorum planum contingente, in cuius . . .*

Schlufs: . . . *representabit punctus · f · in plano polum circuli decliuis, et hec est intentio auctoris de nouo appositum. Explicit.*

9. Anonym, *de speculis comburentibus*[3]) (fol. 262r—265r).

Überschrift (mit jüngerer Hand): „De specvlis combvrentib".

Anfang: *De sublimiori quod geometre adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt . . .*

Schlufs: . . . *Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum. Explicit de speculis comburentibus.*

10. Apollonios' sog. *de pyramidibus*[4]) (fol. 265r—266r).

Überschrift: *Ista sunt, que sequuntur, in principio libri Apollonii de piramidibus, et sunt anxiomata* (sic!), *que premittuntur in libro illo.*

Anfang: *Cum continuatur inter punctum aliquod . . .*

Schlufs: . . . *et nominatur linea erecta linea, super quam posite sunt linee protracte ad diametrum secundum ordinem.*

11. Gerhards (v. Cremona?) *Algorismus I—II*[5]) (fol. 266v—289r).

---

1) Dem gegenwärtigen von Campanus (vgl. unten) überarbeiteten *Planisphaerium* bin ich in den Codd. Basil. F, II, 33 und S. Marco Venet. VIII, 32 (Valentinelli XI, 90; vgl. unten) begegnet. Der reine, mit Satz 1 anfangende Text: *„Spera in quolibet punctorum* (oder *polorum*) . . . *in communi ergo sectione ipsius et circuli · poyh · est in · o · sicut illius puncti, quod proponebatur"* findet sich im Cod. Vatic. 3096 fol. 140v—143r (membr. XIV saec.) mit dem Titel *„Planisperium Jordani"* und stimmt mit dem Texte in dem Drucke: *Sphaerae atque astrorum caelestium ratio natura et motus* etc. . . . Valderus 1536 überein.

2) Über der Zeile hat zweite Hand hier geschrieben: *Hec est diffinitio planisperii;* vgl. vorige Note.

3) Zu meinen Notizen über diese und die folgende Schrift (vgl. Bibl. math. 1902, p. 71) ist noch hinzuzufügen: Diese zwei Texte finden sich im Cod. Regin. 1253 (XIV saec.), und zwar *de pyramidibus* fol. 62r—63r, *de speculis comburentibus* fol. 63r—69v, letzterer mit dem Titel *liber de arte speculorum comburentium;* gleich danach folgt im Cod. Reg. 1253 die aus dem Cod. Paris. 9335 (vgl. Bibl. math. 1902, p. 68) bekannte Aufrechnung der mittleren Bücher *„secundum Johannitium"*. Im Cod. Palat. 1377 bildet der Text *Tideus: de speculis* mit dem Titel: *liber Tadei de speculis* (fol. 11v—14r) einen Text mit dem Texte *de speculis comburentibus* (fol. 14r—18v); hier fehlt aber der im Cod. Paris. 9335 zwischen die beiden eingeschaltete Text *de pyramidibus.* Ein innerer Zusammenhang der 3 Texte dürfte kaum stattfinden.

4) Ediert in Heibergs Apolloniosausgabe, Prolegomena, p. LXXV ff.

5) Im Cod. Digby 61 heifst das Werk: *Algorismus magistri Genardi in integris et minutiis,* vgl. *Cat. Codd. Mss. Bibl. Bodl. IX confecit* Macray, Oxonii 1883, p. 63—64 und Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cre-*

Überschrift: *Tractatus magistri Gernardi* (sic!) *de algorismo.*

Anfang: *Digitus est omnis numerus minor decem. — Articulus est omnis numerus, qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum . . .*

Satz I, 1: *Ex maximo et minimo cuiuslibet limitis numero constat primus numerus limitis proximo loco superioris. Verbi gratia sint . . .*

Schlufs: . . . *et quanto sepius multiplicaueris, tanto propinquiorem radicem inuenies sicut ex premissis patere potest. Hec sunt, que de minuciis scienda et ideo colligenda putaui, et eia* (?) *finit.*

12. Notiz über Astrolabien (fol. 289r letzte Hälfte).

Anfang: *Cuiuslibet artis studium ad astronomiam spectat, uidelicet a qua habet originem . . .*

Schlufs: . . . *ergo que est primi ad secundum, ea est secundi ad 3m; ergo circuli proportionales, et hoc est propositum.*

13. Johannes' (de Monte Pessaluno?) *Quadrans vetus*[1]) (fol. 289r—292v).

Überschrift: *Practica geometrie.*

Anfang: *Geometrie due sunt partes principales, theorica et practica. Theorica est quando . . .*

Schlufs: . . . *sic de similibus corporibus siue sint laterate columpne siue laterate piramides siue conice, spere uel quomodolibet aliter se habencia similia corpora. Explicit.*

14. Buch über praktische Geometrie in 4 *partes*[2]) (fol. 292v—296r).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Artis cuiuslibet consummatio in duobus consistit in thorice* (sic!) *et practice* . . . (es folgt eine Lobrede über die praktische Geometrie und dann kommt:) *Vobis igitur super geometrie practicam iocundum tractatum et fructu memorem instruimus, uidelicet quod de magistri nostri fonte dulcius hausimus, sicientibus propinemus* (sic!). *Opus autem nostrum in · 4 · distinguimus partes. In prima planimetriam instruimus superficierum quantitates inuestigando. In secunda capacitates corporum et crassitudines inuenire docemus. In tertia geometricas et astronomicas minucias ad predicta necessarias docere promittimus. In 4a altimetriam mensurare alta docebimus, ita ut principaliter geometrie secundario astronomie hoc opus deseruiat. Theorice igitur exordiamus.*

(Satz 1) *Linee recte quantitaten podismari. Esto . . .*

Schlufs: . . . *eorum ingenio exercitando ex industria non ignorancia pretermisimus, et hec de crassimetria sufficiant.*

12.

Cod. Vatic. lat. 4571, membr. XIV saec. (ca. 1350—1375) 32,5×24,0 cm.

Dieser Codex besteht aus 21 numerierten Textfolien und einem leeren Schlufsblatt. Die Folien 1—18 bilden 3 Quaternionen aus je 3 Lagen;

---

monese, Roma 1851, p. 57. Das Werk hat im Cod. Regin. 1261 2 Bücher mit bezw. 43 und 42 Sätzen; von diesen fehlen im Cod. Digby 61 die Sätze II, 9—42, wenn Macrays Angaben richtig sind.

1) Über diesen in zahlreichen Hss. vorkommenden Text vgl. z. B. Steinschneider, Hebräische Übers. p. 611—613.

2) Über diesen Text, der mir sonst nicht begegnet ist, kann ich keine Aufschlüsse geben. Die ganz kurzen Sätze sind nicht aufgezählt. Der gegenwärtige Text dürfte übrigens nicht vollständig sein.

jedes der letzten 3 Folien ist für sich hinzugefügt. Die Schriftfläche ist 23,5 × 17,0 cm; die Schrift steht in 2 Kolumnen, deren jede 23,5 × 7,8 cm mifst. Die Zeilenzahl variiert zwischen 52 und 55. Der Text mit Ausnahme von fol. 21 ist von einer Hand geschrieben. Datierungen oder Subskriptionen kommen nicht vor. Der Inhalt ist folgender:

1. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 1r—20v).

Überschrift: *Primus liber Millei in figuris spericis.*

Anfang: *Declarare volo qualiter faciam . . .*

Schlufs (fol. 18v): . . . *et equidistat arcui bg · et illud est quod declarare voluimus. Expletus est tractatus primi · 2 · 3 · libri Milei de figuris spericis, et cum eius completione completus est totus liber eius.* Die Figuren zum Menelaostexte folgen fol. 19r—20r; die Figur zu III, 5 ist verzeichnet.

2. Textfragment (fol. 21), dessen Inhalt weder mit der Mathematik noch mit den Naturwissenschaften zu thun hat.

13.

Cod. S. Marco Venetiarum lat. VIII, 32, membr. XIV saec. (in Valentinellis Katalog XI, 90).

Was die Beschreibung dieser Hs. betrifft, verweise ich auf Valentinelli. Der Inhalt ist folgender:

1. Theodosios *Sphärik I—III*[1]) (fol. 1r—35r).

Überschrift: *Incipit 1us liber Theodosii de speris.*

Anfang: *Spera est figura solida, una tantum superficie contenta . . .*

Schlufs: . . . *sicut processimus in demonstratione antepremisse per quartam. Explicit liber Theodosii de speris cum commento Capani* (sic!).

2. Menelaos' *Sphärik I—III* (fol. 35r—84v).

Überschrift: *Incipit 1us liber Milei de arcubus.*

Anfang: *Declarare uolo qualiter faciam . . .*

Schlufs: . . . *et equedistat arcui · bg · et illud est quod demonstrare uoluimus. Expletus est tractatus primi, 2i et tercii libri Milei de figuris spericis, et cum eius expletione completus est totus liber eius.*

3. Jordanus Nemorarius' *Planisphaerium* (fol. 84v—90r).

Überschrift: *Incipit planisperium.*

Anfang: *Speram in plano describere est singula puncta eius in plano quolibet ordinare secundum similitudinem situs . . .*

Schlufs: . . . *representabit punctum · f · in plano polum circuli decliuis, et hec est intentio auctoris de nouo appositum. Explicit.*

4. Anonym, *de speculis comburentibus*[2]) (fol. 90r—94v).

Überschrift: *Incipit liber de speculis comburentibus.*

Anfang: *De sublimiori quod geometri* (?) *adinuenerunt, et in quo antiqui solliciti fuerunt . . .*

Schlufs: . . . *Et sunt fortioris combustionis omnibus speculis, quoniam radii conuertuntur ex tota superficie eorum ad punctum unum. Explicit de speculis comburentibus.*

---

1) Die Texte 1—3 haben alle den Kommentar des Campanus in den Text eingefügt. Vgl. oben Seite 145 Note 2 und Seite 149 Note 1.

2) Über die Texte 4—5 vgl. oben Seite 149 Note 3.

5. Apollonios' sog. *de pyramidibus*[1]) (fol. 94^r—96^r).

Überschrift: *Ista sunt, que sequuntur, in primo* (?) *libro Apollonii de piramidibus, et sunt anxiomata* (sic!), *que premittuntur in libro illo.*

Anfang: *Cum continuatur inter punctum aliquod . . .*

Schlufs: . . . *et nominatur linea recta linea, super quam posite sunt linee protracte ad diametrum secundum ordinem.*

Von den bis jetzt ermittelten lateinischen Menelaoshandschriften harren noch folgende einer Untersuchung (vgl. Seite 12):

14. Cod. Rheno-Trajectoriae 725 (Utrecht),
15. Cod. Parisinus 7251,
16. Cod. Bodleianus 6556 . 9 (verschollen?),
17. Cod. Digby 168 (Oxford), nur Fragmente, und
18. Cod. Digby 178 (Oxford), nur Fragmente.

2.

Dem Leser sind wir noch den Nachweis schuldig, dafs der Kommentar, dem wir in den zur Klasse B gehörenden Menelaoshss. begegneten, in der That Campanus zuzuschreiben ist. Dieser Nachweis ist unserer Ansicht nach nicht unwichtig; denn die Würdigung des Campanus ist bis jetzt sehr unsicher gewesen; der Nachweis aber, dafs er derjenige ist, der Menelaos' *Sphärik* kommentiert hat, entschleiert zugleich, wie wir sehen werden, eine umfangreiche Thätigkeit, die Campanus als Kommentator entfaltet hat, und von der wir bisher nur teilweise unterrichtet waren.

In den Codd. S. Marco Venet. VIII, 32 (d. h. Valentinelli XI, 90), Reginensis 1261 und Palatinus 1351 (vgl. oben) findet sich Theodosios' *Sphärik* mit einem Kommentar, welcher in der erstgenannten dieser Hss. dem Campanus beigelegt wird (vgl. oben Seite 151 und Bibl. math. 1902, p. 67). Gleich auf den Theodosiostext folgt in allen drei Hss. der kommentierte Menelaostext. Deswegen ist natürlich noch kein zwingender Grund vorhanden, auch Campanus den Menelaoskommentar beizulegen.

Eine genauere Untersuchung der beiden Kommentare macht es aber unzweifelhaft, dafs sie denselben Urheber haben. Der Kommentar zu Theodosios II, 15 (entspricht II, 12 des griechischen Textes) hat nämlich diesen Passus: *De lineis autem inequalibus dico, quod maior resecabit maiorem arcum et minor minorem; que autem maiorem resecat arcum, illa est maior, que autem minorem, illa est minor. Quod hic proponitur de facili probabitur eodem argumentationis genere, quo auctor probat principale propositum; et ualet istud ad · 8 · Milei, ubi dicitur in commenti fine illius 8^e: „et erit linea egrediens ex · z · ad · d · etc.“* — In den fünf mir bekannten Hss., die den kommentierten Menelaostext enthalten, begegnen wir in der That auch im Beweise des Satzes I, 8 den Worten: *et erit linea egrediens ex · z · ad · d ·*, und als Kommentar dazu (in den Codd. Palat. 1351 und Vindob. 5277 also am Rande) den Worten: *hoc patet per hoc, quod ego apposui ad 15 secundi Theodosii.*

---

1) Dieser Text ist Valentinelli entgangen.

Wenn also der Theodosioskommentar, wie es in der Venetianer Hs. angegeben wird, von Campanus herrührt, so ist dasselbe mit dem Menelaoskommentar der Fall. Dafs die Angabe der Venetianer Hs. richtig ist, läfst sich aber nicht bezweifeln Die Kommentare müssen nämlich im 13. Jahrh. verfafst sein; denn sie finden sich in Abschrift in Hss., die noch im ersten Drittel des 14. Jahrh. geschrieben sind, wie Cod. Palat. 1351, und in dem Kommentar zu Menelaos III, 1 wird Jordanus Nemorarius zitiert mit den Worten: *secundum quod definit Jordanus in commento octauae propositionis noni libri arismetice sue;* ferner kommen in den Kommentaren zu den zwei sphärischen Werken mehr als ein Mal Hinweisungen auf den wohlbekannten Euklidkommentar des Campanus vor. An der Autorschaft Campanus' zweifelte auch der Kardinal Pomponus Ceçio nicht; fügt er doch in seiner Abschrift von Theodosios' *Sphärik,* d. h. Cod. Vatic. 3380 (vgl. oben) fol. 21^r bei den Textworten: *hoc enim necesse est, quemadmodum demonstrauimus in prima decimi* am Rande hinzu: *nota, quod hinc constat hanc esse expositionem Campani.*

Nunmehr nimmt es kein Wunder, dafs im Cod. Regin. 1261 die drei Bücher der *Sphärik* des Theodosios als Buch 16—18 der *Elemente* aufgezählt werden (vgl. Seite 148). Campanus hat eben die *Elemente* des Euklid und die *Sphärik* des Theodosios als Fundament der Geometrie betrachtet und hat die beiden Werke, denen meistens auch Menelaos' *Sphärik* hinzugefügt wurde, mit weitläufigen Kommentaren und einem ganzen Netz von gegenseitigen und zwar sehr nützlichen Hinweisungen versehen.

Ich vermute nun, dafs Campanus' Herausgeberthätigkeit (denn so müssen wir sie nennen) mit diesen drei Kommentaren noch lange nicht erschöpft ist. Ein Werk wenigstens kommt hinzu, nämlich Jordanus' *Planisphaerium,* von welchem ein kürzerer, reiner und ein längerer mit Kommentar versehener Text vorliegt, und dieser Kommentar ist wahrscheinlich auch dem Campanus zuzuschreiben. Im Cod. Regin. 1261 (vgl. oben) folgt das kommentierte *Planisphaerium* gleich nach den drei von Campanus kommentierten Werken, und in dem Kommentar kommen Hinweisungen auf alle drei Werke mehrmals vor. Wie viele aber von den Texten, die eben in den Hss. des 14. Jahrh. in zwei Rezensionen vorliegen, Campanus überarbeitet hat, mufs ich dahingestellt sein lassen. Obwohl die Entwickelungsgeschichte der Mathematik bis auf Newton nur klar zu legen ist durch die Feststellung und Identifikation der in den lateinischen mittelalterlichen Hss. befindlichen Texte, so ist in dieser Beziehung noch verhältnismäfsig sehr wenig gethan, und Campanus ist nur einer unter vielen, deren wissenschaftliche Thätigkeit und Bedeutung für die Nachwelt noch nicht festgestellt ist.

Ich darf hier nicht zu nennen versäumen, dafs Campanus möglicherweise der Urheber ist eines seinerzeit von Steinschneider öfters erwähnten und dem Tâbit îbn Korrah beigelegten kleinen Textes mit dem Titel: *De figura sectore,* welcher in den zwei Drucken: *Sphaera mundi,* Venedig 1518 steht. Im Cod. Vatic. lat. 3098, chartac. XIV—XV saec. hat dieser Text (fol. 109^r—^v) nämlich die Überschrift: *Expositio magistri Campani in figura sectore,* und im Cod. S. Marco Flor. 184, wo seine letzte Hälfte gerade hinter dem reinen Menelaostexte folgt (an der Übergangsstelle ist

eben ein Blatt weggeschnitten), steht im alten Inhaltsverzeichnis vorne in der Hs.: *Tractatus Milei et Campani.* Tâbits Werk mit demselben Titel, welches ich nach Cod. Arsenalis 1035 untersucht habe, und das ich kürzlich in dem bisher unbekannten Cod. Neapolit. VIII, E, 33 fand, ist jedenfalls viel gröſser als der gedruckte Text und nicht einmal teilweise mit diesem identisch. Übrigens ist Tâbits Werk eine recht bedeutungslose Leistung und der dem Campanus beigelegte gedruckte Text durchaus wertlos.

3. (Vgl. Seite 8.)

In einem Aufsatz in der Bibl. math. 1901 habe ich Seite 204 die Unbrauchbarkeit der lateinischen Ausgaben (Nürnberg 1537 und Bologna 1645) von Al-Battanis *Astronomie* festgestellt. Ob der Übersetzer, Plato von Tivoli, oder vielmehr der Herausgeber die Schuld daran hat, konnte ich aber damals nicht entscheiden. Ich habe nun Gelegenheit gehabt, die Übersetzung handschriftlich zu untersuchen, und kann konstatieren, daſs Platos Übersetzung, so wie sie in den Handschriften vorliegt, mit dem arabischen Texte sehr gut übereinstimmt. Der Herausgeber hat somit entweder seine Vorlage, namentlich was die Zahlen betrifft, konsequent miſsverstanden, oder er hat eine sehr schlechte Handschrift benutzt. In der Schätzung von Plato von Tivoli als Übersetzer schlieſse ich mich deswegen vollständig Curtze an (vgl. *Der Liber Embadorum des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli,* ed. Curtze, Einleitung p. 6). — Die von mir benutzten lateinischen Al-Battanihss. sind Cod. S. Marco Venet. VIII, 14 (Valentinelli XI, 60), membr. XIV saec. und Cod. Vatic. 3098, chartac. XIV—XV saec.

4. (Vgl. Seite 13 Note 50.)

Daſs es mir nicht gelungen ist, in Deutschland lateinische Menelaoshss. aufzufinden, ist recht sonderbar, da Regiomontanus sicher solche aus Italien nach Nürnberg mitgebracht hat (vgl. Seite 19, Note 65 und Seite 98). Eine Bestätigung meiner Annahme, daſs man in Nürnberg um das Jahr 1500 den Menelaostext besaſs, fand ich kürzlich in einem Werke eines der Nachfolger Regiomontanus', dem *liber de triangulis sphaericis* von Johannes Werner. In diesem steht nämlich (Buch 2, Satz 10): *Hanc* ⟨propositionem⟩ *Menelaus iuxta codicem, qui in fuit potestate mea demonstravit in propositione secunda libri tertii.* Die nähere Untersuchung dieses und anderer Wernerschen Zitate bestätigt, daſs der Nürnberger Stadtpfarrer die Gerhardsche Übersetzung von Menelaos' *Sphärik* benutzte, und zwar sehr ergiebig.

Nähere Aufschlüsse über Werners Werk, das man als verschollen betrachtet hat (vgl. Cantor II, p. 417 und v. Braunmühl, *Gesch. d. Trig.* I, p. 133), das ich aber in einer Hs. der Vatikanischen Bibliothek gefunden habe, wird man in der Bibl. math. 1902, Heft 2 und ff. finden können.

NACHTRÄGE UND BERICHTIGUNGEN

ZU

„DIE MATHEMATIKER UND ASTRONOMEN DER ARABER UND IHRE WERKE".

VON

HEINRICH SUTER

IN ZÜRICH.

Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke“.

Es ist kaum zu vermeiden, dafs bei der Abfassung eines Werkes von vorherrschend bibliographischer Natur, wie meine Arbeit: *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900), wo man so viele Quellen zu Rate zu ziehen hat, wo man hauptsächlich umfangreiche Kataloge durchgehen mufs, die eine oder andere Quelle unberücksichtigt gelassen, hier und da eine Katalogstelle übersehen werden kann. Es sind mir in neuester Zeit noch einige Werke über arabische Mathematiker und Astronomen zur Kenntnis gekommen, die mir leider bis jetzt unerreichbar waren, und die ich für die folgenden Notizen benützt habe, so z. B.: STEINSCHNEIDER, *Die hebräischen Übersetzungen des Mittelalters* (Berlin 1893)[1]; (ROBLES), *Catálogo de los manuscritos árabes existentes en la bibl. nacional de Madrid* (1889)[2]; C. A. NALLINO, *I manoscritti arabi, persiani, siriaci e turchi della bibl. nazionale e della R. accad. delle scienze di Torino* (1900)[3]; *Collections scientifiques de l'Institut des langues orientales de St. Pétersbourg*, t. I. (Mss. arabes décrits par le Baron V. ROSEN), St. Pétersb. 1877[4]), et t. III. (Mss. persans décrits par le même), ibid. 1886[5]); *Cataloghi dei codici orientali di alcune biblioteche d'Italia* (Firenze 1878 u. flg.).[6]) Sodann hat mich Hr. Prof. C. A. NALLINO in Neapel durch private Mitteilungen auf eine Reihe von Verbesserungen aufmerksam gemacht; ich spreche

1) Wird zitiert mit „STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.*“

2) Wird zitiert mit „*Madrid.*“

3) Wird zitiert mit „*Turin*“ und bezieht sich nur auf die Mss. der Bibl. nazionale in Turin.

4) Wird zitiert mit „*St. Petersb. Inst. A.*“

5) Wird zitiert mit „*St. Petersb. Inst. P.*“

6) Wird zitiert mit „*Cat. d'Italia*“; der Inhalt von 4), 5) und 6) wurde mir, soweit es die Mathematik und Astronomie betrifft, von Hrn. C. A. NALLINO in Neapel gütigst mitgeteilt.

diesem ausgezeichneten Gelehrten, dessen Kenntnisse auf dem Gebiete der mathematischen, astronomischen und geographischen Litteratur der Araber wohl von wenigen Orientalisten der Gegenwart erreicht werden mögen, hier öffentlich meinen ergebensten Dank für seine gütige Hilfe aus.

Zu Art. 2, 7, 27 u. 28: Nach NALLINO ist „NAUBACHT" (pers. = neues Glück) die richtige Lesart, nicht „NÛBACHT."

Zu Art. 7 u. 11: Es ist vielleicht der unter den Übersetzungen GERARDS von CREMONA genannte *liber alfadhol i. est arab de bachi* (?) ein Werk dieses FAḌL B. NAUBACHT (s. Art. 7) oder dann des FAḌL B. SAHL EL-SARACHSÎ (s. Art. 11).

Zu Art. 8: Für lat. und hebr. Übersetzungen von Schriften MÂŠÂLLÂHS verweise ich auf STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 599—603, und auf HOUZEAU, *Bibliogr. génér. de l'astron.* I, p. 700—702.

Zu Art. 13: Das Buch der Fragen *(masâ'il)* von ʿOMAR B. EL-FARRUCHÂN EL-ṬABARÎ (oder von seinem Sohne MUH. B. ʿOMAR, s. Art. 34) befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (NALLINO.)

Zu Art. 14: Wie mir Hr. NALLINO mitteilt, sind die im Escurial (922, jetzt 927) noch vorhandenen Tafeln wirklich diejenigen des JAḤJÂ B. ABÎ MANṢÛR, genannt die „erprobten Mâmûnischen" Tafeln, mit Einschiebungen aus den Tafeln des KÛŠJÂR, IBN EL-AʿLAM und ABÛ'L-WEFÂ.

Zu Art. 19 u. Anmerkg. 5[a]: Zur Zeit, da ich diese Artikel schrieb, war mir die ausgezeichnete Abhandlung NALLINOS: *AL-CHUWÂRIZMÎ e il suo rifacimento della geografia di TOLOMEO* (in den Atti della R. accad. dei Lincei, 2_5 : 1, 1894) noch nicht bekannt, worin der Verfasser nachweist, daſs die von SPITTA BEY aufgefundene, jetzt in Straſsburg (L. arab. Cod. Spitta 18) befindliche Schrift des MUH. B. MÛSÂ, betitelt *ṣûrat el-arḍ* (Figur der Erde), eine nach dem Stande der geographischen Kenntnisse der Araber zur Zeit EL-MÂMÛNS gemachte Umarbeitung der Geographie des PTOLEMÄUS sei. MUH. B. MÛSÂ verfaſste ferner für EL-MÂMÛN ein Kompendium des groſsen *Sindhind*, den MUH. B. IBRÂHÎM EL-FAZÂRÎ aus dem indischen *Siddhânta* übersetzt, oder nach demselben bearbeitet hatte; der *Fihrist* identifiziert dieses Kompendium des *Sindhind* mit den astronomischen Tafeln des MUH. B. MÛSÂ. Zu diesen Tafeln schrieb ein gewisser MUH. (od. AḤMED) B. MUṮANNÂ (od. MUṮÂNÂ) B. ʿABDELKERÎM, über den wir nichts weiteres wissen, einen Kommentar, der in Form von Frage und Antwort abgefaſst und für einen MUH. B. ʿALÎ B. ISMÂʿÎL geschrieben war; dieser Kommentar existiert nur noch in einer hebräischen

Übersetzung des ABRAHAM B. ESRA in der Bodl. (Mich. 835) und in Parma (de Rossi 212), betitelt *Ṭaʿamê lûchôt Alchowârezmî* (Gründe der Tafeln des CHOWÂREZMÎ.) (Vergl. STEINSCHNEIDER, in Zeitschr. d. deutschen morgenländ. Gesellsch. **24,** 1870, p. 339—391, und *Hebr. Übers.* p. 572.) — Hr. NALLINO giebt in der genannten Abhandlung eine Stelle aus den Annalen EL-ṬABARÎS (Ser. III. T. II. p. 1363) wieder, aus welcher der Schlufs gezogen wird, dafs EL-CHOWÂREZMÎ, welcher dort noch die Beinamen EL-MAǦÛSÎ EL-QOṬROBBOLÎ [= der Magier aus Qoṭrobbol (am Euphrat)] hat, i. J. 232 (846/47) beim Tode des Chalifen EL-WÂṮIQ noch am Leben war. Ich habe sein Todesjahr zwischen 220 und 230 angesetzt, was nun also vielleicht in 230—240 zu verbessern ist, doch mufs ich hierüber noch folgendes beifügen: MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ und MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR sind jedenfalls öfters von den spätern Schriftstellern der Araber verwechselt worden (vergl. auch Anmerkg. 6 meines Buches). So glaube ich, dafs der von dem Chalifen EL-WÂṮIQ zu dem oströmischen Kaiser behufs Besichtigung der Höhle der Siebenschläfer gesandte MUH. B. MÛSÂ EL-MUNAǦǦIM (der Astrolog oder Astronom, so heifst er bei IBN CHORDÂḎBEH, *kitâb el-masâlik we'l-mamâlik:* Biblioth. geograph. arabic. P. VI, p. 106) der i. J. 259 (873) gestorbene MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR sei, denn von diesem wird berichtet, dafs er nach den oströmischen Ländern gereist sei, um wissenschaftliche Werke daselbst zu erwerben; IBN CHORDÂḎBEH berichtet (l. c.), dafs ihm MUH. B. MÛSÂ der Astronom selbst von dieser Reise erzählt habe, das hätte wohl um das Jahr 250 (864), um welche Zeit höchst wahrscheinlich IBN CHORDÂḎBEH das genannte Buch geschrieben hat, MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ nicht mehr thun können. EL-MOQADDESÎ schrieb i. J. 378 (988/89) in seinem *kitâb aḥsan el-taqâsîm* (Biblioth. geograph. arabic. P. III, p. 362) nach IBN CHORDÂḎBEH über eine Gesandtschaftsreise, die MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ EL-MUNAǦǦIM im Auftrage EL-WÂṮIQS zu ṬARCHÂN, dem König der Chazâren gemacht habe, ich glaube, dafs dies wiederum MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR ist, und dafs EL-MOQADDESÎ ihn mit dem ältern MUH. B. MÛSÂ verwechselt, und deshalb „EL-CHOWÂREZMÎ“ noch von sich aus hinzugefügt hat. IBN ROSTEH erwähnt in seinem *kitâb el-aʿlâq el-nafîse* (Biblioth. geograph. arabic. P. VII, p. 266) einen Auftrag des Chalifen EL-MUTAWAKKIL (232—247, 847—61) an MUH. B. MÛSÂ EL-MUNAǦǦIM zur Auswahl eines Bauplatzes für eine zu gründende Stadt, auch dies ist wohl MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR. Zur Bestätigung der oben ausgesprochenen Vermutung über den Träger der Sendung nach der Höhle der Siebenschläfer erwähne ich noch, dafs MASʿÛDÎ in seinem *kitâb el-tanbîh we'l-išrâf* (Biblioth. geograph. arabic. P. VIII, p. 134) diesen Gesandten

geradezu MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR EL-MUNAĞĞIM nennt.[1]) An andern Stellen dieses Buches (p. 186, 199 und 222) wird MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ, bezw. bloſs EL-CHOWÂREZMÎ, mit seinen Tafeln erwähnt, ohne den Beinamen EL-MUNAĞĞIM. Man ersieht aus allem diesem, daſs das strenge Auseinanderhalten beider Autoren schwierig ist, und deshalb ist auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daſs EL-ṬABARÎ in der oben zitierten Stelle den MUH. B. MÛSÂ B. ŠÂKIR, der gewöhnlich EL-MUNAĞĞIM genannt wird, mit dem ältern MUH. B. MÛSÂ verwechselt hat, und also von sich aus, wie dies EL-MOQADDESÎ gethan haben mag, „EL-CHOWÂREZMÎ" hinzugefügt hat; ich will allerdings nicht verschweigen, daſs der Beiname EL-MAĞÛSÎ, der aber nur bei EL-ṬABARÎ vorkommt, eher für die andere Ansicht spricht, die Hr. NALLINO in der genannten Abhandlung vertritt. Um schlieſslich das Material zu dieser Frage zu vervollständigen, soweit wir es imstande sind, sei noch erwähnt, daſs einige arabische Quellen[2]) noch einen dritten MUH. B. MÛSÂ erwähnen, der den Beinamen EL-ĞALÎS (der Gesellschafter, Genosse) hatte, und ebenfalls Astrolog und Zeitgenosse von JAḤJÂ B. ABÎ MANṢÛR und noch von ABÛ MA'ŠAR war.

Zu Art. 24: Nach NALLINO ist „SENED" (oder SANAD) die richtige Lesart, nicht „Sind".

Zu Art. 26: Das Buch „über die Urteile aus den Gestirnen" (*kitâb aḥkâm el-nuğûm*) des SAHL B. BIŠR befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (NALLINO.)

Zu Art. 29: JAḤJÂ B. EL-BAṬRÎQ übersetzte noch aus dem Griechischen ins Arabische die Meteorologie des ARISTOTELES, die arabisch in hebräischer Schrift vorhanden ist im Vatikan (Hebr. Nr. 378), nach STEINSCHNEIDER, *Schriften d. Araber in hebr. Handschr.*, in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 342.

Zu Art. 31: Nach NALLINO wurde das hier genannte astrologische Werk des IBN HIBINTÂ nach 330 (941/42) verfaſst; die von mir gemachte Angabe 214 befindet sich im Münchener Katalog von AUMER.

Zu Art. 39: EL-FARĠÂNÎS „Elemente der Astronomie" existieren in der hebr. Übersetzung des JAKOB ANATOLI noch in Berlin (Cat. v. STEINSCHNEIDER 116), München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 46), Wien (176), Vatican (385), Oxford (Bodl. Hunt. 414, Mich. 48, 49, 835), etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 554—55.

Zu Art. 43: (p. 21, Note b): Die Lesart des Textes „über die erste Bewegung der Sphäre" ist nach NALLINO die richtige; es ist dies die täg-

1) Im Inhaltsverzeichnis dieses Bandes der Bibl. geograph. ist aber dieser Autor mit MUH. B. MÛSÂ EL-CHOWÂREZMÎ EL-MUNAĞĞIM identifiziert.

2) ABÛLFAR. p. 248, Übers. 161, und IBN EL-QIFTI, Münchener Ms. 440, fol. 108ª.

liche scheinbare Bewegung des ganzen Himmelsgewölbes von Ost nach West, welche die arabischen Astronomen „die Bewegung des Universums“, oder „die erste Bewegung“ nennen. — Ich habe p. 21, Z. 7 v. o. das arabische *bi-ṭarîq taʿlîmî* mit „durch Vernunftgründe“ übersetzt, Hr. NALLINO zieht vor zu übersetzen „auf mathematischem Wege“; ich weiſs wohl, daſs *taʿlîmî* sehr häufig die Bedeutung „mathematisch“ hat, aber was soll dann das folgende „auf geometrischem Wege“ noch bedeuten? — In St. Petersb. Inst. A. (Nr. 191, 3⁰) befindet sich ein astrologisches Werk, das den Söhnen MÛSÂS zugeschrieben wird, es heiſst *kitâb el-daraǧât* (das Buch der Grade), über die Natur (das Wesen) der Grade, übersetzt aus den Büchern und Gelehrten Indiens. ROSEN teilt ein gröſseres Stück aus der Vorrede mit, woraus sich ergiebt, daſs das Buch eine verbesserte Redaktion von drei wahrscheinlich aus dem Indischen ins Arabische übersetzten Werken ist. Es beginnt nach der Vorrede mit den Worten: „Das ist der Anfang dessen, was wir aus dem Buche übersetzt haben. Es sagt der Autor des Buches: Die Sphäre (d. h. der Zodiacus) wird in 360 Teile geteilt, und jeder dieser Teile wird Grad genannt.“ Das Buch handelt also über die astrologische Natur jedes der 360 Grade des Zodiacus. (NALLINO.) Ist dieses Werk vielleicht identisch mit dem „Buch der drei“ von MUH. (p. 21, Z. 4 v. o.), aus dem man bis jetzt nichts machen konnte, oder mit dem „Buch über den Teil“ (p. 21, Z. 5 v. o.), von dem das gleiche gilt? — „Die Mechanik“ befindet sich auch in Gotha (1349) und in Berlin (5562).

Zu Art. 45, p. 25 u. Art. 95, Note e): Das Instrument *ḏât el-šoʿbatain* ist nach NALLINO das *Organon parallaktikon* des PTOLEMÄUS, oder die parallaktischen Lineale (auch *triquetrum*). — Das „*dawârad hamzaǧ*“ konnte ich, wie auch FLÜGEL (Ausgabe des *Fihrist*, I. Bd. p. 21) nicht erklären; nun finde ich nachträglich in der Arbeit HORNS: „*Aus italienischen Bibliotheken*“ (Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **51**, 1897, p. 15) als Titel eines persischen Ms. des Vaticans (Nr. 68): *duwâzdeh burǧ-i falak el-aflâk* (die zwölf Häuser des Thierkreises); es ist also wohl unzweifelhaft, daſs statt *dawârad hamzaǧ* zu lesen ist *duwâzdeh burǧ* (die zwölf Häuser), was in arabischer Schrift leicht in das erstere übergehen kann. — Von EL-KINDÎ existieren hebräische Übersetzungen von folgenden Abhandlungen; „Über die Nativitäten“, in München (304), Paris (1028, 1055, 1056), Vatican (477); „über den Regen,“ in Paris (1055); „über die den höhern Wesen beigelegten Ursachen, welche die Entstehung des Regens bedingen“, in München (304, 356), Paris (1028, 1055), Vatican (477); vielleicht alle drei von KALONYMOS B. KALONYMOS übersetzt (vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 562—64).

Zu Art. 53: Für weitere lateinische Übersetzungen von Werken Abû Maʿšars, vergl. Houzeau, *Bibliogr. génér. de l'astron.* I, 702—05.

Zu Art. 60: „Das Buch der astronomischen Beobachtungen" ist zu streichen; Hağî Chalfa III, 470 erwähnt bloſs die Beobachtungen, die von Abû Ḥanîfa gemacht worden sind, aber kein Buch über dieselben. (Nallino.)

Zu Art. 62: „Über den Umlauf der Geburtsjahre" ist vielleicht in einer lateinischen Übersetzung des Plato von Tivoli noch vorhanden in Paris (7439, 4°): Alkasen filii Alkasit (el-Ḥasan b. el-Chaṣîb?) *liber de nativitatum revolutionibus.* Im Text heiſst es nach Boncompagni *(Delle versioni fatte da Platone Tiburtino.* Estratto p. 40) allerdings: Alkasem filii Achasith. (Vergl. auch Steinschneider in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **24**, 1870, p. 336.) — Sein *Liber de nativitatibus* existiert auch in hebräischer Übersetzung des Isaak Abû'l-Chair b. Samuel (1498) in Paris (1033, 1091). (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 546.)

Zu Art. 66: p. 35: Das Ms. 4104 (Hebr.) des Brit. Mus. enthält arabisch aber in hebräischer Schrift: *kitâb tashîl el-meğisṭî* (das Buch der Erleichterung des Almagestes), wahrscheinlich unvollständig (vergl. Steinschneider, *Schriften der Araber in hebr. Handschr.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 367); es ist dies entweder das Werk, dem ich p. 35, Z. 5 v. o. den Titel „das Buch der Auslegung (Kommentar) des Almagestes" gegeben habe, oder dann das unmittelbar folgende; in der That steht bei Ibn Abî Uṣaibiʿa I, 218 bei beiden Werken das Wort *tashîl* (Erleichterung), das ich etwas freier mit „Erklärung" bezw. „Auslegung" übersetzt habe. — p. 35 oben und p. 36 unten ist statt „Über die Rechnung nach den Neumonden" zu lesen „Über die Berechnung des Erscheinens der Neumonde". (Nallino.) — p. 35, Note b): Das Pariser Ms. 2457, 13° handelt nach Nallino nicht über die Trepidation der Fixsterne, sondern über die Ungleichheiten der Bewegung der Sonne, von den Alten mittelst exzentrischem Kreis und Epicykel erklärt. Über die Trepidation handelt ein Brief Ṯâbits an Isḥâq b. Ḥonein, der durch Ibn Jûnis uns erhalten geblieben ist (vergl. Caussin, Notices et extr. VII, p. 114—118). Sehr wahrscheinlich handelte darüber auch die arabisch nicht mehr vorhandene Schrift „über die Bewegung der Himmelssphäre" (p. 35, Z. 10 v. o.), die aber wahrscheinlich noch in lateinischer Übersetzung existiert unter dem Titel: *de motu octavae sphaerae,* in Paris (7195, 14°, und 16211)[1]), im Vatican (4275 und 4083, in verschiedener Übersetzung (Nallino)), oder *de motu accessionis et recessionis,* in Paris

1) Vergl. Delambre, *Histoire de l'astronomie du moyen âge* (Paris 1819), p. 73—75.

(9335), in Florenz (St. Marco, Armar. 4, Nr. 27; bei MONTFAUCON, p. 428), in Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567); gedruckt wurde dieselbe hinter SACRO BOSCOS *Sphaera* und GERARDS *Theorica planetarum*, in Bologna 1480 und Venedig 1518 (vergl. STEINSCHNEIDER, in Zeitschr. für Mathem. **18**, 1873, p. 331—338). Ferner erwähnt STEINSCHNEIDER (l. c.) noch folgende lateinische Übersetzungen T̲ÂBIT'scher Schriften: *de quantitatibus stellarum*, Paris (7215, 6⁰); *de proportionibus*, Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567), es ist dies vielleicht seine Abhandlung über das zusammengesetzte Verhältnis; *de proprietatibus quarundam stellarum*, Paris (7337, 22⁰); *de recta imaginatione*[1]) *sphaerae coelestis*, Paris (7195, 12⁰), Oxford (Cat. Mss. Angl. I. Nr. 6567). — p. 36: „Über die befreundeten Zahlen“ befindet sich auch in Konstant. (4830, 4⁰); diese Schrift wurde von WOEPCKE im Journ. asiat. $\mathbf{20}_4$, 1852, eingehend besprochen. — p. 37: Die Lesart *qarasṭûn* ist die richtige, nicht *farasṭûn*, vom griech. *χαριστίων* (vergl. auch DOZY, *Suppl. aux dictionn. arabes*, t. II, p. 327). (NALLINO.) — Seine Abhandlung über „die Transversalenfigur“ wurde von KALONYMOS B. KALONYMOS (1313) ins Hebräische übersetzt, und befindet sich in Oxford (Bodl. Hunt. 96 = NEUB. 2008). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 588—90.)

Zu Art. 77: p. 41: „Über die Rechnung *el-talâqî* auf dem Wege der Algebra“; hierzu vergl. man: Zu Art. 204. — „Über den Gebrauch des Himmelsglobus“ befindet sich auch in spanischer Übersetzung in den *Libros del saber de astronomia*, Vol. I, p. 153—208: *Libro de la fayçon dell'espera et de sus figuras et de sus huebras di* COZTA *el sabio* (NALLINO); ebenso in hebräischer des JAKOB B. MACHIR in München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 246, 249, 261), Paris (1030, 1031, 1053, 1065), Oxford (Bodl. Mich. 835), Brit. Mus. (Alm. 213), etc., nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 552. In lateinischer Übersetzung existiert sie aufser in Oxford noch in Wien (5273, 7⁰). (CURTZE). — Seine Übersetzung der Sphärik des THEODOSIUS ist auch noch arabisch in hebräischer Schrift in Paris (Hebr. 1101) vorhanden (vergl. STEINSCHNEIDER, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 367); diejenige von HERONS Mechanik (über das Heben der Lasten) befindet sich auch im Brit. Mus. (Add. 23394) und in Konstant. (2755); sie wurde aufser von CARRA DE VAUX noch herausgegeben von L. NIX: HERONIS *Alexandrini opera quae supersunt omnia*, Vol. II, Fasc. I (Leipzig 1900).

Zu Art. 78: p. 43, Z. 1 u. 4 v. o.: Statt Nr. 2 ist zu lesen Nr. 3 und umgekehrt. Die Übersetzung des Kommentars zum *Centiloquium* des

1) DELAMBRE (l. c. p. 75) hat *magnitudine* statt *imaginatione*.

Ptolemäus habe ich nach Steinschneider dem Plato von Tivoli zugewiesen (s. p. 43, Note c), obgleich, wie mich Nallino darauf aufmerksam macht, Boncompagni in seiner Schrift *Delle versioni fatte da Platone Tiburtino* etc." (Atti dell' accad. pontif. de' Nuovi Lincei 1852 und Estratto, Roma 1851) diese Übersetzung Platos nicht kennt; es ist dies freilich kein zwingender Beweis gegen die Ansicht Steinschneiders, welcher aus der Jahresangabe (530 d. H.) auf Plato schliefst, da er nirgends in den Übersetzungen des Joh. Hispalensis eine Jahresangabe in muhammedanischer Zeitrechnung gefunden habe.

Zu Art. 81: Von Abû Kâmil Šoǧâ' b. Aslam befinden sich wahrscheinlich noch drei Abhandlungen in latein. Übersetzung in Paris (7377 A.): die erste beginnt fol. 93 und ist ein Bruchstück seiner Algebra; dann folgt sub Nr. 5: *Scholium de mensuratione pentagoni et decagoni*, mit dem Anfang: *dixit Abu Camel Ssagia fil. Ibrahim* (!) *aggregator istius libri;* endlich sub Nr. 6: *Anonymi tractatus de arithmetica;* es sind dieses seine in Leiden (1003) arabisch vorhandenen „unbestimmten Aufgaben". Alle drei Abhandlungen existieren in hebräischer Übersetzung von Mordechai Finzi (um 1473), in München (225) und Paris (1029). (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 584—88.)

Zu Art. 88: Der Kommentar des Anaritius (el-Nairîzî) zu den Elementen des Euklides in der Übersetzung des Gerard von Cremona befindet sich wahrscheinlich auch in einer spanischen Bibliothek, nämlich in derjenigen des Bischofs Gonzalo Palomeque in Cuenca (vergl. R. Beer, *Handschriftenschätze Spaniens*, Wien 1894, p. 147).

Zu Art. 89: Nach Nallino ist die Angabe des *Fihrist* richtig, dafs el-Battânî auf der Feste *Ǧiṣṣ* (Jâqût liest *Ǧaṣṣ*) bei *Sarr-man-ra'a* (oder nach Jâqût besser *Surra-man-râ'a*) und nicht auf der Feste *Ḥaḍr*, wie Ibn Challikân berichtet, gestorben sei. — Nach demselben Gelehrten hat das Ms. des Escurial der Astronomie des Battânî 244, nicht 229 Blätter; ebenso hält er die Angabe, dafs dieses Werk in zwei Ausgaben erschienen sei, für unrichtig; es wäre also das Jahr 299 für die Örter der Fixsterne zu korrigieren in 267 (880/81), und meine Anmerkung 20[a] fiele dahin. Derselbe hält auch die Abhandlungen *Centiloquium, de horis planetarum, de ortu triplicitatum*, die einem Bethen zugeschrieben werden, nicht für solche el-Battânîs, jedenfalls haben sie nichts mit dem Buche „über die Kenntnis der Aufgänge der Häuser" zu thun.

Zu Art. 96: Ich glaube, dafs für diesen Arzt und Geometer der richtige Name el-Mâwardî sei; der Philosoph Abû Jaḥjâ el-Merwazî hatte nach Mas'ûdî (*kitâb el-tanbîh we'l-išrâf:* Biblioth. geograph. arab. P. VIII, p. 122) den Namen Ibrâhîm.

Zu Art. 99: *Zîǧ el-ṭailisân* (oder besser *el-ṭailasân*); nach NALLINO soll es sich um eine kleine Tabelle zur Berechnung des Tagebogens der Sonne und der Äquinoktialzeiten handeln; der Name *ṭailasân* soll von der Form der Tafeln (Rechteck mit Diagonale) herrühren, jedes der dadurch entstehenden Dreiecke heiſst *ṭailasân.* — In Leiden (1107) befindet sich ein astrolog. Werk, betitelt: Das Buch der Gesamtheit der Urteile aus den beiden Finsternissen und der Konjunktion der beiden Planeten Saturn und Jupiter etc., gesammelt und verfaſst von ABÛ'L-QÂSIM B. MÂǦÛR aus den Schriften IBN KÂBIRS (?), EL-KINDÎS, IBN (ABÎ) EL-CHAṢÎBS, SAHL B. BIŠRS und HERMES': darin wird allerdings eine Konjunktion aus dem Jahre 699 d. H. erwähnt, was entweder ein Fehler ist, oder das Werk ist nicht von IBN AMÂǦÛR.

Zu Art. 116: JÛḤANNÂ B. ḤAILÂN, der Lehrer EL-FÂRÂBÎS in Philosophie, wird von MASʿÛDÎ im *kitâb el-tanbîh we'l-išrâf,* l. c., p. 122 erwähnt, und sein Tod in die Regierungszeit des Chalifen EL-MOQTADIR (295 bis 320, 908—932) gesetzt. — EL-FÂRÂBÎS „Kommentar zu den Schwierigkeiten der Einleitungen des 1. und 5. Buches des EUKLIDES" ist noch in hebräischer Übersetzung wahrscheinlich von MOSES B. TIBBON vorhanden in München (Cat. v. STEINSCHNEIDER 36 und 290), nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 509.

Zu Art. 119: „Über die Tagewählerei" existiert in lateinischer Übersetzung (*de electionibus*) von demselben Übersetzer (ABRAHAM SAVASORDA) auch in Paris (16 208), aber mit dem Übersetzungsjahr 1133. (NALLINO.)

Zu Art. 124: „Über die Neigung (Schiefe) der partiellen Neigungen" kommt Hrn. NALLINO, wie übrigens auch mir, unklar vor, der erstere schlägt vor zu lesen: *fî mail el-aǧzâ'* (über die Neigung der Teile, d. h. der einzelnen Grade des Zodiacus).

Zu Art. 132: EL-QABÎṢÎS Einleitung (*madchal*) befindet sich auch arabisch in hebräischer Schrift in Oxford (Hebr. I, 453), nach STEINSCHNEIDER (Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 351); die erste lateinische Ausgabe erschien nicht in Venedig 1485, sondern in Bologna 1473, darauf folgen diejenigen von Venedig aus den Jahren 1481 u. 82, dann erst diejenige aus dem Jahre 1485 (vergl. HOUZEAU, *Bibliogr. de l'astron.* I, p. 705). — Die Abhandlung „über die Konjunktionen der Planeten", von der ich nur eine französische Übersetzung angegeben habe, ist von JOH. HISPALENSIS ins Lateinische übersetzt worden, und ist im Druck herausgegeben, in Venedig 1485, 1511 u. 1521, als Anhang zu seinem *liber introductorius* oder *ysagogicus* unter dem Titel: *Tractatus notabilis* ALCHABITII *de conjunctionibus planetarum in duodecim signis et earum pronosticis in revolutionibus annorum.* — Nach seinen eigenen An-

gaben im *liber introduct.* verfaſste EL-QABÎṢÎ auch ein Buch über die *numûdârât* (Horoskope), und ein anderes *in confirmatione magisterii iudiciorum astrorum et in destructione epistolae Haissebenhali* (ḤASAN B. ʿALÎ?) *in annulatione eius ex ratiocinatione.* (NALLINO.)

Zu Art. 138 u. Anmerkg. 30: „Das Buch der Fixsterne" befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 185), in einem vorzüglichen Ms., das von SCHJELLERUP bei seiner Ausgabe nicht benützt worden ist. (NALLINO.) — Die „Abhandlung über das Astrolabium und seinen Gebrauch" ist auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 190, 4⁰) vorhanden. (NALLINO.) — Die „Arǧûza über die Fixsterne" ist nicht von ʿABDERRAḤMÂN EL-ṢÛFÎ, sondern von seinem Sohne ABÛ ʿALÎ B. ABÎ'L-ḤOSEIN (ḤASAN) EL-ṢÛFÎ, worauf ich auch in Anmerkung 30 hingedeutet habe; der Anfang des Gedichtes nach der Anrufung Gottes heiſst: „Dies sind die Worte ABÛ ʿALÎS, des Sprößlings *(naǧl)* ABÛ'L-ḤASANS EL-ṢÛFÎ," und der letzte Vers beginnt: „es erwähnt sie (die Sterne) mein Vater in seinen Büchern." Ein Exemplar dieser *Arǧûza* existiert auch in Bologna (ROSEN, *Les manusc. orient. de la collection Marsigli à Bologne;* Roma, Accad. dei Lincei, Memorie **12**$_3$, 1884, Nr. 422). (NALLINO.)

Zu Art. 148: Über MUH. B. LURRA finde ich nachträglich eine Stelle im *kitâb el-aʿlâq el-nafîse* von IBN ROSTEH (Biblioth. geograph. arab. P. VII, p. 160), wo es im Art. „die Stadt Iṣpahân" heiſst: „MUH. B. IBRÂHÎM, bekannt unter dem Namen MUH. B. LUDDA (al. LURRA) EL-IṢPAHÂNÎ, der Geometer, hat sie ausgemessen, er sagt": (folgen die Angaben über ihre Gröſse, Zahl und Namen der Thore etc.) Da IBN ROSTEH sein Werk c. 290 (903) geschrieben hat, so muſs MUH. B. LUDDA vor oder um diese Zeit gelebt und geschrieben haben.

Zu Art. 150: Durch die Worte HAǦÎ CHALFAS: „dixit duos se vidisse etc." ist keineswegs bestimmt, daſs ʿOṬÂRID nach EL-BATTÂNÎ gelebt habe; denn FLÜGEL übersetzt unrichtig; statt „prior—posterior" sollte es heiſsen: „alter—alter" (arab. *el-aḥad—el-âchar*). (NALLINO.)

Zu Art. 167, p. 72 u. Note b): NALLINO hält die Tafeln *el-šâmil* in Florenz (Pal. 289) nicht für diejenigen des ABÛ'L-WEFÂ, sondern nur für eine Umarbeitung (oder Neuausgabe) derselben durch einen Anonymus; dieselben befinden sich auch in Paris (2528 u. 29) und im Brit. Mus. (395, 3⁰), (vergl. SUTER, *die Mathem. u. Astron.* etc., p. 227: Zu Art. 364). Die Vorrede zu denselben beginnt nach dem Pariser Ms. 2528 nach der Anrufung Gottes mit den Worten: „Ich habe diese Tafeln zusammengestellt nach den mittlern Resultaten, die von ABÛ'L-WEFÂ und seinen Genossen durch wiederholte Beobachtungen und Prüfungen der frühern Mâmûnischen Beobachtungen sichergestellt worden sind." Der Verfasser führt dann die

ʿAlâ'ischen Tafeln an (vergl. auch Hağî Chalfa III, 567), ohne ihren Verfasser zu nennen, und behauptet, diese seien ein Plagiat, indem sie einfach die mittlern Resultate Abû'l-Wefâs wiedergeben, während der Verfasser erkläre, sie seien nach seinen eigenen Beobachtungen mit von ihm selbst erfundenen Instrumenten aufgestellt worden. Er habe nun die Tafeln Abû'l-Wefâs aufgefunden, die seine mittlern Resultate enthalten, und diese habe er nun hier veröffentlicht, nachdem er sie vorher noch durch Beobachtungen von Konjunktionen etc. geprüft hatte. — Es wäre immerhin möglich, daſs der Verfasser dieser Neuausgabe der Tafeln des Abû'l-Wefâ Aṯîr ed-dîn el-Abahrî wäre (vergl. Art. 364 u. p. 227: Zu Art. 364); dann könnte aber der Verfasser der ʿAlâ'ischen Tafeln nicht wohl Mu'jid ed-dîn el-ʿOrḍî (s. Art. 368), noch weniger Niẓâm el-Aʿrağ (s. Art. 395) sein, welche beide von Hağî Chalfa (l. c.) als Verfasser so benannter Tafeln erwähnt werden; er nennt auſser diesen beiden auch noch el-Bîrûnî (sehr unwahrscheinlich!) und einen ʿAlâ ed-dîn el-Nîsâbûrî, über den ich keine weiteren Angaben gefunden habe; vielleicht sollte es bei Hağî Chalfa statt Mu'jid ed-dîn el-ʿOrḍî heiſsen Mu'jid ed-dîn el-Muhandis (s. Art. 319), der astronomische Tafeln verfaſst hat; eine weitere Vermutung wäre auch ʿAlâ el-Kirmânî (s. Art. 205), und eine dritte, und vielleicht die wahrscheinlichste, Ibn el-Šâṭir, der auch den Ehrennamen ʿAlâ ed-dîn hatte, was ich im Art. 416 zu erwähnen vergessen habe; in diesem Falle könnte dann allerdings Aṯîr ed-dîn el-Abahrî nicht der Verfasser der Neubearbeitung der Tafeln Abû'l-Wefâs sein. Zum Schlusse ist noch zu bemerken, daſs die ʿAlâ'ischen Tafeln nicht notwendig von einem ʿAlâ ed-dîn verfaſst sein müssen, sie könnten auch für einen solchen geschrieben sein und daher ihren Namen haben. — In Paris (2530) befindet sich dann noch ein Kommentar zu diesem *zîğ el-šâmil*, betitelt *el-kâmil fî šarḥ el-zîğ el-šâmil* (das Vollständige, über den Kommentar zu den Tafeln *el-šâmil*) verfaſst i. J. 822 (1419) von Sîdî Ḥasan b. Sîdî ʿAlî el-Qûmnâtî (?).

Zu Art. 174: Die „Einleitung in die Astrologie" befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 186.)

Zu Art. 176: El-Mağrîṭîs Bearbeitung des *Planisphäriums* des Ptolemäus befindet sich auch in hebräischer Übersetzung in Oxford (Bodl. 2582) und im Brit. Mus. (Alm. 96, II.) Seine Abhandlung über das *Astrolabium* soll nicht von Rudolf v. Brügge übersetzt worden sein, sondern von Joh. Hispalensis; diese Übersetzung befindet sich auch in der Amplon. Sammlung (Qu. 363, 13⁰) und in Paris (7292, 14⁰). (Curtze.) (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.*, p. 534 u. 582.)

Zu Art. 178: Ich habe p. 78 bemerkt, daſs Caussin im VII. Bd. der

Notices et extr. p. 16—240 einige Kapitel aus dem Leydener Ms. der ḥâkimitischen Tafeln veröffentlicht hat; ich habe vergessen hinzuzufügen, dafs DELAMBRE in seiner *Histoire de l'astron. du moyen âge* (Paris 1819), p. 125—156 einige weitere Kapitel (im Auszug) aus dem Pariser Ms. 2496, 1° in der Übersetzung SÉDILLOTS wiedergegeben hat.

Zu Art. 182: EL-RAMÂDÎ kommt nicht von der Stadt Ramâda (richtiger Rammâda), sondern von dem arabischen Worte *ramâd* (= Asche); JÛSUF B. HÂRÛN EL-KINDÎ soll nämlich nach IBN BAŠKUWÂL (Biblioth. arab.-hisp. II, p. 614, Nr. 1376) ursprünglich den Beinamen ABÛ ǦENÎŠ (= Vater der Asche, von dem spanischen „ceniza" = Asche) gehabt haben, der dann später durch das rein arabische EL-RAMÂDÎ ersetzt worden ist. (NALLINO.)

Zu Art. 183: Die Abhandlung „über die Auffindung rechtwinkliger Dreiecke mit rationalen Seiten" befindet sich in Paris (2457, 20° und 49°). Als weitere Abhandlung MUH. B. EL-ḤOSEINS ist anzuführen: „Über die Auffindung zweier mittlerer Proportionalen zwischen zwei Geraden auf dem Wege der festen Geometrie", in Paris (2457, 47°); diese Abhandlung hat CARRA DE VAUX in verkürzter Form in französischer Übersetzung veröffentlicht in der Biblioth. Mathem. **12**, 1898, p. 3—4.

Zu Art. 187: Die Arbeit des ABÛ SAʿD EL-ʿALÂ B. SAHL, die sich in Petersb. Inst. A. (192, 12°)[1]) befindet, handelt über den Grad der Durchsichtigkeit (wörtlich Reinheit) des Himmelsgewölbes (E. WIEDEMANN übersetzt *el-falak* mit Äther), und ist einer Abhandlung (Kommentar) dieses Autors über die Optik des PTOLEMÄUS entnommen.

Zu Art. 192: „Abhandlung über die Rechenkunst". Das hebr. Ms. dieser Schrift KÛŠJÂRS befindet sich in der Bodl. Bibl. zu Oxford (OPPENH. 272 A. Qu. = NEUB. 362, 3°) unter dem Titel: *ʿJjjûn ha-ʿiqqarîm* = „Betrachtung der Grundlehren (der Rechnung der Indier)", (vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 565—66 und in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **3**, 1880, p. 109). Der Übersetzer und Kommentator heisst SCHALOM B. JOSEF. — IDELER *(Handbuch der mathem. u. techn. Chronologie,* T. II, p. 547 u. 624ff.) giebt einige Stellen aus dem 1. Buch der „Tafeln" KÛŠJÂRS in arabischem Text und Übersetzung.

Zu Art. 194: In den *Libros del saber,* Vol. III, p. 241—271 befindet sich eine Schrift von IBN EL-SAMḤ, betitelt: *De cuemo puede ell ome fazer una lámina a cada planeta segund que lo mostró el sabio Abulcacim Ab-*

---

1) So ist in Note c) statt „192 Nr. 132" zu lesen, was ich aus dem Artikel E. WIEDEMANNS in der Zeitschr. d. Deutschen Morgenl. Gesellsch. Bd. **38**, 1884, p. 145 entnommen habe.

naçahm (Abû'l-Qâsim Ibn el-Samḥ.) Die Apogeen der Planeten sind darin für das Jahr 416 (1025/26) berechnet. (Nallino.) Diese Abhandlung ist wahrscheinlich seinen astronomischen Tafeln entnommen.

Zu Art. 196, p. 86 u. 225: Vielleicht ist Ibn el-Ṣaffârs „Kompendium astronomischer Tafeln“ noch vorhanden arabisch in hebräischer Schrift in Paris (Hebr. 1102). (Vergl. Steinschneider in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 363). — Sein Buch „über den Gebrauch des Astrolabiums“ befindet sich auch im Escurial (959); in hebr. Übersetzung des Jakob b. Machir existiert es in Oxford (Bodl. Uri 440, Mich. 49, Reg. 46), München (246, 249, 256, 261, 289, 388), Paris (1030, 1045, 1052, 1065, 1095), Vatican (379, 384) etc. (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 580—84.)

Zu Art. 198, p. 89: Zu den Schriften Ibn Sînâs „über die scheinbaren Entfernungen der Himmelskörper“, Oxford (980, 8°), und „über die Bewegung der Himmelskörper,“ Escurial (700, 10°) kommt noch hinzu: „über das Wesen *(ğauhar)* der Himmelskörper“, in Konstant. (4849, 16° u. 4853, 15°). — Zu der Abhandlung „über die Abschaffung (oder Nichtigkeit) der Sterndeuterei“, vergl. auch Mehren, *Vues d'Avicenne sur l'astrologie* (Le Muséon **3**, Louvain 1884, p. 383—403); ibid. **1**, p. 391—396 befindet sich auch eine Biographie Avicennas. (Nallino.)

Zu Art. 204, p. 93 u. 94: In St. Petersb. Inst. A. befinden sich folgende der hier genannten Abhandlungen Ibn el-Haiṯams: Über den Zirkel der großen Kreise (192, 11°); über das Bild der Finsternisse (192, 2°); ausführliche Abhandlung über die Mondfiguren (192, 3°); über die Parallaxe des Mondes (192, 10°); über die Auffindung der Qible (192, 9°); über die Bewegung des Mondes (192, 6°); über eine geometrische Aufgabe (192, 8°); außerdem noch: Über die Lösung der Schwierigkeiten der Bewegung (besser „Veränderung“) der Schiefe der Ekliptik (*el-iltifâf*)[1] (192, 1°); über die Ausmessung der Kugel (192, 4°); über die Teilung der beiden verschiedenen (ungleichen) Größen, die im 1. Satze des 10. Buches des Euklides erwähnt werden (192, 5°); über die Aufgaben *el-talâqî*[2] (192, 7°). — Zur Abhandlung „über die äußere Erscheinung des Weltgebäudes“ ist zu vergleichen: Steinschneider, *Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'Ibn Haitham* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, p. 721 ff. und **16**, 1883, p. 505—513), ebenso *Hebr. Übers.* p. 560. — Zur Abhandlung

1) Woepcke, *L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 75, übersetzt: „Mémoire sur la solution des doutes sur le mouvement complexe“.

2) Wörtlich „des Zusammentreffens“; Woepcke (l. c. p. 76) übersetzt: Mémoire sur les problèmes d'intersection; vergl. auch Art. 77 (Qosṭâ b. Lûqâ); es wäre zu wünschen, daß diese Abhandlung einmal genauer untersucht würde.

„über eine arithmetische Aufgabe“ vergl. E. WIEDEMANN in den Sitzungsberichten d. phys. Soc. in Erlangen, **24**, 1892, p. 83. — Sein „Kommentar zu den Postulaten (allgemeiner: Einleitungen zu den verschiedenen Büchern) des EUKLIDES“ ist noch in hebräischer Übersetzung, wahrscheinlich des MOSES B. TIBBON, vorhanden in München (Cat. STEINSCHNEIDER 36 u. 290), nach STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 509. — p. 95: Die dem IBN EL-HAITAM nach dem Ms. 613, 12⁰ von Algier und nach HAĞÎ CHALFA IV, 549 zugeschriebene *Qaṣîde* ist nicht von ihm, sondern, wie das Berliner Ms. 5745 angiebt, von EL-HÂŠIMÎ, denn diesen nennt als Verfasser ausdrücklich der *mufîd el-moḥtâğ* des SAḤNÛN EL-WÂNŠARÎŠÎ, Kairo 1314 (1896/97), p. 36. (NALLINO.)

Zu Art. 213: Nachdem ich den Art. ABÛ ʿABDALLÂH MUH. B. MUʿADS in STEINSCHNEIDERS *Hebr. Übers.* gelesen habe, halte ich nicht mehr an der Identität dieses Autors mit dem von mir in Art. 213 behandelten ABÛ ʿABDALLÂH MUH. B. JÛSUF B. AḤMED B. MOʿÂD fest; jener, der also wohl aus Jaen stammte, und deshalb den Beinamen EL-ǦAIJÂNÎ trug, wird also der Verfasser des noch in Algier (1446, 3⁰) befindlichen Kommentars zum 5. Buche des EUKLIDES und der Schrift „über die Auffindung der Oberfläche der Kugelsegmente“ sein, die noch im Escurial (955) vorhanden ist. Wahrscheinlich ist er auch der Verfasser der Tafeln „Jahen“, doch steht dies noch nicht ganz fest, immerhin ist meine Anmerkung 44, p. 214 dahin zu berichtigen. Es existieren von ihm auch zwei Abhandlungen in hebr. Übersetzung von SAMUEL B. JEHUDA aus Marseille, die eine handelt über die totale Sonnenfinsternis des letzten Tages d. J. 471 (3. Juli 1079), die andere über die Morgenröthe; beide befinden sich in Paris (1036). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 574—75.)

Zu Art. 218: Die „Chronologie orientalischer Völker“ von EL-BÎRÛNÎ befindet sich auch in Konstant. (2947). — Der „Mesʿûdische Kanon“ ist auch im Brit. Mus. (Suppl. 756) vorhanden. (NALLINO.) — Leider lag mir bei Behandlung dieses Artikels die Textausgabe von EL-BÎRÛNÎS Chronologie durch E. SACHAU nicht vor, sondern nur die englische Übersetzung; Hr. NALLINO machte mich darauf aufmerksam, dafs in der Einleitung zu jener (p. XXXVIII —XLVIII) sich das von EL-BÎRÛNÎ selbst verfafste Verzeichnis seiner bis zum Ende des 65. Lebensjahres (427, 1036) geschriebenen Werke befindet (arab. noch vorhanden in Leiden, 889, am Schlusse seines Verzeichnisses der Schriften des MUH. B. ZAKARÎJÂ EL-RÂZÎ). EL-BÎRÛNÎ führt hier aufser den in meinem Artikel genannten 15 Schriften, von welchen allerdings zwei nicht im Verzeichnis stehen, also wohl nach seinem 65. Lebensjahre verfafst worden sind („das Buch der Zeugenschaft über die Nichtübereinstimmung der astronom. Beobachtungen“ und „Auszug aus dem

Almagest“), noch ca. 100 Abhandlungen an, die er bis zu der genannten Zeit verfaſst hat; diese alle hier zu nennen wäre unnütz, ich führe nur diejenigen an, deren Titel mir von Interesse für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften zu sein schienen:

Über die Fehler der Tafeln des Chowârezmî. Vervollständigung der Tafeln des Ḥabaš und die Reinigung seiner Sätze (Operationen) von Irrtümern. Ein Buch über den *Sindhind*, betitelt: die Gesamtheit der Ideen (Methoden?) der Indier über das astronomische (astrologische) Rechnen. Verbesserung der Tafeln *el-arkand*[1]) durch bessere sprachliche Wiedergabe, da die vorhandene Übersetzung unverständlich war, indem sie sich zu wörtlich an die Sprache des Originals anschloſs. Ein Buch über die beiden vereinigten (konzentrischen?) und gleichen Umläufe, betitelt: über die Vorstellung von den beiden Finsternissen bei den Indiern; es ist dies eine bekannte Idee bei ihnen, von der keine ihrer Tafeln frei ist, von der man aber bei uns nichts weiſs. Richtigstellung der Elemente der Astronomie des Farġânî, verfaſst für Abû'l-Ḥasan Musâfir. Über die Bestimmung der Gröſse der Erde durch die Beobachtung der Depression (*inḥiṭâṭ*) des Horizontes von den Gipfeln der Berge aus. Notiz über das Rechnen und die Zahlen mit den Zahlzeichen der Indier (wörtlich „von Sind und von Hind“). Abhandlung über die Auffindung der Kubik- und höheren Wurzeln. Abhandlung darüber, daſs die Ansicht der Araber über die Ordnungen der Zahlen richtiger sei als diejenige der Indier. Übersetzung dessen, was im *Brâhmasiddhânta* (im Text: „birâhamsidhânad“) von Methoden der Rechenkunst vorkommt. Die (verschiedenen) Multiplikationsmethoden. Über die Ebenmachung (*tesṭîḥ*) der Bilder (Figuren) und die Ausbreitung (*tebṭîḥ*) der Länder (über Kartenprojektionen?).[2]) Notiz über die Ausmessungslehre, für Musâfir el-Moqawwî geschrieben. Über die Reduktion der Eigenschaften der Transversalenfigur auf das Notwendige (Genügende). Abhandlung darüber, daſs die Unmöglichkeit der Teilung der Gröſsen bis zur äuſsersten Grenze verwandt (nahe) sei der Sache der zwei Linien, welche sich nähern, und sich doch nie treffen auch in der (gröſsten) Entfernung (d. h. der Eigenschaft der Asymptoten der Hyperbel). Die Balchischen Aufgaben (Fragen) über die Ideen (Be-

1) Im Sanskrit = *ahargana* (= Summe der Tage), nach Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, p. 322.

2) Man vergleiche die beiden angeführten arabischen Wörter mit den Namen der beiden im Art. 1 angeführten Astrolabien el-Fazârîs: *el-musaṭṭaḥ* und *el-mubaṭṭaḥ*, wobei für Nicht-Arabisten zu bemerken ist, daſs diese letzteren die Partizipien Pass. der beiden Verben *saṭṭaḥa* und *baṭṭaḥa* sind, die „ausdehnen“, „ebenmachen“ bedeuten, und zu denen die oben genannten Wörter die Nomina actionis (Infinitive) sind.

deutungen), die mit der Vernichtung der Kunst (Astrologie oder Magie?) zusammenhängen. Die Antworten auf die von den indischen Astrologen eingegangenen Fragen. Die Antworten auf die zehn kašmîrischen Fragen. Abhandlung über die Geschichte der Methode der Indier in der Auffindung der Lebenszeit (des Alters eines Menschen). Über die Erklärung der Ansicht des Ptolemäus über den *Sâlchodâh* (= Jahresregent in der Astrologie). Das Vollständige (Ganze) der Kunst der ebenen Darstellung (des Projizierens). Der Glanz des Geistes, über die Tafeln el-Battânîs. Die Fehler der Tafeln des Abû Ma'šar.

Nun folgen am Schlusse des Verzeichnisses seiner Werke noch eine Reihe von Abhandlungen, die andere Gelehrte in seinem Namen[1]) geschrieben haben, ich nenne hiervon die folgenden: Von Abû Naṣr Manṣûr b. 'Alî b. 'Irâq: Über die Ursache der Halbierung der Gleichung (*ta'dîl*) bei den Verfassern des *Sindhind*. Über die Verbesserung des Buches des Ibrâhîm b. Sinân über die Erklärung der Ungleichheiten der oberen Planeten (vergl. Art. 113 u. Note b). Abhandlung über die Verbesserung dessen, was von Abû Ğa'far el-Châzin in seinen Tafeln der Scheiben übersehen worden ist. Abhandlung über die Beweise zu dem Verfahren des Muh. b. el-Ṣabbâḥ für die Prüfung der Sonne (wahrscheinlich die Schrift „über das Verfahren zur Bestimmung des Mittags etc.", vergl. Art. 40). Abhandlung über den Beweis zu dem Verfahren des Ḥabaš bei (der Bestimmung) der Aufgänge der Azimute in seinen Tafeln. Über die Kenntnis der sphärischen Bögen auf anderem Wege als mittelst des zusammengesetzten Verhältnisses. Die Tafel der Minuten. Über eine zweifelhafte Stelle im 13. Buche des Euklides.[2]) — Von Abû Sahl 'Îsâ b. Jaḥjâ el-Masîḥî (vergl. Art. 180): Über die Prinzipien (Anfänge, Elemente) der Geometrie. Über die Ruhe der Erde oder ihre Bewegung. Über die Ursache der Altweiberkälte (*bard aijâm el-'ağûz*). — Die im Art. 218 zuletzt (p. 100) genannte Abhandlung „über die Regel de tri" (*fî râšikât el-hind*) ist im Verzeichnis seiner Werke erwähnt.

Zu Art. 219: In seinem Hauptwerk: *Liber completus in iudiciis astrorum* zitiert Abenragel zwei andere eigene Schriften, welche nicht mehr

1) Wie dies gemeint ist, verstehe ich nicht recht; wenn diese Gelehrten seine Schüler gewesen wären, so wäre die Sache verständlich, gerade der erstgenannte aber war el-Bîrûnîs Lehrer; er vergleicht diese Arbeiten im Gegensatz zu den eigenen (die er seine Kinder nennt) mit Adoptivkindern; wahrscheinlich wurden diese Arbeiten von den Betreffenden in seinem Auftrag oder auf seine Einladung hin verfaſst.

2) Was die zwei letzten Abhandlungen anbetrifft, so vergl. Art. 186, es heiſst daselbst, sie seien an el-Bîrûnî gerichtet gewesen, statt in seinem Auftrag oder auf seinen Wunsch verfaſst worden.



vorhanden zu sein scheinen: 1) *Liber signalium seu notarum;* 2) *Tabulae solvendi nodos et exponendi adspectus,* beide astrologischen Inhaltes (vergl. STEINSCHNEIDER, *Vite di matem. arab. di* B. BALDI, *con note*, p. 78 des „Estratto" v. J. 1873. — Das eben genannte Werk ABENRAGELS wurde von SALOMO DAVIN (B. DAVID?) ins Hebräische übersetzt, und existiert in Oxford (Reg. 12), Paris (1067) und Wien (187); ebenso von ISAAK ABÛ'L-CHAIR B. SAMUEL, in Oxford (URI 452); drittens von einem Anonymus, im Vatican (382). (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 578—80). — Von dem Stammesnamen EL-ŠEIBÂNÎ kommt wahrscheinlich der Zuname *el cano*, den ABENRAGEL in den *Libros del saber* (vergl. STEINSCHNEIDER, l. c. p. 75) trägt, indem die spanischen Übersetzer *el-šeibânî* von *šeib* = Greisenalter, Greis sein, grau sein, ableiteten, und deshalb durch *el cano* (= der Graue) übersetzten. (NALLINO.) Nach DOZY, *Suppl. aux dict. arab.* I, 808 heifst *el-šeibânî* selbst bei einigen Autoren *le grison, homme à cheveux gris.*

Zu Art. 255: Die spanische Übersetzung des Buches über die *Ṣafîḥa* befindet sich in den *Libros del saber* (Vol. III, p. 149—237); eine hebräische Übersetzung (vielleicht von JAKOB B. MACHIR existiert in Oxford (URI 440), München (36), Paris (1021, 1030, 1031, 1047) etc. (Vergl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 590—94.) — In demselben Bande, p. 272—284 befindet sich auch die Übersetzung einer Abhandlung des ZARQÂLÎ, betitelt: *de cuemo puede ell'ome fazer una lámina* (= *ṣafîḥa*, Scheibe) *para todas las planetas* (im Index heifst sie: *del trazado de una escala propia para construir una lámina universal que sirva para todos los planetas*); die Apogeen der Planeten sind darin für das Jahr 473 (1080/81) berechnet. (NALLINO.) — Zu Note d) p. 110: Diese lateinische Übersetzung ist vorhanden in Paris (7195, 9°).

Zu Art. 256: Statt „*Fîrah*" ist zu lesen „*Fijerroh*", vom spanischen „fierro" = „hierro" = Eisen; IBN CHALLIKÂN I, 423, Übers. II, 501 liest „*Fîrroh*". (NALLINO.)

Zu Art. 272: ABÛ'L-ṢALTS Schrift „über das Astrolabium" ist auch arabisch in hebräischer Schrift vorhanden in Paris (Hebr. 1101), nach STEINSCHNEIDER, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 364.

Zu Art. 276: Die Abhandlung *el-tabṣira* des CHARAQÎ befindet sich auch in Florenz (Laurenz. 293, jetzt 89) nach F. LASINIO, *Ricordi presi da cod. orient. della bibl. Med.-Laur. di Firenze*, in Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **26**, 1872, p. 806f. (NALLINO.) — Die Abhandlung *muntahâ el-idrâk* existiert auch in Florenz (Pal. 290) nicht ganz vollständig; es ist dies nicht, wie ASSEMANI angegeben, die *nihâjet el-idrâk* des

Maḥmûd el-Šîrâzî (s. Art. 387; es ist also hier die Angabe „Florenz (Pal. 290) unvollständig" zu streichen). (Nallino.) — In Note c) ist nach „Oxford" einzuschalten: „und Florenz".

Zu Art. 284: Ğâbir b. Aflaḥs „Astronomie" existiert auch in hebräischer Übersetzung durch Moses b. Tibbon in Oxford (Bodl. Opp. Add. 17, Neub. 2011), und in einer zweiten des Jakob b. Machir, verbessert von Samuel b. Jehuda, in Paris (1014, 1024, 1025, 1036), nach Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 544.

Zu Art. 292: Statt „Halbinsel *Šuqar*" lies „*ğezîrat šuqar*". (Nallino.)

Zu Art. 300, Note d): Nach „Moṣul" ist hinzuzufügen: „das heutige Eskî Moṣul." (Nallino).

Zu Art. 315: Die hebräische Übersetzung des Auszuges aus dem Almagest von Ibn Rošd befindet sich aufser in Paris (903) noch ibid. (696 u. 1018), ebenso in Berlin (Cat. v. Steinschneider 1197 fol.), München (Cat. v. Steinschneider 31), Wien (175), Oxford (Bodl. Mich. 45, Opp. Add. fol. 17) etc., nach Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 546—547.

Zu Art. 320: Bei den Fundorten der *Arğûza* ist noch hinzuzufügen: Konstant. (2761, 2⁰).

Zu Art. 325: Die hebräische Übersetzung der „Astronomie" des Beṭrûğî befindet sich in München (Cat. Steinschneider 150), Paris (1288), Oxford (Bodl. Mich. 386) etc., nach Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 550—51.

Zu Art. 327: Moses b. Meimûn schrieb 1158 eine kleine Abhandlung in arab. Sprache über den jüdischen Kalender; sie befindet sich in hebr. Übersetzung in Paris (1058 u. 1061). (Vergl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 599.)

Zu Art. 334: Statt el-Salamì ist zu lesen el-Solamî, d. h. der zum Stamme Soleim gehörende. (Carra de Vaux.)

Zu Art. 336: Statt Muḥabb ed-dîn ist zu lesen Muḥibb ed-dîn. (Nallino.)

Zu Art. 341: Das Werk *Šems el-maʿârif* etc. ist lithographisch herausgegeben worden in Kairo, 1291 (1874), und Bombay 1296 u. 1298 (1879 u. 1881). (Nallino.)

Zu Art. 343: Der Name „el-Melik el-Fâ'iz", zu dem ich ein (?) gesetzt habe, ist richtig (vergl. Ibn Challikân I. 60, Übers. I. 168 u. II. 50, Übers. III. 240 u. 41); daher fällt p. 137 die Note a) weg.

Zu Art. 345: Dieser Theodorus von Antiochia ist sehr wahrscheinlich der bei Leonardo von Pisa (*Scritti*, II. p. 247—252; Cantor, *Vorl.* II[1], p. 45) genannte Meister Theodor; die Aufgaben, deren Lösung er von Leonardo verlangte (vergl. Cantor, ibid. p. 42 u. 45—47), hatte er jedenfalls von seinem Lehrer Kemâl ed-dîn b. Jûnis (s. Art. 354).

Zu Art. 349 u. Anmerkung 72: Die *nihâjet el-idrâk* des Muh. b. Abî Bekr el-Fârisî befindet sich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph). (Nallino.) — Die *maʿârîǧ* (nicht *maʿâriǧ*, wie das Ms. von Kairo hat) existiert auch arabisch in hebräischer Schrift in Berlin (Hebr. 682 Qu.) und im Brit. Mus. (Hebr. 4104), nach Steinschneider, Zeitschrift d. deutschen morgenl. Gesellsch. **47**, 1893, p. 355 u. 56. Nach den Auszügen, die Steinschneider hier aus dieser Schrift giebt, kann dieselbe nicht wohl vor 634 Jezd. = 1266 n. Chr. verfaſst worden sein; also sind die nach den Kairenser Mss. der *nihâjet* und nach Haǧî Chalfa von mir gemachten Zeitangaben 606 u. 629 d. H. nicht richtig, diese fehlerhaften Zahlen können leicht aus 665 u. 669 (1267 u. 1270/71) entstanden sein, welche besser stimmen würden; es fällt somit auch meine in Anmerkung 72 gemachte Vermutung weg, der Fürst, dem beide genannten Werke gewidmet sind, sei nicht der Melik el-Moẓaffar Jûsuf b. ʿOmar, der Fürst von Jemen, sondern der Melik el-Moẓaffar b. el-Melik el-Manṣûr, Herr von Ḥamât.

Zu Art. 358: Der Globus des Qaiṣar b. Abî'l-Qâsim existierte 1809 noch in der Sammlung des Kardinals Borgia zu Velletri; er ist beschrieben worden von S. Assemani (*Globus coelestis cufico-arabicus Veliterni Musei Borgiani*, Patavii 1790). Ob dies der ursprüngliche i. J. 622 (1225) konstruierte Globus, oder ein nachgemachtes Exemplar sei, können wir nicht entscheiden. (Vergl. L. Ideler, *Untersuch. über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809, p. LVIII.)

Zu Art. 366: Hier ist vielleicht der Plural *„el-ḥossâb“* (die Rechner) der Singularform *„el-ḥassâb“* vorzuziehen; dasselbe gilt auch für das gleiche Wort in Art. 464, und für *„el-noẓẓâr“* (die Beobachtenden) statt *„el-naẓẓâr“* in Art. 444 (p. 182) u. 468. (Nallino.)

Zu Art. 368: Naṣîr ed-dîns Werk Nr. 1 (*el-taḏkira*) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 187), unvollständig, dagegen ist der Fundort „Florenz (Pal. 277)“ zu streichen, hier befindet sich bloſs die Rezension der Elemente Euklids (vergl. p. 151, wo Z. 16 v. o. das „vielleicht“ zu streichen ist); ebenso ist es vorhanden im Vatican (319); Hr. Nallino, dem ich diese Angaben verdanke, fand auch im Kommentar des Qâḍîzâdeh zur *Taḏkira* des Naṣîr ed-dîn (Ms. 311 der Bibl. Laur. zu Florenz, fol. 39 v.) eine Stelle, aus der sich ergiebt, daſs die *Taḏkira* in zwei Ausgaben erschienen ist. Die persische Übersetzung dieses Werkes (betitelt: *risâle-i moʿînîje*) befindet sich auch in Konstant. (2670, 1⁰ u. 4844), und ebenda (4853, 23⁰ u. 2670, 2⁰) ein Kommentar dazu von ungenanntem Verfasser. — Nr. 2 (*risâle-i bîst bâb*) existiert auch in Konstant. (2624, 1⁰ u. 2701, 3⁰); ein anonymer Kommentar dazu ist in Florenz,

Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 29,4⁰ = ASSEMANI 318), es ist also p. 149, Z. 16 v. o. die Angabe „Florenz (Pal. 318)“ in diesem Sinne zu verbessern. — Nr. 3 (*kitâb-i sî faṣl*) ist ebenfalls in Konstant. (2617, 2⁰, 2621,2⁰ u. 2701, 2⁰), ebenso im Vatican (nach HORN, *Aus italien. Biblioth.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **51**, 1897, p. 30, Nr. 70), und auch in Florenz, Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 26 u. 27 = ASSEMANI 295 u. 310); am letzteren Orte (*Cat. d'Italia*, Nr. 29, 1⁰ = ASSEMANI 318) befindet sich auch der Kommentar zu diesem Werke von BEDR EL-ṬABARÎ; alle genannten Mss. persisch. — Nr. 4 (die Îlchânischen Tafeln) ist auch vorhanden im Vatican (nach HORN, *Aus italien. Biblioth.*, l. c. p. 15, Nr. 31), ebenso in Konstant. (3605), an beiden Orten persisch. — Nr. 12 (*zubdet el-hei'a*) befindet sich auch in Konstant. (2670, 3⁰). — Als weitere Schrift NAṢÎR ED-DÎNS ist noch anzuführen: 19. *Nuzhet el-naẓîr* (sollte wohl heiſsen: *nâẓir*) = die Unterhaltung des Betrachtenden, über den Gebrauch des Sinusquadranten, in Konstant. (2621, 3⁰). — Von seinen Bearbeitungen (Rezensionen) befindet sich diejenige des Almagestes auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 188). — Der Sohn des p. 147 als Mitarbeiter NAṢÎR ED-DÎNS genannten MU'JID ED-DÎN EL-ʿORḌÎ, MUH. B. MU'JID ED-DÎN EL-ʿORḌÎ, hat einen Himmelsglobus konstruiert, der sich noch (ob im Original oder als Kopie ist unentschieden) in dem mathematischen Salon zu Dresden befindet; er wurde beschrieben von G. W. S. BEIGEL (Astronom. Jahrbuch v. BODE u. ENCKE, 1808, p. 97 ff.); als Jahr der Konstruktion ist angegeben 688 (1289). (Vergl. auch L. IDELER, *Untersuch. über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809, p. LIX.)

Zu Art. 369: Das Zitat zu BROCKELMANN muſs heiſsen I, 474 statt II, 474. (NALLINO.)

Zu Art. 375: Das syrische Werk des BAR-HEBRÄUS „das Aufsteigen des Geistes etc.“ ist jetzt gedruckt: *Le livre de l'ascension de l'esprit sur la forme du ciel et de la terre*, publié par F. NAU; I. Partie: texte syriaque, Paris 1899 (Bibliothèque de l'école des hautes études, fasc. **121**); II. Partie: traduction française, Paris 1900 (ibid. fasc. $\mathbf{121}_2$) (NALLINO.)

Zu Art. 376: „Zeitrechnung der Chinesen (?) und Uiguren“; das Fragezeichen ist zu streichen, *el-chiṭâ'* bedeutet wirklich die Chinesen (vergl. auch *Prolégom. des tables astron.* d'OLOUG-BEG, publié par L. A. SÉDILLOT, Texte pers. p. 30—53, Trad. p. 32—61). (NALLINO.)

Zu Art. 382: Die „Fundamentalsätze“ des ŠEMS ED-DÎN EL-SAMARQANDÎ befinden sich auch in Konstant. (2712, 1⁰).

Zu Art. 387: Über *nihâjet el-idrâk* des QOṬB ED-DÎN EL-ŠÎRÂZÎ vergl.: „Zu Art. 276.“ — Die *durret el-tâğ* (Encyklopädie) befindet sich auch persisch in Florenz, Laur. (*Cat. d'Italia*, Nr. 28 = ASSEMANI 315), unvoll-

ständig, nur das 2. Kapitel des IV. Teils enthaltend, und in Konstant. (2405). — Die *ichtijârât-i mozaffarî* handeln nicht über „Tagewählerei“, wie ich p. 159 nach dem arabischen Sprachgebrauch übersetzt habe, sondern sind ein in persischer Sprache verfaßtes Kompendium seines Werkes *nihâjet el-idrâk*; *ichtijârât-i mozaffarî* ist also hier zu übersetzen mit „die dem MOZAFFAR gewidmeten Auszüge oder Auswahlen“; dieselben befinden sich auch in St. Petersb. Inst. P. (Nr. 124), V. ROSEN giebt in seinem Katalog (p. 300—317) davon eine längere Beschreibung. (NALLINO.) — Nach HORN (*Pers. Handschr. in Konstant.*, Zeitschr. d. deutschen morgenl. Gesellsch. **54**, 1900, p. 319, Nr. 440) machte EL-ŠÎRÂZÎ auch eine persische Übersetzung der Rezension der Elemente des EUKLIDES durch NAṢÎR ED-DÎN, dieselbe befindet sich in der Bibliothek der *jeñi ǧâmiʿ* (Nr. 796.)

Zu Art. 394: Nach ERSCH und GRUBER, Encyklop. II. Ser. 31. Bd. p. 57 soll ʿOMAR B. EL-MELIK EL-MOZAFFAR JÛSUF nach einer Regierung von 20 Monaten i. J. 696 (1296/97) gestorben sein (der Artikel ist von STEINSCHNEIDER verfaßt, es fehlt die Quellenangabe für dieses Datum).

Zu Art. 395: Der Kommentar zur *taḏkira* des NAṢÎR ED-DÎN von NÎSÂBÛRÎ ist auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph) vorhanden. (NALLINO.)

Zu Art. 397 u. Anmerkung 80: Es ist vielleicht das in Konstant. (2694) sich befindende persische Werk, betitelt: *zîǧ šems el-munaǧǧim* (= Tafeln des ŠEMS (ED-DÎN) des Astronomen), identisch mit dem ins Griechische übersetzten astronomischen Werke des ŠEMS ED-DÎN EL-BOCHÂRÎ, allerdings wird im Katalog von Konstant. als genauerer Name des Verfassers der *zîǧ* angegeben: MUH. B. ʿALÎ CHÔǦA ŠEMS EL-MUNAǦǦIM. — Der Kommentar zur *hidâjet el-ḥikme* des AṮÎR ED-DÎN EL-ABAHRÎ befindet sich im Ind. Off. (493, 584, 2⁰ u. 592, 2⁰). — In Anmerkung 80, p. 220 ist die Jahreszahl 1320 zu verbessern in 1300.

Zu Art. 403: Der *Mulachchaṣ* des ǦAĠMÎNÎ befindet sich auch in Konstant. (2592), in persischer Übersetzung des MUH. B. ʿOMAR ASDÂFÂNÎ (?).

Zu Art. 416: Die „Astronomischen Tafeln“ des IBN EL-ŠÂṬIR sind auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 189) vorhanden, ebenda (Nr. 190, 1⁰) befindet sich auch eine Abhandlung desselben Autors über das von ihm erfundene „umfassende Instrument“, betitelt: *el-ašiʿʿa el-lâmiʿa fî'l-ʿamal bi'l-âla el-ǧâmiʿa* (die glänzenden Strahlen, über den Gebrauch des umfassenden Instrumentes).

Zu Art. 421: Die Schrift *el-durr el-manṯûr* kommt auch in Turin (64, 13⁰) vor.

Zu Art. 422: Der Kommentar zur *Arǧûza* des ʿAlî b. Abî'l-Riǧâl von Aḥmed b. el-Qonfûd ist wahrscheinlich auch in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph), der Name des Kommentators ist allerdings nicht angegeben. (Nallino.)

Zu Art. 423: Die *wasîle* des Ibn el-Hâ'im befindet sich auch in Florenz (Laur. 317), nach *Cat. d'Italia*, p. 293; es ist dies also nicht die Abhandlung über die Rechenkunst von Abû Manṣûr el-Ṭûsî, wie S. Assemani angegeben hat, vergl. Art. 507; wie es sich mit der in diesem Art. genannten Abhandlung über die Algebra verhält, die ebenfalls von Abû Manṣûr el-Ṭûsî sein soll, weiſs ich nicht. (Nallino.)

Zu Art. 430: Die Lebensbeschreibung des Euklides von Qâḍîzâdeh, die sich in Florenz (Pal. 280) befinden soll, ist wahrscheinlich nichts anderes als die biographische Notiz über Euklides, die sich im Kommentar zu den „Fundamentalsätzen" des Samarqandî (s. Art. 382) von Qâḍîzâdeh befindet, und von Haǧî Chalfa (I. p. 380 ff.) und anderen zitiert worden ist. (Vergl. auch Heiberg, *Litterargesch: Studien über Euklid*, p. 1 ff.) — Der Kommentar des Qâḍîzâdeh zum *Mulachchaṣ* des Ǧaġmînî befindet sich auch in Bologna (Bibl. dell' Univers.: Rosen, *Remarques sur les mss. orient. de la collect. Marsigli à Bologne;* Roma, Accad. dei Lincei, Memorie **12**$_3$, 1884, Nr. 423). (Nallino.)

Zu Art. 432: Das Werk Nr. 1 (*iršâd el-ḥâ'ir*) des Ibn el-Meǧdî ist auch vorhanden in Konstant. (2673,3^0). — Nr. 13 (*cholâṣat el-aqwâl*) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 190,2^0). — Zu Note a): Die „Einleitung in die Astrologie" des ʿAlî b. Aḥmed el-Balchî kommt auch in Konstant. (2702) vor; hier hat der Verfasser noch die Kunje „Abû'l-Qâsim."

Zu Art. 433: Die Schrift *miftâḥ-i kunûz* des Chalîl b. Ibrâhîm befindet sich auch in Paris (Pers. Nr. 168.)

Zu Art. 437: ʿIzz ed-dîn el-Wefâ'î schrieb zwei verschiedene Werke über den Gebrauch des Muqanṭarâtquadranten, das eine betitelt *el-nuǧûm el-zâhirât* (dies ist das von mir angeführte, die Angaben von Kairo sind zu verbessern in 276, 304 u. 325); das andere betitelt *qoṭb* (auch *qoṭf*) *el-zâhirât*, in Kairo (267) und Turin (64,8^0); das Ms. Kairo (260) ist identisch mit Berlin (5851), wo es dem Sibṭ el-Mâridînî zugeschrieben wird; überhaupt mögen öfters Verwechselungen zwischen diesen Werken ʿIzz ed-dîns und den fast gleichbetitelten des Mâridînî vorgekommen sein (s. Art. 445, Nr. 7 u. 8). — Bei der Abhandlung *nuzhet el-naẓar* ist nach Leiden (1125) zu ergänzen: Berlin (5824). — Am Schlusse sind noch folgende zwei Werke dieses Autors hinzuzufügen: *naẓm el-ʿoqûd fî ʿamal el-sâʿât ʿalâ'l-ʿamûd* (die Ordnung (der Perlen) der Halsbänder, über den

Gebrauch der Stunden (oder Zeiten) auf der Säule (?)), in Kairo (296). *Fâ'ide fî ḥisâb el-munḥarafât* (Nutzanwendung über die Berechnung der Abweichungen (d. i. der Richtungen der Qible vom Meridian)), in Gotha (1381,3⁰). (Nach BROCKELMANN, *Gesch. d. arab. Litteratur*, II, 129.)

Zu Art. 438: Die *Muḥammedîje* EL-QÛŠĞÎS befindet sich auch in Konstant. (2733,2⁰), arabisch; die *Fatḥîje* ebenda (2733,1⁰), arabisch. — Die Tafeln ULÛĠ BEGS mit den „Prolegomena" existieren auch in St. Petersb. Inst. P. (Nr. 125.)

Zu Art. 443: JÛSUF B. CHIḌRBEGS Biographie giebt auch ṬÂŠKÖPRIZÂDEH I, p. 194, und zwar etwas anders und ausführlicher als HAMMER; so war er vor seinem Wezirat schon Lehrer in Adrianopel, fiel als Wezir MUḤAMMEDS II. bei ihm in Ungnade, wurde aber von seinem Nachfolger BÂJEZÎD II. wieder zu Ehren gezogen und zuerst zum Lehrer an der Medrise in Adrianopel, dann zum Statthalter von Gallipoli ernannt; als Todesjahr wird ebenfalls 891 (1486) genannt.

Zu Art. 444: EL-QALAṢÂDÎS Werk Nr. 3 (*kašf el-asrâr* etc.) befindet sich auch in St. Petersb. Inst. A. (Nr. 193), und ebenso in Florenz Bibliot. nazion. (*Cat. d'Italia*, p. 292, Nr. 79.) Für diese Schrift ist auch zu verweisen auf ENESTRÖM, *Sur une formule d'approximation des racines carrées donnée* par ALKALSADI, in der Biblioth. Mathem. 1886, p. 236—39. (NALLINO.) — In Note b) p. 181 sind die Worte: „Also nicht EL-FAḌL B. ḤÂTIM EL-NAIRÎZÎ, wie WÜSTENFELD . . . . . vermutet hat" zu streichen. — P. 182, Z. 5 v. o. soll es heifsen: 1315 (1897/98) statt 1310 (1892/93). (NALLINO.) — Das Werk Nr. 9 (das Ganze der Erbteilung und Kommentar dazu) ist wahrscheinlich vorhanden in Madrid (340).

Zu Art. 445: SIBṬ EL-MÂRIDÎNÎS Schrift Nr. 1 (*risâle fî'l-ʿamal bi'l-rubʿ el-muǧaijib*) befindet sich auch in Turin (64,4⁰) und in Beirût (Biblioth. der kathol. Univers. St. Joseph); diese Abhandlung wurde gedruckt in Kairo 1309 (1891/92), am Rande von *el-ǧewâhir el-naqîje fî'l-aʿmâl el-ǧaibîje* (die feinen Juwelen, über die Sinusoperationen) des AḤMED EL-CHAṬÎB EL-ǦÂWÎ. (NALLINO.) — Zu der Schrift Nr. 2 (*raqâ'iq el-ḥaqâ'iq*) ist zu bemerken: Aus dem Pariser Ms. 2541 veröffentlichte WOEPCKE den Anfang dieser Abhandlung in französischer Übersetzung (*Mémoire sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident*, p. 54, 66 ff.), ebenso CARRA DE VAUX eine Stelle über periodische Sexagesimalbrüche und die Siebner- und Achterprobe bei solchen (Biblioth. Mathem. **13**, 1899, p. 33—36). — Nr. 10 (Dritte Abhandlung über den Muqanṭarâtquadranten) befindet sich auch in Madrid (231,1⁰). — Nr. 12 (*kifâjet el-qanûʿ*) ist auch vorhanden in Beirût (l. c.) (NALLINO.)

Zu Art. 447 u. 453: *El-qabbân* ist nicht die gewöhnliche gleicharmige

Wage, sondern die ungleicharmige Schnellwage, wie auch *el-qarasṭûn* (Art. 66, p. 37, und Art. 43, p. 20—21). (Nallino.)

Zu Art. 454: *El-durr el-naẓîm,* mit Tafeln aus den Ulûġ Beg'schen ausgezogen, befindet sich auch in Paris (2496,2°), wahrscheinlich nur die Tafeln.

Zu Art. 456: Barǧendîs Abhandlung *risâle-i hei'at* ist sehr wahrscheinlich ein Kommentar zur *tadkira* des Naṣîr ed-dîn (vergl. *Diction. of the techn. terms,* by Sprenger etc.; Art. *chaṭṭ niṣf el-nahâr*).

Zu Art. 457: Als weitere Schrift Mîram Čelebîs ist noch anzuführen: *risâle fî aḥkâm el-ṭâli'* (Abhandlung über die Urteile nach dem Aszendenten), persisch vorhanden in Berlin P. (339).

Zu Art. 460: Statt *afaqîje* ist zu lesen *âfâqîje.*

Zu Art. 469: Das Kartenwerk des 'Alî b. Aḥmed el-Šarqî soll bloſs ein Steuermannsbuch sein, es verzeichnet nur die Meeresküsten und die Häfen an denselben. (Nallino.)

Zu Art. 470: Der Kommentar zum Sinusquadranten des Sibṭ el-Mâridînî von Aḥmed b. Aḥmed b. 'Abdelḥaqq el-Sunbâṭî befindet sich auch in Turin (64,3°).

Zu Art. 471: *Fî 'ilm el-binkâmât* habe ich einfach mit „über die Uhrmacherkunst" übersetzt; *binkâmât* sind aber insbesondere Wasser- und Sanduhren. (Nallino.)

Zu Art. 478: Von 'Omar b. Muh. el-Fâriskûrî befindet sich auch eine Biographie bei el-Muḥibbî (*cholâṣat el-aṯar fî a'jân el-qarn el-ḥâdî 'ašar* = Auszug der Denkwürdigkeiten über die Vornehmen (Gelehrten) des 11. Jahrh. d. H.), Kairo 1284 (1867/68), Vol. III. p. 221—23, wo als Todestag der 17. Šauwâl d. J. 1018 (Januar 1610) und als Todesort Damiette angegeben ist. (Nallino.)

Zu Art. 479: *Ǧedâwil ichtilâf manẓar el-qamar* etc. ist zu übersetzen: Tafeln der Parallaxe des Mondes in Länge und Breite, d. h. der Wirkung der Mond-Parallaxe auf die scheinbare Stellung des Mondes in Bezug auf Länge und Breite. Auch von diesem Autor ('Abdelqâdir el-Faijûmî) hat el-Muḥibbî (l. c. II. 456—57) eine Biographie. (Nallino.)

Zu Art. 480: Nach Nallino ist nicht *'Âmilî* die richtige Lesart, sondern *'Âmulî,* von *'Âmul,* einer Stadt in Syrien, die nicht zu verwechseln ist mit *Âmul* in Persien. Eine längere Biographie Behâ ed-dîns befindet sich auch bei el-Muḥibbî (l. c. III. 440—50); hier werden auſser den von mir angeführten Schriften noch genannt: *el-mulachchaṣ fî'l-hei'a* (Kompendium der Astronomie); *el-risâle el-hilâlîje* (die Abhandlung über die Neumonde). (Nallino.) — Nach dem *kitâb iktifâ' el-qanû' bi-mâ huwa maṭbû'* (= das Buch der Genügsamkeit des sich mit dem was gedruckt

ist Zufriedengebenden) von E. VAN DYK, Kairo 1896, p. 241, wurde auch die Schrift *tašrîḥ el-aflâk* lithographiert herausgegeben in Luknow (Jahreszahl fehlt) mit Kommentaren.

Zu Art. 495: Das Ms. 1489 in Gotha wurde eingehend besprochen von H. SUTER in der Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, p. 12—40.

Zu Art. 501[a]: Ich finde nachträglich, daſs bei IBN JÛNIS (Notices et extr. des mss. VII, p. 168) ein SAʿÎD B. CHAFÎF EL-SAMARQANDÎ erwähnt ist, der eine Beobachtung von ABÛ'L-QÂSIM B. AMÂǦÛR zitiert; dieser SAʿÎD muſs also zwischen 900 und 1000 n. Chr. gelebt haben; ich hatte ihn unter die Autoren des 14. Jahrh. versetzt, weil das Pariser Ms. 2506 nach DE SLANE aus diesem Jahrhundert stammen und eine Autographie sein soll, doch wird dies bloſs als eine Vermutung hingestellt.

Zu Art. 507: Vergl. „Zu Art. 423."

Zu Art. 508: NALLINO hält SARRÂǦ für die richtige Lesart, nicht SIRÂǦ.

Zu Art. 512: Der Kommentar zum Sinusquadranten des SIBṬ EL-MÂRIDÎNÎ von ʿABDERRAḤMÂN B. MUH. EL-TÂǦÛRÎ befindet sich auch in Turin (64,12⁰).

Zu Art. 517: Ich habe hier die Vermutung ausgesprochen, daſs MUH. B. MUH. EL-BAǦDÂDÎ identisch sein könnte mit dem Bearbeiter des EUKLIDischen Buches „über die Teilung der Flächen", mit MUHAMMED BAGDADINUS; ich füge noch weiter hinzu, daſs IBN EL-QIFTÎ (bei CASIRI I, 342) als Kommentator des 10. Buches des EUKLIDES einen ABÛ MUH. B. ʿABDELBÂQÎ EL-BAǦDÂDÎ nennt, der in seinem Kommentar Zahlenbeispiele zu den Sätzen jenes Buches gegeben habe; IBN EL-QIFTÎ besaſs ein vom Verfasser selbst geschriebenes Ms. dieses Kommentars.

Zu Art. 528: Schriften über den gleichen Gegenstand (Finger- oder Handrechnen) verfaſsten auch ŠEMS ED-DÎN ABÛ ʿABDALLÂH MUH. B. AḤMED EL-MAUṢILÎ (d. h. v. Moṣul), arabisch in Gedichtform, und ŠARAF ED-DÎN ʿALÎ JEZDÎ, persisch; die erstere wurde nebst einem ähnlichen Traktat eines Spaniers JUAN PEREZ DE MOYA übersetzt von A. MARRE im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **1**, 1868, p. 309—318, der arabische Text befindet sich im Pariser Ms. 4441, das einen sog. Führer für Sekretäre, die Elemente der Arithmetik, Geometrie, Feldmeſskunde, des Steuerwesens etc. umfassend, enthält, und i. J. 979 (1571/72) geschrieben worden ist; es giebt ganz kurz die Darstellung der Einer, Zehner, Hunderter u. s. f. bis auf Zehntausend durch die Finger beider Hände; die zweite persische Abhandlung wurde mehrfach herausgegeben und übersetzt, zuletzt von ST. GUYARD im Journal asiat. $\mathbf{18}_6$, 1871, p. 106 ff.

Zu Anmerkung 5[a]: Vergl. „Zu Art. 19."

Zu Anmerkung 6: Über diese arabische Gradmessung vergl. auch Nallino, *Il valore metrico del grado di meridiano secondo i geografi arabi*, Firenze, Torino, Roma 1893: Estratto dal Cosmos di Guido Cora **11**, 1892—93, fasc. I.—IV. — Der Ort *Wamia* (der eine Endpunkt der Mâmûnischen Gradmessung) ist schwerlich *Apamea*, sondern wahrscheinlich *Wâsiṭ* bei *Raqqa*. Statt Baḥtarî ist eher zu lesen Boḥtorî (vergl. die eben genannte Abhandlung p. 13, 18 u. 19).

Zu Anmerkung 8: Hier ist Zeile 4 v. o. zu lesen 857/58, statt 857/60.

Zu Anmerkung 30: Vergl. „Zu Art. 138."

Zu Anmerkung 43: Die spanische Übersetzung der Abhandlung ʿAlî b. Chalafs befindet sich gedruckt in den *Libros del saber de astronomia* (Madrid 1863—67), Vol. III, p. 11—132: *De cuemo se deue obrar con la lámina* (= *ṣafîḥa*) *universal.* (Nallino.)

Zu Anmerkung 46: Das Zitat zu Steinschneider (*Vite di matem. arabi di* B. Baldi etc., p. 76) bezieht sich auf den „Estratto" (aus dem Bullett. di bibliogr. d. sc. matem.) vom Jahre 1873 in 108 Seiten; es giebt aber noch einen andern vom Jahre 1874 in 100 Seiten; mir war nur der erste bekannt, deshalb ist mir auch die Korrektur Amaris, betreffend die Prophezeiung über die Dauer der Regierungszeit des Emirs von Sicilien, Aḥmed b. el-Ḥasan b. Abî'l-Ḥosein entgangen. (Nallino.)

Zu Anmerkung 60: Hier ist p. 217, Z. 4 v. o. zu lesen *mašjacha* nicht *mašîcha*. (Nallino.)

Zu Anmerkung 68: Der lateinische Text der von Munk zitierten Stelle befindet sich in der Venediger Ausgabe der Astronomie des Alpetragius v. J. 1531, fol. 4r. (Nallino.)

Zu Anmerkung 80: Vergl. „Zu Art. 397."

P. 237, nach Z. 27 v. o. ist einzuschalten: ʿAlî b. Sahl s. abû'l-Ḥasan ʿAlî b. Sahl.

P. 251, Z. 21 v. o. ist zu lesen 17 statt 16.

P. 257, Z. 18 v. u. ist zu streichen: ʿOmar b. Muh. b. Châlid.

Als neue Artikel sind einzuschalten:

373a. Zakarîjâ b. Muh. b. Maḥmûd, Abû Jaḥjâ (auch Abû Muh. und Abû ʿAbdallâh) el-Qazwînî, aus Qazwîn in Persien gebürtig, ein gelehrter Imâm und Jurist, daneben auch bewandert in Geographie, Naturgeschichte und Astronomie, Schüler von Aṯîr ed-dîn el-Abahrî (s. Art. 364); er war auch Qâḍî von Wâsiṭ und Ḥilla, und starb im Muḥarrem 682 (April 1283). (Silv. de Sacy, *Chréstom. arabe*, 1. Edit. T. III, p. 505). Ich nenne ihn hier nur, weil er in seinem Werke, betitelt: *kitâb ʿaǧâ'ib el-machlûqât* etc. (das Buch der Wunder der Schöpfung etc.) eine Beschreibung der Sternbilder und der Mondstationen gegeben hat, die von

L. IDELER arabisch mit deutscher Übersetzung und reichhaltigem Kommentar herausgegeben worden ist: *Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen*, Berlin 1809; das ganze Buch wurde arabisch herausgegeben von F. WÜSTENFELD: ZAKARIJA B. MUH. B. MAHMUD EL-CAZWINIS Kosmographie. Erster Teil: *kitâb ʿağâ'ib el-machlûqât*, die Wunder der Schöpfung. Göttingen, 1849. (Zweiter Teil: *kitâb âṯâr el-bilâd*, die Denkmäler der Länder. Göttingen, 1848); den ersten Teil bis auf p. 208 der Textausgabe veröffentlichte auch in deutscher Übersetzung H. ETHÉ, 1868; p. 208—245 ebenfalls in deutscher Übersetzung J. RUSKA: *Das Steinbuch aus der Kosmographie des ZAKARIJA B. MUHAMMED, übersetzt und mit Anmerkungen versehen*, (Beilage zum Jahresber. 1895/96 der prov. Oberrealschule Heidelberg.) Das Werk EL-QAZWÎNÎS (I. Teil) existiert noch arabisch in drei von einander verschiedenen Ausgaben und zwar: in Berlin (6161 u. 62, unter letzter Nummer in zwei unvollständigen Exempl.); Gotha (1. Ausg. 1503—05; 2. Ausg. 1506 u. 07; 3. Ausg. 1508); Wien (1435—37); in pers. Übers. betitelt *tuhfet el-ġarâ'ib* (Geschenk der Seltenheiten) ibid. (1438 u. 39), hier heiſst der Verfasser auch noch EL-KAMÛNÎ (?); in türk. Übers. von EIJÛB B. CHALÎL, vollendet 977 (1570) in Magnesia und gewidmet dem Sultan MURÂD III., ibid. (1440); Paris (2173—78, Teile davon 2179 u. 80 und 2918,11⁰, Kompendien des Werkes von ungenannten Verfassern [vielleicht 1. Ausg.?] 2182 u. 83, 2419,3⁰); pers. ibid. (Nr. 141 u. 142); Leiden (726, arab. und pers.); Oxford (I, 460 u. 890, II, 267); Brit. Mus. P. (Or. 373, 1371, 1621; Addend. 5603, 7706, 16738—40, 23564), das Ms. 1621 übersetzt i. J. 954 (1547) für IBRÂHÎM ʿÂDIL ŠÂH; Ind. Off. (723—25); München (463—66); Florenz (Laur. 107); Konstant. (2935—39); Kairo (85); u. a. a. O. Eine pers. Übers. erschien lithographiert in Lucknow, 1283 (1866/67), eine andere in Teherân 1264 (1848).

433ᵃ. ʿABDELĠANÎ B. ḤOSÂM ED-DÎN AḤMED, bekannt unter dem Namen IBN EL-ʿARABÂNÎ (?) EL-MIṢRÎ, lebte wahrscheinlich in Agypten und starb 854 (1450). (Vergl. Cat. v. Algier, p. 428 und BROCKELMANN, *Gesch. d. arab. Litt.* II, 128). Er schrieb: *Ġarâ'ib el-funûn we mulaḥ el-ʿujûn* (Seltenheiten der Wissenschaften und Ergötzlichkeiten der Augen), eine elementare Astronomie, in Algier (1554), unvollständig.

466ᵃ. ʿABDERRAḤMÂN B. MUH. EL-ACHḌARÎ schrieb i. J. 939 (1532/33) im Alter von 20 Jahren eine *Arǧûza*, betitelt *el-sirâǧ fîʿilm el-falak* (die Leuchte zur Wissenschaft der Sphäre), noch vorhanden in Algier (1451) mit Kommentar von einem Ungenannten; sie wurde veröffentlicht mit dem Kommentar des SAḤNÛN B. ʿOṮMÂN B. SOLEIMÂN B. AḤMED B. ABÎ BEKR EL-MEIDAWÎ EL-WÂNŠARÎŠÎ (d. h. aus Wânšarîš, franz. Ouarsenis, in Algier), in Kairo 1314 (1896/97). (NALLINO.) — Ebenso schrieb er eine *Arǧûza*

über Arithmetik und Erbteilung, betitelt *el-durra el-baiḍâ' fî aḥsan el-funûn we'l-ašjâ'* (die glänzende Perle über die schönste (beste) der Disziplinen und Gegenstände), in Algier (399,6⁰), nur der Teil über die Arithmetik. (Vergl. auch Hağî Chalfa III, 200, wo der Verfasser nur genannt ist ʿAbderraḥmân el-Maġrebî.)

474a. Jaḥjâ b. Muh. b. Muh. b. ʿAbderraḥmân el-Ḥaṭṭâb (der Holzhauer oder Holzhändler) el-Roʿainî el-Mekkî (d. h. aus Mekka), gestorben wahrscheinlich gegen das Jahr 1000 (1591/92)[1], schrieb: *Wasîle el-ṭullâb* (Der Weg der Studierenden) zur Kenntnis der Verrichtungen des Tages und der Nacht auf dem Wege der Rechnung, abgekürzt aus der Abhandlung seines Vaters „Ausrechnung der Tag- und Nachtzeiten, hauptsächlich zu Gebetszwecken", in Berlin (5700). Die Abhandlung des Vaters ist wahrscheinlich noch vorhanden in Beirût (Bibl. der kathol. Univers. St. Joseph): *Risâle fî maʿrifet istichrâğ auqât el-ṣalât* (Abhandlung über die Kenntnis der Auffindung der Gebetszeiten), von Muh. b. Muh. b. ʿAbderraḥmân b. Ḥasan el-Ḥaṭṭâb el-Roʿainî el-Mâlikî; das Ms. wurde i. J. 931 (1524/25) abgeschrieben. (Nallino.) — Ferner schrieb er: *Fî maʿrifet istichrâğ aʿmâl el-leil we'l-nahâr* etc. (Über die Kenntnis der Auffindung der Verrichtungen des Tages und der Nacht mit dem Sinusquadranten, in Berlin (5826); *Mochtaṣar fîʿilm el-ḥisâb*, Auszug aus der *nuzhet el-ḥossâb* des Ibn el-Hâ'im (s. Art. 423), in Berlin (5983).[2])

479a. ʿAlî b. Welî b. Ḥamza, aus dem Westen stammend, schrieb i. J. 999 (1590/91) in Mekka ein arithmetisches Werk, betitelt: *tuḥfet el-aʿdâd li-ḏawî el-rošd we'l-sadâd* (das Geschenk der Zahlen für die Vernunft und richtige Einsicht Besitzenden), in welchem abgekürzte Bezeichnungen für die Unbekannte und ihre Potenzen, für die Operationszeichen etc. vorkommen, und zwar noch in etwas ausgedehnterem Maſse als bei el-Qalaṣâdî. Ein Ms. dieses Werkes erwarb der Gelehrte Ṣâliḥ Zekî Efendî auf dem groſsen Bazar in Konstantinopel i. J. 1888. Derselbe Gelehrte (vgl. seinen Artikel: *Notation algébrique chez les Orientaux*, im Journal asiatique **11**$_9$, 1898, fand kürzlich in der Bibliothek Muṣṭafas III. in Konstantinopel eine Algebra eines unbekannten Autors, verfaſst i. J. 834 (1430/31), also sehr wahrscheinlich vor dem *kaʿf el-asrâr* des Qalaṣâdî, in welcher diese abgekürzte Bezeichnungsweise noch viel weiter durchgeführt ist. Man vergleiche für Näheres die für die Geschichte der Algebra sehr interessante Abhandlung im Journal asiatique.

1) Ahlwardt hat im Berliner Kat. drei verschiedene Angaben: Nr. 5700 „c. 1000", Nr. 5826 „gegen das Jahr 1060 am Leben", Nr. 5983 „gest. nach 993."

2) Hier hat der Verfasser noch den Ehrennamen Šaraf ed-dîn.

487ᵃ. ʿABDELḤAQQ EL-ĠÂFIQÎ EL-IŠBÎLÎ, ABÛ MUH., bekannt unter dem Namen IBN EL-HÂ'IM, wahrscheinlich in Sevilla lebend, verfaſste astronomisch-chronologische Tafeln, betitelt: *el-zîǵ el-kâmil* (die vollkommenen Tafeln), oder: *el-kâmil fî'l-taʿâlîm* (das Vollkommene für die Belehrungen), noch vorhanden in Oxford (II, 285), in welchem er die Fehler der Tafeln des IBN-EL-KEMÂD (s. Art. 487) zu verbessern versucht hat. — HAĞÎ CHALFA III, 569 nennt ihn ABÛ'L-ḤASAN B. ʿABDELḤAQQ EL-ʿÂNIQÎ (sic!), bekannt unter dem Namen IBN EL-HÂ'IM EL-IŠBÎLÎ. Er führt ferner an, daſs der gröſste Teil der Tafeln *el-moqtabas* (wahrscheinlich andere spätere als die gleichbenannten des IBN EL-KEMÂD) dem oben genannten Werke des IBN EL-HÂ'IM entnommen sei. Es wäre sehr zu wünschen, daſs das Oxforder Ms. einmal etwas gründlicher untersucht würde.

ANTOINE ARNAULD
DER GROSSE ARNAULD
ALS MATHEMATIKER.

VON

KARL BOPP
AUS RASTATT.

Einteilung.

Einleitung.

Die Geschichtsschreibung der Mathematik ist in den letzten Jahrzehnten zu einem himmelanstrebenden Bau geworden. In vorliegender Arbeit wollen wir versuchen, ihn mit einem neuen Standbilde zu schmücken und einem Manne den Platz anzuweisen, der ihm im Rahmen eines glänzenden Jahrhunderts mathematischer Forschung gebührt. Dieser Mann ist Antoine Arnauld, der grofse Arnauld.

Ermutigt werden wir zu unserm Unternehmen durch die Worte dessen, der jenen stolzen Bau geschaffen: Moritz Cantor schliefst das Vorwort zur zweiten Auflage seiner monumentalen *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“* Bd. I mit dem Wunsche: *„dafs abermals neue und immer neue Mitarbeiter das Feld umzugraben und zu bebauen sich finden mögen. Noch ist es bei weitem nicht erschöpft, noch lohnt auf ihm die Arbeit.“*

In Cantors genanntem Werke wird Antoine Arnauld Bd. III S. 367 im Verlaufe der Darstellung einer Kontroverse zwischen Leibniz und Guido Grandi über die Ordnungen des Unendlichkleinen erwähnt. Das Bewufstsein, dafs Antoine Arnauld ein grofser Mathematiker gewesen, ist der Litteratur nie ganz verloren gegangen. Wir finden z. B. in E. G. Guhrauers Leibnizbiographie Arnauld als Mathematiker bezeichnet. Aber worauf sich dieser Ruf gründet, ist heute fast ganz vergessen, was Arnauld auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften geschrieben, verschollen. Nicht nur bei seinen Landsleuten Bossut und Chasles wird Arnauld überhaupt nicht genannt, sondern auch Poggendorffs *„Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften“* versagt vollständig. Vergeblich wird man den Namen Arnauld suchen. Man ist versucht, auf die Leistungen dieses Mannes innerhalb der exakten Wissenschaften das Wort anzuwenden, das einst Menage, der französische Varro des siebzehnten Jahrhunderts, wie man ihn wohl nennt, an der Spitze eines Epigramms im Jahre 1679 in räumlichem Sinne von Arnauld aussprach: *„Abditus in tenebris notus qui toto in orbe.“* Diese Vergessenheit ist um so unverdienter, als Arnauld an zahlreichen und verschiedenen Gegenständen der Mathematik sein Interesse bethätigt hat. Auf dem Gebiete der Philosophie der Mathematik und ihrer Methoden begegnen wir ihm als Schriftsteller; an

zahlentheoretischen Problemen hat er seinen Scharfsinn versucht; in der Behandlung der Grundlagen der Geometrie hat sein Auftreten sogar Epoche gemacht; wir werden zeigen, dafs er der Mittelpunkt geworden ist, nach welchem gewisse Richtungen konvergieren, die durch diesen Mittelpunkt erst gewürdigt werden können und durch ihn ihren festen historischen Zusammenhang erhalten. Abgesehen von seinen originellen Gedanken hat er sehr zur Erläuterung und Verbreitung neuer und wichtiger Gesichtspunkte beigetragen.

Alle diese Verdienste Arnaulds rechtfertigen unsere Absicht, in einer Monographie sein Verhältnis zu den mathematischen Fragen, welche seine Zeit bewegten, und seine Arbeit auf diesem Boden eingehend und erschöpfend zu behandeln. Haben doch alle die grofsen Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, gerade auch jene, welche Frankreich die Hegemonie in der Mathematik bis zum Auftreten von Leibniz und Newton sicherten, in Einzeluntersuchungen ihre sorgfältige, ja liebevolle Erforschung gefunden. Wir denken hier an Descartes, an die Arbeiten Poudras über Desargues, C. Henrys über Mydorge, Paul Tannerys über Fermat, an den Aufsatz M. Cantors in den *Preufsischen Jahrbüchern* XXX 212—237 *„Blaise Pascal“*, endlich an Lehmanns Programmabhandlung über De la Hire.

Bevor wir aber die inhaltliche Würdigung von Arnaulds speziell mathematischen Schriften in Angriff nehmen, haben wir sein Leben kurz zu skizzieren, seinen philosophischen Standpunkt zu kennzeichnen und seine Beziehungen zu den grofsen Zeitgenossen etwas ausführlicher darzulegen, um ein Gesamtbild der Leistungen dieses vielseitigen Geistes zu erhalten.

Erstes Kapitel.

Arnaulds Leben, sein philosophischer Standpunkt und seine Beziehungen zu den grofsen Zeitgenossen.

Antoine Arnaulds Leben fällt zum gröfsten Teile in das goldene Zeitalter seiner Nation unter Ludwig XIV. Er selbst ist eine der hervorragenden Individualitäten, welchen es die französische Geschichte zu verdanken hat, dafs sie jenen Zeitabschnitt nicht nur auf politischem, sondern auch auf religiösem und litterarischem Gebiete als einen grofsartigen bezeichnen darf. Den Namen *„der grofse Arnauld“* hat er sich durch seine theologischen Kämpfe sowohl, wie durch seine hervorragende Teilnahme an den philosophischen Bewegungen und am Geistesleben seiner Zeit überhaupt

erworben. Geboren am 6. Februar 1612 zu Paris als Sohn Antoine Arnaulds, eines Rechsgelehrten und Generalprokurators der Königin Katharina von Medici, erhielt er seine wissenschaftliche Vorbildung am Kollegium Calvi-Sorbonne, einen propädeutisch-philosophischen Kursus absolvierte er an der Anstalt von Lisieux. Im Jahre 1635—36 sehen wir ihn als Baccalaureus (*bachelier*) der Pariser Universität. Wegen seiner hervorragenden Begabung erhielt er bald die Erlaubnis, sein Domizil in der Sorbonne aufzuschlagen (*hospes sorbonicus*). Den Grad eines Doktors der Sorbonne erlangte er nach feierlicher, öffentlicher Verteidigung seiner Thesen im Jahre 1641. Eine solche Disputation war ein glänzendes Ereignis im Leben der Universität; wenn die Anzahl der bacheliers, die daran teilzunehmen hatten, grofs war, nahm die Feierlichkeit durch die sich rasch folgenden Einwürfe und Verteidigungsgründe der Gegner oft einen sehr lebhaften Charakter an und hielt die sich Messenden fortwährend in Atem.

Durch die Gegenwart der höchsten Beamten des Staates und der ersten Diener der Kirche, sowie hervorragender Gelehrten erhielt der Akt seine Weihe. Arnauld verteidigte in überaus glänzender Weise seine Thesen; er überraschte die Anwesenden *usque ad stuporem.* Seine thatsächliche Aufnahme in die Gemeinschaft und die Rechte der Sorbonne erfolgte aber erst 1643 (*socius sorbonicus*), da eine der Vorbedingungen eine philosophische Vorlesung war, welche Arnauld in der Folge am Kollegium von Mans hielt. Zu seinen Schülern daselbst gehörte auch Pierre Barbay, später Professor der Pariser Universität, der sich durch einen *Commentaire latin sur toute la Philosophie d'Aristote,* Paris 1680, 6 vols in 12⁰ bekannt machte. Die Vorlesungen, die dieser Mann hielt, und die damals grofsen Beifall fanden, waren gröfstenteils eine Reproduktion der früher bei Arnauld gehörten. Die Doktoren der Sorbonne wollten Arnauld zwar von seiner praktisch-pädagogischen Verpflichtung dispensieren, aber der Kardinal Richelieu setzte jenem Versuche sein Veto entgegen, wiewohl er Arnauld gewogen war; bei seinem letzten Besuche in der Sorbonne kurz vor seinem Tode hatte der Kardinal Arnauld in seinem Studierzimmer aufgesucht und ihn zu dem Erfolg seiner Studien beglückwünscht. Schon in diese frühe Zeit fällt der Anstofs, welcher für Arnaulds ganze Richtung ausschlaggebend war. Du Verger, der berühmte Abt von Saint-Cyran, hatte Arnauld der Theologie zugeführt und ihm die Schriften des hl. Augustinus empfohlen. So war es kein Wunder, dafs der junge Theologe sich mächtig zu den Lehren des Jansenius hingezogen fühlte, als 1640 dessen „*Augustinus*" erschien. Aber mit diesem Hinneigen zum Augustinismus war auch unvermeidlich der Kampf gegen die diametral entgegengesetzte Denk- und Handlungsweise verknüpft: der Kampf gegen den Jesuitismus, ein Kampf, den



Arnauld mit seinem berühmten Buche *„de la frequente communion“* eröffnete und der sich durch sein ganzes Leben hinziehen sollte. Man möchte glauben, dafs unser Arnauld die Abneigung gegen den Orden des Ignatius v. Loyola von seinem Vater überkommen habe, der sich durch eine im Jahre 1594 vor dem Parlament im Namen der Universität gegen die Jesuiten gehaltene Klagerede einen Namen gemacht hatte. Im Jahre 1644 begann Arnauld für Jansenius zu schreiben. Die Jesuiten hatten es unterdessen dahin gebracht, dafs Arnauld nach Rom zitiert wurde, aber Parlament und Sorbonne widersetzten sich dieser Zitation, die nach den Landesgesetzen nicht zulässig sei. Damit wurde die Sache des feurigen Verteidigers seiner Überzeugung eine öffentliche und er selbst zum Wortführer und Haupte der Jansenisten, jener Partei, welche in Frankreich eine Reformation innerhalb der Kirche erstrebte. Wir bemerken nur noch, dafs Arnauld im Verlaufe der Streitigkeiten 1656 von der Sorbonne ausgeschlossen wurde, weil seine Ansicht gegen das Unfehlbarkeitsdogma zu verstofsen schien; mit ihm wurden die siebzig Doktoren ausgeschlossen, welche für den Beschuldigten gestimmt hatten. Für die genauere Kenntnis dieser Kämpfe verweisen wir auf Kuno Fischers eingehende Darstellung Bd. I S. 138 seiner *„Geschichte der neueren Philosophie“*.

Was uns aber in dieser frühen Periode seines Lebens besonders interessiert, das ist

Arnaulds Stellung zu Descartes und zum Cartesianismus.

Descartes' *„Meditationes de prima philosophia“* erschienen im Jahre 1641. Schon 1637 hatte er sein erstes Werk veröffentlicht: *Discours de la méthode, la Dioptrique, les Météores et la Géométrie.* Die drei letzteren Abhandlungen, von denen die *„Géométrie“* als Grundlegung der analytischen Geometrie und der Lehre von den Gleichungen in der Geschichte der Mathematik eine so hervorragende Stellung einnimmt, waren Probiersteine für seine Methode, wie der *„Discours de la méthode“* von dem ganzen System eine Probe geben sollte. Er wird thatsächlich als die Logik desselben betrachtet. Schon hier waren die Hauptfragen der *„Meditationen“*: Gott und das Verhältnis des Geistes zum Körper behandelt, aber, wie der Philosoph selbst in der Vorrede des Werkes sagte, nur im Vorübergehen, um aus dem Urteil darüber zu erfahren, ob er seine Gedanken später in eingehender Begründung veröffentlichen solle. Diese Aufgabe erfüllten die *„Meditationen“*. Descartes hat darin alle Grundbegriffe seiner Metaphysik und seiner Physik vereinigt. Die Hauptfrucht seiner wissenschaftlichen Mufse in Holland schätzte Descartes selbst sie unter allen seinen Werken am höchsten. Getreu

dem Worte des Horaz *„nonumque prematur in annum“* hatte er zehn Jahre in einer der Wichtigkeit des Gegenstandes entsprechenden Weise daran vervollkommnet und ihnen die ganze Vollendung aufgeprägt, die er zu geben verstand. Gleichwohl befürchtete er, dafs die Neuheit seiner Methode und die überraschenden Ausblicke darin, dann auch die Feinheit der Gedankengänge zu stark wirken könne, und so entschlofs er sich, dieses Werk zuerst in lateinischer Sprache zu veröffentlichen. Aber noch nicht genug damit, wollte er eine ganz kleine Anzahl von Exemplaren drucken lassen, um sie vor der eigentlichen Publikation an die feinsinnigsten Philosophen und Metaphysiker zu versenden und deren Urteil zu hören. Es war nicht seine Absicht an seiner Arbeit etwas zu ändern, da dies den Gang und die Kraft seiner Darstellung zu sehr beeinträchtigt hätte, sondern er wollte die Einwürfe zusammen mit seinen Erwiderungen darauf seinem Werke nachdrucken lassen, damit es schon kritisiert vor das gelehrte Publikum hinträte. Da er es dann aber wieder nicht für angemessen hielt, jene beabsichtigte kleine Auflage in Holland drucken zu lassen, sandte er eine Kopie des Manuskripts an seinen Freund, den Pater Mersenne, nach Paris; er fügte bei 1) die Einwürfe, die ihm schon der Gelehrte Carterus oder Caterus aus Alkmaar gemacht hatte, da dieser Teil als Vorbild für künftige Beurteiler dienen und Wiederholungen vermeiden sollte, 2) eine Widmung an die Doktoren der Sorbonne und 3) einen kurzen Abrifs von sechs Meditationen, welchen er auf Bitten Mersennes verfafst hatte, um die Prüfung seiner Schrift zu erleichtern. Descartes legte seinem Freunde ans Herz, sein Manuskript nur Leuten in die Hände zu geben, die befähigt, nicht von Schulvorurteilen befangen, deren Triebfeder nicht Neid und Eifersucht, sondern Liebe zur Wahrheit und der Ruhm Gottes bei der Beurteilung wäre; er wollte, kurz gesagt, ein verständnisvolles und objektives Urteil haben. Für Mersenne war es nicht leicht, die geeigneten Persönlichkeiten zu finden, keiner wollte ihm sein Urteil schriftlich geben. Mersenne war also genötigt, selbst zu Papier zu bringen, was er von Philosophen und Theologen, die er befragt hatte, von deren Ansicht mündlich hörte. Descartes antwortete darauf und legte seiner Antwort eine erläuternde Schrift bei: *„Raisons pour prouver l'existance de Dieu et la distinction qui est entre l'esprit et le corps humain disposée d'une manière géométrique.“*

Bald darauf sandte Mersenne die drei Einwürfe an Descartes, die der englische Philosoph Hobbes, der damals in Paris lebte, verfafst hatte, und machte ihm Hoffnung auf solche von Mitgliedern der Sorbonne; aber aufser einem jungen Doktor, welcher einst mit viel Vergnügen Descartes' *„Essais de la méthode“* gelesen hatte, fand sich niemand, der Mersennes Verlangen erfüllen und sich zu einem Urteil über die *„Meditationen“* des

damals schon berühmt werdenden Philosophen aufschwingen wollte. Es war dies unser Arnauld. Er war damals achtundzwanzig Jahre alt und Descartes hätte sich fast wieder über die Jugend seines Gegners getäuscht, wie es ihm trotz seines Scharfblickes einst mit dem Verfasser des *„Traité des coniques“* ergangen war, als ihm der jugendliche Pascal seine Arbeit übersandte. In dem Briefe an Mersenne, welcher seinen Einwürfen vorgedruckt ist, legt Arnauld mit großer Bescheidenheit, aber ebenso feiner Durchdringung des Stoffes dar, was ihm bei der Lektüre der *„Meditationen“* als angreifbar erschienen war:

Zunächst bemerkt er, daſs Descartes für die Existenz und Natur der menschlichen Seele denselben Beweisgang eingeschlagen habe, wie der hl. Augustin. Er macht über denselben Gegenstand noch weitere Bemerkungen, aber mehr um ihn zu stützen und zu durchleuchten, als um ihm Schwierigkeiten zu bereiten. Endlich gesteht er unumwunden zu, daſs der kurze Abriſs der sechs *„Meditationen“*, von dem wir oben sprachen, auſser dem Lichte, welches er auf die ganze Arbeit fallen lieſse, gerade in obiger Frage zur Hebung der Schwierigkeiten diejenigen Gründe enthalte, welche sich auch ihm aufgedrängt hätten. Weniger gefällt ihm die Art, wie Descartes die Verschiedenheit des Geistes vom Körper abgeleitet hatte. Was ohne die Idee eines andern Dinges klar und deutlich gedacht werden könne, existiere auch ohne das letztere und vollständig unabhängig von ihm, so hatte Descartes gelehrt. Arnauld findet diesen Schluſs nicht ganz richtig. Er führt dagegen geometrische Beispiele ins Feld; man könne sich ein rechtwinkliges Dreieck vorstellen, ohne den pythagoräischen Satz zu kennen; während letzterer doch geradezu als Definition zu Grunde gelegt werden könne. Man könne sich ferner eine Dimension ohne die andere denken, während sie in Wirklichkeit doch immer alle drei zusammen vorkämen. Descartes müsse auch seinen methodischen Zweifel noch klarer stellen, damit ihm seine Absichten nicht miſsdeutet würden, und wo er vom Irrtum handle, sei das intellektuelle und das moralische Element scharf zu trennen. Wir dürfen auch hier wieder auf Kuno Fischer verweisen (l. c. S. 407). Baillet erzählt in seinem *„Leben Descartes'“*, daſs Arnaulds Einwürfe dem Philosophen als die ernstesten erschienen; noch nie habe er einen geschickteren und gerechteren Gegner gehabt als diesen jungen Gelehrten, welcher auſser tiefem Wissen in seinen Gedankengängen eine *mathematische Schärfe und Reinlichkeit* zeige. In diesem Sinne schrieb Descartes an Mersenne. Auch von der milden und achtungsvollen Weise, in der er seine Bemerkungen vorgetragen hatte, war Descartes sehr angenehm berührt. In seiner Antwort ging dieser nur auf den ersten Punkt sehr eingehend ein; hinsichtlich des zweiten antwortete er ausweichend:

„je tâcherai plutôt d'éviter les coups que de m'opposer directement à leur violence imitant ceux qui ont à faire à un trop fort adversaire.“ Descartes hätte gewünscht, dafs Arnauld noch vor dem Drucke seine gesamte Antwort erhalten hätte, aber Mersenne konnte dies nicht ermöglichen; in dem Briefe an Voetius vom 13. Dezember 1642 erzählt ersterer, dafs er bei dem Verfasser der vier Einwürfe (Arnauld) angefragt habe, ob jener noch etwas zu erwidern habe. Er habe die Antwort bekommen, dafs derselbe vollkommen von Descartes' Entgegnung befriedigt sei; ja dafs er in einer philosophischen Vorlesung, welche er zwei Jahre zuvor zu halten gehabt, ganz ähnliche Prinzipien vertreten und vor feierlicher Versammlung verteidigt habe. Offenbar sind damit Arnaulds Thesen gemeint, von denen wir später noch zu reden haben werden. Durch die Anerkennung, welche Arnauld im übrigen seiner Metaphysik zollte, fühlte sich Descartes sehr geschmeichelt, ein Beweis, wie hoch er Arnauld stellte; in einem Briefe vom Februar 1642 schreibt er an die Brüder vom Oratorium: *J'ai beaucoup de satisfaction de ce que ce sont les plus grands hommes et les meilleurs esprits qui goutent et favorisent mes opinions, . . . et bien qu'il n'y ait pas longtemps que M. Arnauld soit docteur, je ne laisse pas d'estimer plus son jugement que celui d'une moitié des anciens.“* Gerne hätte er mit dem ihm sehr sympathischen Manne korrespondiert, aber Arnauld war um diese Zeit schon zu sehr in seine theologischen Kämpfe verwickelt. Nie hörte der Philosoph auf, Arnauld zu schätzen, wie folgende Briefstelle beweist, die er drei Jahre später an Abbé Picot schrieb: *„La disgrâce de M. Arnauld me touche d'avantage que les miennes; car je le compte au nombre de ceux qui me veulent du bien et je crains au contraire que ses ennemis ne soient aussi pour la plupart les miens.“* Auch Arnauld war Descartes stets ergeben, und als letzterer im Jahre 1643 nach Paris kam, liefs er ihm durch einen seiner Schüler Grüfse überbringen und ihm seine Dienste anbieten. Aber noch einmal kamen die beiden grofsen Männer in Berührung. Als im Sommer 1648 Descartes seine letzte Reise nach Paris machte, erhielt er, wie Baillet erzählt, am 15. Juli einen Brief, worin ein gelehrter Mann, ohne sich zu erkennen zu geben, ihm verschiedene schwierige Punkte bezüglich seiner Lehre vom Vacuum, der Seele und der Existenz Gottes zur weiteren Aufklärung unterbreitete. Descartes ersah aus Inhalt und Stil des Briefes, dafs er es mit einem tiefen Denker und ihm wohlgesinnten Manne zu thun habe; es wurde bei ihm dadurch der Wunsch rege, den Unbekannten kennen zu lernen und sich seiner Unterhaltung zu erfreuen. Er schrieb ihm, jener möge eine Zusammenkunft veranstalten: *„car on peut âgir plus sûrment par lettres avec ceux qui aiment la dispute, mais pour ceux qui ne cherchent que la vérité l'entrevue et la vive voix sont beaucoup*

plus commodes.“ Descartes hatte auch in Paris mit Roberval schlimme Erfahrungen gemacht; ihn zählte er zu den Leuten *„qui aiment la dispute“*. Dieser Mathematiker hatte als hartnäckiger und bösartiger Gegner seiner Physik den grofsen Philosophen in Paris unaufhörlich verfolgt und sich keine Gelegenheit entgehen lassen, um ihm in barschem Tone zuzusetzen oder ihn zu hänseln, und dies hatte nicht zum wenigsten die baldige Abreise Descartes aus Paris veranlafst.[1]) Jener Unbekannte schien ihm sympathischer zu sein. Die Unterredung aber kam nicht zustande, da jener sein Incognito nicht verlassen wollte. Am 29. Juli sandte ihm Descartes seine Antwort, geschmeichelt, dafs es sogar bedeutende Anhänger seiner Philosophie gäbe, die er nicht einmal mit Namen kenne. Wir wissen heute, dafs jene Persönlichkeit Arnauld war, wie er in den Bemerkungen selbst erzählt, die sich von seiner Hand in einem Exemplare von Baillets *„Vie de Descartes“* finden.

Auch nach Descartes' Tode blieb Arnauld der Cartesianischen Philosophie treu; er machte sie oft zum Gegenstand seiner Unterhaltung, so besonders als er auf dem Schlosse des Herzogs von Luynes zu Besuch weilte, der selbst ein solcher Bewunderer der *„Meditationen“* war, dafs er sie, wie bekannt, ins Lateinische übersetzte. Auch ein wissenschaftliches Gespräch mit dem Herzog von Liancourt über denselben Gegenstand hat sich erhalten (*Mémoires de M. Fontaine* Tom. II pag. 52). Am besten kennzeichnen wohl Kuno Fischers Worte Arnaulds Stellung zum Cartesianismus: *„Bei der Verbindung, die später zwischen der Cartesianischen Philosophie und den Jansenisten von Port royal stattfand, darf Arnauld als Mittelglied und Führer gelten.“* Diese Verbindung zweier mächtiger Geistesfaktoren zog Arnauld viele Streitschriften zu; auch aus dem Lager seiner eigenen Partei. Unter den Gegnern des Cartesianismus waren besonders leidenschaftlich De la Ville und Le Moine; gegen letzteren schrieb Arnauld unter dem Namen Davy, den er später in Holland führte. Bitter empfand es sein Gerechtigkeitsgefühl, als Descartes' *„Meditationen“* auf den römischen Index gesetzt wurden (Dekret vom 20. Nov. 1663); während die Gegenschrift Gassendis, der sich mit aller Macht bemühte, gerade die im vollen Einklang mit der Kirche befindlichen Prinzipien zu vernichten, oder die *„Censura philosophiae Cartesianae“* des Materialisten Huet völlig unbehelligt geblieben seien. Mit Recht müsse man, um konsequent zu sein, dann auch Sylvain Regis' Gegenschrift gegen Huet, welche 1691 unter dem Titel *„Réponse au Livre qui a pour titre: P. Dan. Huetii Suesson.*

1) Über das Verhältnis Descartes' und Robervals siehe auch Leibniz *„Remarques sur l'abrégé de la Vie de M. Descartes“* in der Ausgabe von Foucher de Careil.



episc. designat. Censura Philosophiae Cartesianae" der Zensur unterwerfen. Arnauld erwähnt bei dieser Gelegenheit in seinem Briefe XCIV. der Gesamtausgabe jenes seltene Schriftchen Descartes' gegen Regius „*Notae in programma quoddam*", und dafs es mit dem Zusatz „*donec corrigatur*" auf den Index gesetzt gewesen sei. Wichtiger als alle diese Einzelheiten ist wohl, dafs Arnauld in einem Lehrbuche der Logik, auf das wir noch in dem speziell mathematischen Teile unserer Arbeit ausführlich zu sprechen kommen werden, zur Erläuterung und Verbreitung der Cartesianischen Lehre wesentlich beitrug; Windelband nennt es in seiner zweibändigen „*Geschichte der neueren Philosophie*" S. 191 Bd. I „*den vollkommensten Ausdruck der durch das cartesianische System bestimmten Methodologie*".

Seit 1648 weilte Arnauld zurückgezogen von der Welt in Port royal des Champes in Paris. „*In dem Asyle dieses ländlichen Klosters finden sich in gleicher religiöser Lebensrichtung und anachoretischer Art eine Reihe bedeutender Männer zusammen, darunter wissenschaftliche und theologische Gröfsen, welche die Verteidigung des Jansenismus übernehmen und als eine geistesmächtige, kirchlich-religiöse Partei auftreten*", so charakterisiert Kuno Fischer die „*Herren von Port royal*". Hier lernt Arnauld Blaise Pascal[1]) kennen. Nach dem bekannten Wagenunfalle auf der Brücke von Neuilly, der ihm beinahe das Leben gekostet hätte, hatte Pascal sich mehr und mehr in religionsphilosophische Betrachtungen versenkt, welche ihn mächtig zu den Einsiedlern von Port royal hinzogen. In herzlichster Weise von jenen aufgenommen, machte er in Port royal öfter mehrmonatliche Besuche, ohne sich zunächst fest dort niederzulassen. Zu derselben Zeit beschäftigte sich die Sorbonne mit den Anklagen, welche Arnauld durch sein Auftreten für Jansenius sich zugezogen. Arnauld sah sich genötigt, eine Apologie zu verfassen. Als er sie aber seinen Freunden vorlas, fand man, dafs sein Stil für diesen Zweck zu lehrhaft, zu ernst sei. Arnauld konnte eine glänzende Beredsamkeit entwickeln, aber er wurde zu leicht durch sein allzu leidenschaftliches Temperament fortgerissen. Hier aber galt es einen weitern Kreis für seine Sache zu interessieren und die Leute der Feder auf seine Seite zu ziehen. Arnauld selbst war sich darüber klar, dafs hier durch eine anziehende und gefällige Form der Darstellung der Leserkreis sich gefangen sehen mufste, ehe er sich dessen noch bewufst war. Pascal war gerade anwesend. „*Pourquoi vous qui êtes jeune ne prendriez-vous pas la plûme?*" sagte Arnauld zu ihm. Gerne war Pascal bereit, seinen

1) Für das Leben Pascals sind zu vergleichen M. Cantor, „*Blaise Pascal*", *Preufsische Jahrbücher* XXX S. 217—237, sowie Dreydorff, *Pascal, sein Leben und seine Kämpfe,* 1870 und Nourrisson, *Pascal, Physicien et Philosophe* Paris 1888.

Freunden einen Dienst zu erweisen; er machte den Versuch, und mit Benützung des von Arnauld gelieferten Materials entstanden so die *„Provinzialbriefe"*, jenes heute noch unübertroffene Denkmal polemischer Litteratur. Mit kaustischem Witze, mit Beweisen, deren zwingender Gewalt sich niemand entziehen konnte, enthüllten die achtzehn Briefe schonungslos die Schwächen der Gegner und gaben sie dem Fluche der Lächerlichkeit preis, als Arnaulds Richter, die zum gröfsten Teile aus Bettelmönchen bestanden, seine Ausschliefsung aus der Sorbonne durchgesetzt hatten.

Wie die beiden grofsen Männer im Kampfe für geistige Freiheit zueinanderstanden, so sehen wir sie auch in friedlichem Wetteifer die Wissenschaften pflegen. Die Lehre Descartes' hatte sich mächtig Bahn gebrochen und viel dazu beigetragen, philosophische Gespräche und Unterhaltungen populär zu machen. Die vornehme Welt und die Frauen hatten gelehrte Bildung aufgenommen und trugen sie gerne zur Schau. Vielleicht den lebhaftesten Ausdruck fand diese Strömung in einem geistreichen Zirkel, der sich in Port royal bildete. Dort versammelte Frau von Sablé an den Sonnabenden eine Elite hochgebildeter Männer und Frauen um sich. Seit 1659 wohnte die Marquise in der Nähe von Port royal, um sich dem Zuge der Zeit folgend einem kontemplativen Leben zu widmen; aber auch hier in dem stillen Kloster wurde ihr Salon der Sammelplatz der schöngeistigen Aristokratie, und selbst Mitglieder der königlichen Familie, die Herzöge und Herzoginnen von Chevreuse und Longueville, der Maréchal de Luxembourg, der Kardinal d'Estrée, de Choiseul, La Rochefoucauld, nicht zu vergessen De Méré, dessen Name ja auch in gewisser Beziehung zur Geschichte der Mathematik steht (vgl. M. Cantor, Bd. III S. 355 und bei Nourrisson das Kapitel: *„Pascal et le Chevalier de Méré"*), verkehrten daselbst. In dieser glänzenden Gesellschaft erschienen Arnauld, Pascal und Nicole. Man plauderte in jenem leichten, weltmännischen Tone, welcher den Geist Montaignes atmete, von philosophischen Gegenständen, von Pädagogik, kurz von allen geistigen Interessen. Madame de Sablé war die Seele dieser Zusammenkünfte; ihr Biograph Cousin schildert uns, wie sie auf allen Gebieten des Wissens zu Hause war. Ein neues Genre der Litteratur, die *„Pensées"* und *„Maximes"* wurde von ihr ins Leben gerufen. Mit Arnauld korrespondierte sie über dessen *„Logik"*; sie scheute selbst die schwierigen Probleme der *„Wissenschaft von der Wissenschaft"* nicht. Die *„Grammaire raisonnée"* Arnaulds legte sie ihren Freunden von der Akademie vor. Die betreffenden Briefe haben sich erhalten (Cousin, *Madame de Sablé*, Paris 1859; S. 369—373). Unter ihnen ist besonders interessant ein mit *„De Labrosse"* unterzeichneter, worin ein Mann dieses Namens Frau von Sablé ersucht, auf Arnauld dahin zu

wirken, dafs er die Grundlehren der Physik in einem Lehrbuche behandeln und vereinigen möge, da es dringend zu wünschen sei, dafs mit den alten Schulvorurteilen in dieser Wissenschaft aufgeräumt werde, indem nur die wenigsten Leser mit genügenden Vorkenntnissen an die Lektüre von Descartes' dahin gehörenden Schriften heranträten. Also auch in der Physik wäre Arnauld in der Lage gewesen zu schreiben, wie jener De Labrosse bezeugt: *„c'est une chose qu'il a déjà assez meditée et sur laquelle il a fait toutes les reflexions possibles. Il ne lui reste qu'à les mettre en ordre et à les donner au public."* Wir haben hier den Kreis der Marquise de Sablé etwas ausführlicher behandelt. *Denn hier war, wie wir mit höchster Wahrscheinlichkeit vermuten dürfen, der Boden, auf welchem Pascal und Arnauld auch im Gebiete der mathematischen Wissenschaften ihre Gedanken tauschten; eine Thatsache, die bisher in der ganzen modernen französischen Pascallitteratur unbeachtet geblieben ist. Dieser Gedankenaustausch veranlafste die Herausgabe von Arnaulds geometrischem Buch und ist der wichtigste Punkt unserer vorliegenden Arbeit.* Wir werden später das Nähere berichten. —

Die Veröffentlichung der Schriften, welche als Originalleistungen Arnauld für immer einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Wissenschaften sichern, fällt in das Jahrzehnt von 1660—1670; den Reigen eröffnete seine *„Grammaire générale et raisonnée"* im Jahre 1660. Die Entstehung dieses Buches erläutert eine Stelle eines seltenen Werkchens *„Matanasiana ou Mémoires littéraires, historiques et critiques du docteur Matanasius"* à la Haye chez la Vve de Charles Le Viev 1740 in 12^0 Tom. I p. 133, es heifst daselbst: *„Au-reste il n'est pas étonnant que cette Grammaire générale et raisonnée soit un excellent Ouvrage, puis que c'est un de ceux qu'on nomme de Port-Royal. C'est une production de ce docteur fameux que M. Gravina* (ibid. p. 135) *reconnoit pour le flambeau de toutes les sciences et de tous les excellens préceptes: Scientiarum optimorumque institutorum omnium fax; et de ce savant Bénédictin que M. Ménage † appelle un homme d'une grande vertu et d'un grand savoir, c'est à dire de M. Arnauld et de M. Lancelot."* Arnauld entsprach damit einer Absicht Bacons, des grofsen Begründers der inductiven Methode, der in seinem Werkchen *„De augmentis scientiarum"* im sechsten Buche von einem solchen Unternehmen spricht. Nicht uninteressant ist, dafs auch der grofse englische Mathematiker Wallis in einem Versuche: *Grammatica linguae Anglicanae cui praefigitur de loquela sive sonorum formatione tractatus Grammatico-physicus* Oxford 1653 den Plan Bacons zu verwirklichen strebte. Zwei Jahre später erscheint *„Die Logik der Herren von Port royal": La Logique ou l'Art de penser contenant outre les regles communes, plusieurs observations nouvelles propres à*

former le jugement. A Paris chez Jean Guignard, Charles Savreux, Jean De Launay MDCLXII. Avec privilege du Roy. Arnauld hatte sie einige Zeit vorher für Honoré d'Albert, Herzog von Chevreuse, verfafst, um ihm das Studium der Logik zu erleichtern. Ursprünglich nicht für die Veröffentlichung bestimmt, gab man sie heraus, aus Furcht, sie könne auf Grund fehlerhafter Kopien dennoch erscheinen. Man hat wohl den Ausspruch gethan, *„dieses Lehrbuch habe alle früheren verdrängt und kein späteres habe dieses vergessen machen können"*. Wirklich machten auch neue und interessante Untersuchungen über die Ursache des Irrtums, die glückliche Wahl der Beispiele und die Anwendung der Regeln auf allgemein interessierende Gegenstände das Buch sehr wirkungsvoll. Es erlebte gegen zehn französische und ebensoviele lateinische Ausgaben; die letzte ist wohl die von A. Fouillée, Paris 1879. Auf den Inhalt einzelner Partien werden wir zurückkommen. Arnauld wurde 1669 in die *„Paix d'église"* aufgenommen, welche die Streitigkeiten in der französischen Kirche beilegen sollte, vom päpstlichen Nuntius und vom Könige in feierlicher Audienz empfangen. In dieser Zeit hatte sein Ansehen den Höhepunkt erreicht; jedermann wollte den berühmten Mann sehen. Dieser Wunsch lebte auch im Herzen eines jungen deutschen Gelehrten, welcher damals die Augen der Welt auf sich zu lenken begann. Wir sind damit an einem neuen interessanten Kapitel angelangt, an

Arnaulds Beziehungen zu Leibniz.

Diese Beziehungen sind für die Aufgabe, die wir uns gestellt, Arnauld als Mathematiker zu würdigen, von grofser Wichtigkeit; denn sie zeigen einerseits, wie sehr der grofse Entdecker der Infinitesimalrechnung Arnauld in dieser Eigenschaft schätzte, und lassen andererseits als hochwichtiges Moment erkennen, dafs Arnauld hinwiederum einen gewissen Einflufs auf Leibniz' mathematisches Denken und dessen Entwicklung im Gebiete unserer Wissenschaft ausgeübt. Das Interessanteste an den Heroen des Geistes ist uns ja nicht nur, was sie geleistet und was wir ihnen verdanken, sondern auch, von welchen Punkten aus ihre Denkentwicklung sich vollzogen, wie sie zu ihren grofsartigen Resultaten gelangt sind. Diese Wurzeln zu verfolgen bis in die feinsten Verzweigungen, ist eine reizvolle psychologische Aufgabe, welche der von Lessing in das moderne Denken eingeführte Begriff der Entwicklung involviert. Quelle werden für unsere Zwecke in erster Linie die verschiedenen Ausgaben des Briefwechsels der beiden grofsen Männer, welche aber mehr oder weniger vollständig sich ergänzen müssen. Grotefends Ausgabe von 1846 giebt im Anhang unter

A einen längeren lateinischen Brief wieder, welcher zu jenen Programmkundgebungen gehört, mit welchen Leibniz in den Jahren 1668—1671 in der wissenschaftlichen Welt debütierte. Hätten wir gar keine weiteren Dokumente für Leibniz' philosophische Jugendansichten, wir könnten sie hier in vielleicht vollständigster Nebeneinanderreihung finden. Dieser erste lateinische Brief Leibniz' an Arnauld beginnt damit, Leibniz habe oft beim Baron v. Boineburg von Arnauld sprechen hören; jenem aber sei der Doktor der Sorbonne vom Landgrafen von Hessen-Rheinfels gerühmt worden. Es folgt ein kurzer Abrifs der Kämpfe, in welchen das siebzehnte Jahrhundert, diese schroffe Übergangszeit in neue Weltanschauungen, das Alte und Hergebrachte zu stürzen sucht und seine Waffen gegen die Lehren der Kirche kehrt. Leibniz will in die Geisteskämpfe eintreten und sucht daher Fühlung mit den ersten Geistern der Zeit; wie er speziell Arnaulds Autorität ehrt, davon geben uns seine Worte einen Beweis: *„Te pene unum me nosse, ex quo Paschalio excidimus, qui in utroque campo confligere possit; qui eruditione pariter et sapientia, rarissimo connubio, polleat; documento esse Artem illam cogitandi, libellum magnae profunditatis, cuius quisquis autor sit, ex vestra certe schola esse.“* Leibniz meint damit Arnaulds Logik. Nachdem er eine Übersicht über seine bisherigen philosophischen Studien gegeben, geht Leibniz zu seinen naturwissenschaftlichen Ansichten über. Er entwickelt seine Vorstellungen über Bewegung, alle jene Gedankenreihen, die er auch in dem Schreiben an Oldenburg vom 15/25. Oktober 1671 (s. *Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern,* herausgegeben von C. J. Gerhardt, Bd. I, 1899) ausgesprochen hat und die niedergelegt sind in der *„Hypothesis physica nova, qua Phaenomenorum Naturae plerorumque causae ab unico quodam universali motu, in globe nostro supposito neque Tychonicis, neque Copernicanis aspernando, repetuntur Autore G. G. L. L. Mogunt. Anno MDCLXXI“.* Dieselbe besteht aus zwei Teilen; im ersten spricht Leibniz von seiner Annahme einer homozentrischen Universalbewegung als Ursache jeder Bewegung und von der Kohäsion; der zweite *„Hypothesis physica“* behandelt die Theorie der Bewegung ohne Rücksicht auf die Phänomene, die Zusammensetzung des Continuums aus unendlich vielen Teilen; lauter Dinge, die in diesem Briefe rekapituliert werden. Schon hier zeigt Leibniz seine Abneigung gegen den Cartesianischen Körperbegriff. Er giebt seine Definition des Punktes, erwähnt seine Ansicht über die Winkel als Gröfsen ohne Ausdehnung und teilt phoronomische Prinzipien mit. Auf die Bewegungslehre baut er seine psychologischen Vorstellungen und leitet daraus seine Ideen über Ethik und Recht ab. Es finden sich sodann Gedanken, die auf seine *„Characteristica realis“* hinzielen, Hieran schliefsen sich die physikalischen Theorien, die Leibniz über Optik,

Schwere, Elasticität und Magnetismus sich ausgebildet hatte; im Anschlufs daran Chemisches und Metereologisches. Am Ende des Briefes erwähnt er eine von ihm gefundene mechanische Vorrichtung zur Lösung geometrischer Aufgaben, dieselbe leiste z. B. die Trisektion des Winkels und die Quadratur des Kreises mit einem für praktische Zwecke hinreichenden Grad von Annäherung. Endlich gedenkt er seiner bekannten Rechenmaschine. Dafs diese Notizen für Arnauld grofses Interesse hatten, beweist ein Brief dieses letzteren vom 5. September 1673 an Pascals Neffen Perier:

„Au reste il y a ici un petit horloger qui ayant vu une machine de M. Pascal l'a perfectionnée de telle sorte, qu'elle est incomparablement plus facile que celle de Monsieur votre oncle, car les roues tournent d'un coté à l'autre, de sorte que sans changer les chiffres par une regle, comme dans la Pascaline, on fait l'addition et la multiplication sur les mêmes chiffres. Il y a de plus un endroit particulier où on fait tout d'un coup la multiplication et les divisions, un autre où on trouve les racines cubiques et d'autres où l'on fait les fractions. Quoique cette machine ait les deniers et les sols, et qu'elle aille jusqu'à cent mille, elle est beaucoup plus petite qu'aucune de M. Pascal; et cet horloger en fait même présentement une autre, qui ne sera plus grande qu'un livre in 12⁰ où tout cela sera. Je ne vous parle point par oui dire; nous avons vu cette machine après diné. Après tout, néanmoins M. Pascal ayant été le premier qui ait trouvé de ces sortes de machines, quoiqu'on y puisse ajouter, il en aura toujours la principale gloire“ . . .

Man kann annehmen, dafs es sich hier um Leibniz' Modell handelt; denn dieses wurde, wie Guhrauer erzählt, in Paris Huygens und Arnauld und Thevenot demonstriert und besafs die oben angegebenen Verbesserungen. Am Schlusse jenes ersten langen Briefes giebt Leibniz der Hoffnung Ausdruck, sich bald mündlich mit Arnauld über alle jene Gegenstände aussprechen zu können; er hoffe von ihm wertvolle Aufklärungen und Belehrungen zu erhalten. Diese Hoffnung sollte bald in Erfüllung gehen. Am 19. März 1672 ging Leibniz in politischer Mission nach Paris. Hier verkehrte er besonders zu Anfang seines Aufenthaltes viel mit Arnauld. Wichtige Belege hierfür bilden zwei Briefe, die in Grotefends Ausgabe fehlen, aber in der Gesamtausgabe von Arnaulds Werken veröffentlicht sind (Bd. IV, S. 189). Leibniz schreibt hier unterm 27. April 1683: *„J'ai eu l'honneur de connoître M. Arnauld assez particulièrement et j'honore infiniment son merite, qui est reconnu de toute la terre. Nous nous sommes souvent entretenus de sciences; car il n'est pas moins excellent Géomêtre que grand Theologien; il méditoit alors quelque chose de fort beau sur les raisons et sur les proportions, je serois*

fâchê s'il en avoit été distrait entièrement. Ce qu'on me compta de sa retraite et du malheur de ses amis ne m'avoit pas peu touché. Au reste qu'en je retournai en Allemagne, il me donna une reponse à un Capucin François demeurant à Hannovre qui lui avait demandé des particularités sur la croyance des Grecs touchant la Transubstantiation: là dedans il dit de moi, en passant, quelque chose de si extraordinairement favorable, que je n'aurois pas osé porter la lettre, si je l'avois su, et je ne l'appris que depuis, par le Prince même, qui avoit retenu cette lettre." Arnauld hatte in dem Briefe mit richtigem Blick sein Urteil über Leibniz dahin abgegeben, dafs ihm (Leibniz) nur noch wenig fehle, um in Wahrheit einer der grofsen Männer des Jahrhunderts zu sein, und dies ist es, was Leibniz, man möchte sagen „*rot vor Freude*" hier andeutet. Leibniz war damals allerdings schon auf der Leiter zur Erkenntnis weit emporgestiegen, aber in der Mathematik war er, als er nach Paris kam, noch wenig vorgebildet, wie er an mehrfachen Stellen selbst erzählt (vgl. M. Cantors „*Vorlesungen*", Bd. III S. 38), und so mögen die Unterhaltungen mit Arnauld durch dessen reifes Urteil und reiche Erfahrung wohl geeignet gewesen sein, manche Gedankengänge bei Leibniz zu klären, manche Anregungen zu geben, wie ja auch Descartes in der Aussprache seiner Spekulationen endlich eines der besten Mittel zur Selbstbelehrung erkannt hatte. Ein neuer Beweis, dafs Leibniz schon während seines Pariser Aufenthaltes die Anfänge der Differentialrechnung besafs, scheint uns in der folgenden wichtigen Briefstelle vom 4. August 1683, die an den Landgrafen von Hessen-Rheinfels gerichtet ist, enthalten zu sein:

„*Quand j'étois à Paris, nous nous sommes entretenus quelques fois sur la Géométrie c'est pourquoi je supplie V. A. S. de lui (Arnauld) envoyer de ma part les papiers ci-joints sur quelques découvertes géométriques: car parmi tant d'autres belles connaissances, il sait parfaitement bien ce qu'il y a de plus beau dans la Géométrie. Ce que je lui envoie a déjà été approuvé et estimé par les premiers Mathematiciens de France et d'Angleterre; et je me souviens de lui en avoir parlé en France. J'avoue cependant très volontiers que ces sortes de curiosités n'ont point de meilleur usage que celui de perfectionner l'art d'inventer et de raisonner juste.*" Schon der Herausgeber von Arnaulds gesammelten Werken bemerkt hierzu: „*Ce sont peut-être les Regles du calcul differentiel, qu'il insera en 1684 dans le journal de Leipsik*"; also die Abhandlung: „*Nova methodus pro maximis et minimis*", die Leibniz im Mai 1684 in den *Acta eruditorum* veröffentlichte. In den Jahren 1686—1690 dauert der Briefwechsel ununterbrochen fort. Die Jahre 1671—1690 sind diejenige Periode in Leibniz' philosophischer Ent-

wicklung, in der sich *„die Ausreifung seines Systems“* vollzog (Kuno Fischer). Daher werden im Gedankenverkehr mit Arnauld wesentliche Grundpfeiler seiner Weltanschauung aufgerichtet: sein Substanzbegriff: die Substanz als Kraft, als immaterielles Wesen, der Begriff substantieller Einheit werden festgestellt, die Gemeinschaft zwischen Leib und Seele wird unter beiden Gelehrten eingehend erörtert. Leibniz macht seine Ansicht über die Individualität und Unzerstörbarkeit der Seele, auch der niederer Formen geltend; auch erkenntnistheoretische Passagen (die Präponderanz des Prinzips des Widerspruchs für die ewigen, des zureichenden Grundes für die thatsächlichen Wahrheiten wird betont) sind in einzelnen Briefen vertreten. Gleichsam das Resumé bildet der hervorragend wichtige Brief, welcher vom 23. März 1690 aus Venedig datiert der Schlufsbrief des Commerciums ist. *„Er enthält im Keime Leibniz' ganzes System: den Begriff der Monade, des Mikrokosmus, der Entwickelung und der (prästabilierten) Harmonie“* (Kuno Fischer). Durch die Briefe metaphysischen Inhalts ziehen sich wie ein roter Faden Leibniz' Berichte über seine Entdeckungen im Gebiete der höheren Analysis und der Dynamik. Am 14. Juli 1686 schreibt er an Arnauld:

„Au reste, je me suis souvent diverti à des pensées abstraites metaphysiques et de géométrie. J'ai découvert une nouvelle méthode de tangentes, que j'ay fait imprimer dans le journal de Leipzig. Vous sçavez, Monsieur, que Messieurs Hudde et depuis Slusius, ont porté la chose assez loin. Mais il manquoit deux choses: l'une que lorsque l'inconnu ou l'indeterminée est embarassée dans des fractions et irrationelles, il faut l'en tirer pour user de leurs méthodes: ce qui fait monter le calcul à une hauteur ou prolixitée tout à fait incommode et souvent intractable: au lieu que ma méthode ne se met point en peine des fractions, ny irrationelles. C'est pourquoy les Anglois en on fait grand cas.

L'autre défaut de la méthode des tangentes est, qu'elles ne va pas aux lignes que M. des Cartes appelle Mechaniques, et que j'appelle Trancendentes; au lieu que ma méthode y procede tout de même, et je puis donner par le calcul la tangente de la cycloide ou telle autre ligne. Je pretends aussi generalement de donner le moyen de reduire ces lignes au calcul, et je tiens, qu'il faut les recevoir dans la géométrie, quoyqu'en dise M. des Cartes. Ma raison est qu'il y a des questions analytiques, qui ne sont d'aucun degré, ou bien où dont le degré est demandé; par exemple, de couper l'angle en raison incommensurable de droite à droite. Ce problème n'est ny plan, ny solide, ny sursolide. C'est pourtant un problème et je l'appelle transcendent pour cela. Tel est aussi ce problème: resoudre une telle équation: $X^X + X = 30$, *où l'inconnue même X entre dans l'exposant, et le degré*

même de l'équation est demandé. Il est aisé de trouver ici que cet X peut signifier 3. *Car* $3^3 + 3$ *ou* $27 + 3$ *fait* 30. *Mais il n'est pas toujours si aisé de le resoudre, surtout quand l'exposant n'est pas un nombre rationel; et il faut recourir à des lignes ou lieux propres à cela, qu'il faut par consequence recevoir necessairement dans la géométrie. Or je fais voir, que les lignes que des Cartes veut exclure de la géométrie dependent de telles équations qui passent en effet tous les degrés algebraiques, mais non pas l'analyse, n'y la géométrie. J'appelle donc les lignes reçues par M. des Cartes algebraicas, parcequ'elles sont d'un certain degré d'une équation algebraique; et les autres transcendentes, que je reduis au calcul, et dont je fais voir aussi la construction, soit par points ou par le mouvement; et si je l'ose dire, je pretends d'avancer par là l'analyse ultra Herculis columnas.*" In diesem ausführlichen Briefe giebt Leibniz den Inhalt seines Aufsatzes „*Geometria recondita*" in den *A. E.* von 1686 (M. Cantor, „*Vorlesungen*" S. 197 Bd. III). Der Brief vom 28. November 1686 führt mitten in den berühmten Streit Leibniz' mit den Cartesianern über das Mafs der lebendigen Kraft. Descartes hatte als Konsequenz seines Körperbegriffes gelehrt, die Gröfse der Bewegung in der Natur sei eine konstante, während Leibniz durch seine dynamische Auffassung des Körpers zu der Ansicht geführt wurde, nicht die Bewegungsgröfse, sondern die Summe der bewegenden Kräfte sei die Gröfse, welche bei den Bewegungen der Körperwelt erhalten bleibe. Die Wirkung jeder Kraft ist die Bewegung einer Masse, welche unter dem Einflufs der Kraft eine gewisse Geschwindigkeit erhält. Descartes hatte als Mafs der Leistung das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit betrachtet, während Leibniz an Stelle der einfachen Geschwindigkeit deren Quadrat in die Mechanik einführte. Die Annahme Descartes' ist unvereinbar mit dem Galileischen Gesetz, dafs die Räume sich verhalten wie die Quadrate der Geschwindigkeiten. Speziell an dieser Stelle sagt Leibniz: „*Ohne mich darum zu kümmern, wie der Körper seine Geschwindigkeit erlangt, behaupte ich, dafs ein Körper von einem Pfund Masse von einer Geschwindigkeit zweier Grade zweimal so viel lebendige Kraft besitzt als eine Masse von zwei Pfunden, die eine Geschwindigkeit von einem Grad hat. Und ich bin der Ansicht, dafs man bei Erwägung der Bewegung sich stofsender Körper nicht auf die Gröfse der Bewegung sein Augenmerk zu richten hat, wie das Descartes in seinen Regeln thut, sondern auf die Gröfse der Kraft, sonst wäre dem Perpetuum mobile Thür und Thor geöffnet. Setzen wir z. B. voraus, dafs in einem Quadrate LM ein Körper A sich auf der Diagonale bewege und zur gleichen Zeit auf zwei ihm gleiche Massen B und C stofse, derart, dafs im Momente des Stofses die Centren der drei Kugeln ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck bilden, und der ganze*

Vorgang sich in der Horizontalebene abspielt, setzen wir weiter voraus, daſs nach dem Stoſse der Körper A an der Stelle 2 A in Ruhe bleibt und seine ganze Kraft auf die beiden Körper B und C überträgt, dann wird B von 1 B bis 2 B mit der Geschwindigkeit und Richtung 1 B 2 B laufen und C von 1 C nach 2 C mit der Geschwindigkeit und Richtung 1 C 2 C. Das heiſst, wenn A eine Sekunde gebraucht hatte, um in gleichförmiger Bewegung von 1 A nach 2 A zu gelangen vor dem Stoſse, so wird auch B eine Sekunde brauchen, um von 1 B nach 2 B zu laufen und ebenso C in derselben Zeit von 1 C nach 2 C. Es frägt sich nun, welches ist die Länge der Strecke 1 B 2 B oder 1 C 2 C, welche die Geschwindigkeit repräsentiert. Ich behaupte, daſs sie gleich AL oder AM ist, Seiten des Quadrats LM. Denn wenn die Massen gleich sind, so verhalten sich die Kräfte wie die Höhen, von denen die Körper herabfallen müssen, um die betreffenden Geschwindigkeiten zu erlangen: die Summe der Quadrate 1 B 2 B und 1 C 2 C ist gleich dem Quadrate 1 A 2 A. Also die Gröſse der Kraft ist nach dem Stoſse dieselbe wie vorher, aber die Bewegungsgröſse ist gewachsen; denn wenn die Massen gleich sind, kann man jene (die Bewegungsgröſse) durch die Geschwindigkeit in der Gleichung darstellen, vor dem Stoſs war die Geschwindigkeit 1 A 2 A; nach dem Stoſs ist sie gleich der Summe $1B2B + 1C2C > 1A2A$. *Nach* Descartes *aber dürfte, damit die Bewegungsgröſse konstant bliebe, der Körper B nur nach* β, *der Körper C von 1 C nur nach k gelangen, derart, daſs* $1B\beta = 1Ck = \frac{1}{2} 1A2A$ *wäre. Aber auf diese Weise ginge soviel Kraft verloren, als die Differenz der Summe der Quadrate über* $1B\beta$ *und* $1Ck$ *gegen das Quadrat über 1 A 2 A beträgt. Umgekehrt kann man zeigen, daſs man durch den Stoſs auch Kraft gewinnen könnte, denn wenn der Körper A mit der Geschwindigkeit 1 A 2 A auf B und C auftrifft und ihnen nach* Descartes *die Geschwindigkeiten* $1B\beta$ *und* $1Ck$ *erteilt, während er selbst an deren Platz still steht, so würden vice versa die Körper B und C, wenn sie mit den Geschwindigkeiten* $1B\beta$ *und* $1Ck$ *zurückliefen, dem Körper A die Geschwindigkeit 1 A 2 A erteilen, damit würde dann aber unfehlbar eine kontinuierliche Bewegung eintreten; denn vorausgesetzt, der Körper B von einem Pfund könnte vermöge seiner Geschwindigkeit* $\beta 1B$ *zu einer Höhe von einem Fuſs aufsteigen und C ebenso, so hätte man vor dem Stoſs eine Kraft, die zwei Pfund auf einen Fuſs Höhe zu bringen vermag.*[1] *Aber nach dem*

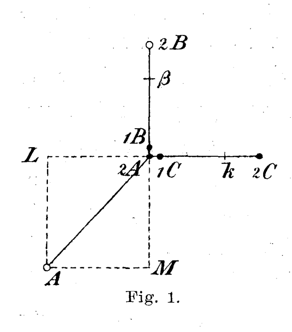


Fig. 1.

1) Oder ein Gewicht von einem Pfund auf zwei Fuſs.

Stofs von B und C auf A hätte der Körper A die doppelte Geschwindigkeit erreicht, nämlich die Geschwindigkeit $1A2A = 2\widehat{\beta 1 B} = 2\widehat{k 1 C}$, *und könnte ein Pfund vier Fufs heben, denn die Höhen, zu welchen die Körper vermöge der Geschwindigkeiten, die sie besitzen, sich erheben können, verhalten sich wie die Quadrate genannter Geschwindigkeiten. Wenn man aber so das Doppelte der Kraft gewinnen kann, so ist das Problem des Perpetuum mobile durchaus gelöst. Schlechterdings ist es aber unmöglich, Kraft aus nichts zu gewinnen oder grundlos zu verlieren, und Regeln, die zu solchen Folgerungen führen, sind mit Unrecht gang und gäbe.*"

Als Leibniz Arnauld in dieser Frage erstmals Mitteilung gemacht und ihm eine Druckschrift, wohl den Aufsatz: *Brevis demonstratio Erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa Legem naturalem* u. s. w. *A. E.* an. 1686, Gerhardts Leibnizausgabe Bd. VI, S. 117, gesandt hatte, war Arnaulds Stellungnahme zuerst etwas skeptisch gewesen und er hatte Leibniz auf Descartes' Briefe hingewiesen (Brief vom 28. September 1686 Arnaulds).

Es seien schon zwanzig Jahre, dafs er sich mit solchen Fragen beschäftigt habe, was genau mit dem Datum des Briefes jenes De Labrosse übereinstimmt, und er könne zunächst kein definitives Urteil abgeben. Leibniz fand die betreffende Stelle in den „*Lettres*“ Descartes', wo letzterer darauf hinwies, dafs man in gewissen Fällen nur auf die Steighöhe zu achten habe und von der Geschwindigkeit (d. h. der ersten Potenz derselben) absehen könne; aber in seinen anderen physikalischen Schriften hatte Descartes jene Angabe nicht verwertet, und so war die Konfusion um so gröfser geworden. In den „*Nouvelles de la republique des lettres*“ im Septemberheft hatte ein gewisser Abbé D. C. (Catelan) geantwortet, aber ohne rechtes Verständnis für die Sache, so erzählt Leibniz in dem Brief an Arnauld weiter. Am 4. März 1687 antwortet Arnauld, dafs der Abbé Catelan, Leibniz' Gegner, als geschickter Geometer in Frankreich bekannt sei; doch könne ja der Meinungsaustausch zwischen jenem und Leibniz nur geeignet sein, jene mechanische Streitfrage aufzuklären und sie definitiv zu entscheiden. Auch im Briefe Leibniz' vom 30. April 1687 wird die Kontroverse wieder erwähnt. Er erkundigt sich nach Arnaulds Urteil über seine Entgegnung an Catelan in den *Nouvelles de la republique des lettres.* Jener möge ja ein gelehrter Mann sein, was er aber gegen ihn (Leibniz) und Huygens geschrieben habe, sei ein wenig voreilig gewesen. Am 1. August 1687 berichtet Leibniz an Arnauld weiter, dafs an Stelle Catelans jetzt der berühmte Malebranche gegen ihn die Feder ergriffen habe. Dieser letztere gebe zu, dafs einige der von ihm verfochtenen Bewegungsregeln sich nicht recht aufrecht erhalten liefsen, wohl deshalb, weil er sie auf die Annahme einer unendlichen Zeitdauer

gegründet habe, die es in der Natur nicht gäbe. Leibniz ist der Ansicht, dafs dieser Umstand unwesentlich sei; in dem Briefe an Arnauld führt Leibniz fort: *„Et c'est un défaut des raisonnemens de M. des Cartes et des siens, de n'avoir pas considéré, que tout ce qu'on dit du mouvement, de l'inégalité et du ressort, se doit vérifier aussi quand on suppose ces choses infinement petites, ou infinies. En quel cas le mouvement (infinement petit) devient repos; l'inégalité (infiniment petite) devient égalité; et le ressort (infiniment prompt) n'est autre chose qu'une dureté extrême; à peu-près comme tout ce que les géomètres démontrent de l'ellipse se vérifie d'une parabole, quand on la conçoit comme une ellipse dont l'autre foyer est infiniment éloigné. Et c'est une chose étrange de voir que presque toutes les regles du mouvement de M. de Cartes choquent ce principe, que je tiens aussi infaillible en physique qu'il l'est en géométrie, parceque l'Auteur des choses agit en parfait géomètre. Si je replique au R. P. Malebranche, ce sera principalement pour faire connoître le dit principe, qui est d'une très-grande utilité, et qui n'a guere encore été considéré en général, que je sache."* Die Gesetze der Bewegung müssen auch für unendliche Verhältnisse ihre Gültigkeit besitzen, denn in der Natur sind Ruhe und Bewegung, Gleichheit und Ungleichheit, keine Gegensätze sonst könnte kein Übergang von einem zum anderen stattfinden. In der kontinuierlichen Veränderung verschwinden die Gegensätze — *natura non facit saltus* —; diese aber bedingt den Begriff des Unendlichkleinen, des Differentials, als ihres Elementes. Leibniz teilt hier also Arnauld sein berühmtes Stetigkeitsgesetz, Gesetz der Kontinuität, noch vor der eigentlichen Publikation desselben mit; sie geschah in Leibniz' Aufsatz: *Principium quoddam Generale non in Mathematicis tantum, sed et Physicis utile cuius ope ex consideratione Sapientiae divinae examinantur Naturae Leges, qua occasione nata cum R. P. Mallebranchio controversia explicatur, et quidam Cartesianorum errores notantur.* (Leibnizausgabe von Gerhardt Bd. VI, S. 129, veröffentlicht in den *Nouvelles de la republique des lettres.*)

Der Streit zieht sich aber noch hin. Im Briefe vom 28. August 1687 spricht Arnauld von einer weiteren Entgegnung Catelans vom Juni desselben Jahres. Catelan und Malebranche haben also neben einander Leibniz' Kraftmafs bekämpft. Arnauld findet, dafs Catelan auch diesmal nicht in Leibniz' Gedanken eingedrungen sei: *„Mais il n'a peut-estre pas bien pris vostre pensée."* Wir sehen in diesen Worten, dafs Arnauld, der ja selbst hervorragender Cartesianer ist, leidenschaftslos beginnt, Leibniz' besserer Einsicht nachzugeben. Mit den warmen Worten: *„C'est pourquoi je m'estime heureux d'avoir rencontré en vous un censeur également exact et équitable"* dankt ihm Leibniz dafür im Briefe vom 9. Oktober 1687. Im September erwiderte Leibniz auf Catelans fortwährende Angriffe;

aber er hatte der Wortkämpfe genug und legte dem Abbé ein geometrisch-mechanisches Problem vor: die Curve zu finden, in welcher ein schwerer Körper so fällt, dafs er in gleichen Zeiträumen der Horizontalebene um einen gleichen senkrechten Abstand sich nähert. Dies erzählt Leibniz im Briefe vom 14. Januar 1688 Arnauld. Er sagt: *„Afin de dire quelque chose d'util, j'ai proposé un problème*[1]) *... qui est de trouver une ligne que j'appelle isochrone, dans laquelle le corps pesant descend uniformement et approche, également de l'horison en temps égaux, non obstant l'acceleration qui luy est imprimé, que je recompense par le changement continuel de l'inclination ... Mon dessin étoit d'excercer un peu M. l'Abbée ou ses amis et de leur faire experimenter si l'analyse ordinaire va aussi loin qu'on s'imagine. Mais M. Huygens a jugé ce problème digne de le resoudre luimême. Aussi l'aurions-nous peut être attendu longtemps de la part de M. l'Abbée. Nous verrons ce qu'il en dira ... Il est vraye que lorsqu'on sçait une fois la nature de la ligne que M. Huygens a publiée, le reste s'acheve par l'analyse ordinaire. Mais sans cela la chose est difficile. Car la converse des tangentes ou data tangentium proprietate invenire lineam (où se réduit ce problème proposé) est une question dont M. des Cartes luy même a avoué dans ses lettres n'estre pas maistre. Car le plus souvent elle monte aux transcendentes (comme je l'appelle) qui sont de nul degré, et quand elle s'abbaisse aux courbes d'un certain degré (comme il arrive icy) un analyste ordinaire aura de la peine à le reconnoistre."* Es war dies eine umgekehrte Tangentenaufgabe. Das erste Problem dieser Art war die Debeaunesche Aufgabe gewesen, die Leibniz 1675 löste und 1684 am Schlufs seines Aufsatzes *„Nova methodus"* veröffentlicht hatte. Im April 1689 in den *A. E.* gab Leibniz die eigene Lösung seines Isochronenproblems. In dem Briefe, der uns soeben beschäftigt hat, kommt Leibniz noch auf seine *Characteristica generalis;* er erzählt, er habe hübsche Resultate *„j'ay des definitions, axiomes, theoremes et problèmes fort remarquables de la coincidence, de la determination (ou de unico), de la similitude, de la relation en général, de la puissance ou cause, de la substance, et par tout je procede par lettres d'une manière precise et rigoureuse, comme dans l'algebre."* Er möchte von Arnauld wissen, wie man wohl diese Ergebnisse an die Wahrscheinlichkeitsrechnung anschliefsen könne. *„Mais comment (me dirés vous) peut on appliquer ce calcul aux matieres conjecturales? Je réponds que c'est comme Messieurs Pascal, Huygens et d'autres on donné des demonstrations de alea. Car on peut determiner le plus probable et le plus sur autant qu'il est possible de connoistre ex datis."* In dem schon

1) Der Text in der Gesamtausgabe von Arnaulds Werken weicht von Grotefends Ausgabe unwesentlich ab.

erwähnten wichtigen Briefe aus Venedig, dem letzten, bespricht Leibniz seine Theorie der Planetenbewegung, die er in den *A. E.* 1689 in der Abhandlung: „*Tentamen de motuum coelestium causis*“ niedergelegt hat. Hier in dem Briefe an Arnauld sagt er darüber:

„*Il y a déjà quelque tems que j'ai publié dans les Actes de Leipsic un essai pour trouver les causes physiques des mouvemens des astres. Je pose pour fondement que tout mouvement d'un solide dans le fluide, qui se fait en ligne courbe ou dont la vélocité est continuellement diforme, vient du mouvement du fluide même. D'où je tire cette conséquence, que les astres ont des orbes déférens, mais fluides. J'ai demontré une proposition importante générale, que tout corps qui se meut d'une circulation harmonique (c'est-à-dire en sorte que les distances du centre étant en progression arithmétique, les vélocités soient en progression harmonique, ou réciproques aux distances) et qui a de plus un mouvement paracentrique, c'est-à-dire de gravité ou de lévité à l'égard du même centre (quelque loi que garde cette attraction ou répulsion) a les aires necessairement comme les tems, de la manière que Kepler l'a observée dans les planètes. Puis considerant ex observationibus que ce mouvement est elliptique, je trouve que le corps du mouvement paracentrique, lequel joint à la circulation harmonique décrit des ellipses, doit être tel que les gravitations soient réciproquement comme les quarrés des distances, c'est à dire comme les illuminations ex sole.*“

Leibniz leitet die Bewegung der Planeten aus der Kreisbewegung des umgebenden Mediums ab und gelangt zu den Keplerischen Ellipsen und zu Newtons Gesetz. Auch der letzte Passus des Briefes ist mathematischer Natur:

„*Je ne vous dirai rien de mon calcul des incrémens ou différences, par lequel je donne les touchantes sans lever les irrationalités et fractions, lors même que l'inconnue y est enveloppée, et j'assuettis les quadratures et problèmes trancendans à l'analyse. Et je ne parlerai pas non plus d'une analyse toute nouvelle, propre à la géométrie, et différente entièrement de l'algebre; et moins encore de quelques autres choses, dont je n'ai pas encore eu le tems de donner des essais, que je souhaiterois de pouvoir toutes expliquer en peu de mots pour en avoir votre sentiment, qui me serviroit infiniment si vous aviez autant de loisir que j'ai de déférence pour votre jugement.*“

Wir haben diese Stelle, wie auch hinsichtlich des philosophischen Teils schon bemerkt wurde, als eine kurze Rekapitulation der früheren Bemerkungen aufzufassen. Alle diese fortlaufenden Berichte Leibniz' über seine Resultate auf mathematischem Gebiete liefern den unumstöſslichen Beweis, daſs er im Verkehr mit Arnauld in Paris sich die Überzeugung gebildet hatte, daſs dieser auch für die Fragen der höheren Mathematik volles Verständnis und eine geschätzte Beurteilungsfähigkeit besessen hat. Einen

wichtigen Beleg hierfür bildet auch die Thatsache, dafs Arnauld zu den Personen gehörte, welche von Huygens ein Dedikationsexemplar[1]) seines berühmten Werkes: *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae,* Parisiis F. Muguet 1673 fol. erhielten; wie wichtig diese Gabe für Leibniz wurde, erzählt uns M. Cantor in seinen *„Vorlesungen"* Bd. III S. 78. — Auch auf philosophischem Terrain ist Arnauld später mit Huygens in Berührung gekommen. Der berühmte Physiker hatte 1692 einen philosophischen Versuch verfafst *„De veritate aeterna, sapientia et justitia aeterna"*. Dagegen schrieb Arnauld eine Dissertation *„Bipartite"*, die wiederum von einem Benediktinerpater Lami, der auch gegen Spinoza und Leibniz die Feder führte, angegriffen wurde. Gegen ihn wandte sich Arnauld mit seiner Schrift *„Regles du bon sens . . . pour bien juger des Ecrits polemiques dans des matières de Sciences"* 1693.

Wir haben jetzt wieder auf Arnaulds äufsere Schicksale zurückzugreifen. Nachdem seine Rehabilitation durch den Frieden Clemens' IX. im Jahre 1669 erfolgt war, machte Arnauld mehrere Reisen, schlofs Freundschaft mit dem Dichter Boileau, dessen Satiren er in einer kleinen Schrift verteidigte, worüber dieser so entzückt war, dafs er ihm folgende Verse widmete, die zugleich seine (Boileaus) Grabschrift bilden sollten:

Arnauld le grand Arnauld fit mon apologie
Sur mon tombeau futur mes vers, pour l'enoncer,
Courés en lettres d'or de ce pas vous placer!

und versöhnte sich mit Racine, dem berühmten Schüler von Port royal, mit dem er sich wegen der *„Phaedra"* überworfen hatte. Aber seine alten Feinde liefsen nicht nach, ihn bei Hofe zu verdächtigen, wie sogar nach seinem Tode die Jesuiten noch bewirkt haben sollen, dafs Arnaulds und Pascals Porträts und Elogien aus dem Werke M. Perraults: *„Les hommes illustres qui ont paru en France pendant ce Siècle, avec leurs portraits au naturel"* Paris 1696 fol. vom Verleger entfernt werden mufsten, worauf man das Wort des Tacitus anwandte: *„Praefulgebant eo ipso, quod effigies eorum non visebantur."*

Arnauld empfing in seiner Wohnung in dem Faubourg Saint-Jaques oft Besuche seiner zahlreichen Freunde, und so wurde es seinen Widersachern leicht, den Glauben zu erwecken, dafs er Konspirationen der Jansenisten gegen den König anzetteln wolle. Als seine mächtigen Gönner, wie der Herzog und die Herzogin von Longueville, gestorben waren, legte

1) Chr. Huygens, *Oeuvres complètes, Publiées par la Société Hollandaise des Sciences, la Haye 1888* — Tom. VI. S. 321 in einer Fufsnote, welche Huygens' *Adversaria* (Notizbücher) entstammt.

man Arnauld nahe, Paris zu verlassen. So mufste er 1679 ins Exil gehen. Die gastlichen Niederlande nahmen ihn auf; hier lebte er zunächst in Fontenay-aux-Roses und dann in Mons in Flandern. Hier in seinem niederländischen Refugium entstanden die Schriften, welche bezeichnend sind für

Arnaulds antagonistisches Verhalten gegen Malebranche und den Occasionalismus.

Es ist bekannt, wie Malebranche, der berühmte *„Auteur de la recherche de la vérité“*, das Cartesianische System auf dem Wege zu Spinoza konsequent weiter gebildet hat. Wir beabsichtigen hier nicht, eine eingehende Darstellung seiner Lehren zu geben, sondern rufen nur die charakteristischen Sätze in Erinnerung, indem wir Kuno Fischers vollendete Interpretation im II. Bande seiner *„Geschichte der neueren Philosophie“* zugrunde legen. Malebranche bejaht die Substantialität der Ausdehnung, aber deren Modifikationen, die Körper, sind an sich absolut unwirksam; seine Lehre ist *„gewissermafsen die Mortifikation der Materie“*. Die Körper sind nicht Ursache der Wirksamkeit, sondern sie sind nur Instrumente, nur zufällige, occasionale Ursache. Es giebt nur eine wahrhafte Ursache: das ist Gott. *„Das Universum ist in Gott, aber nicht Gott im Universum“*, so grenzt Malebranche sein System gegen Spinoza ab. Gott ist der Urheber sowohl der Ruhe als der Bewegung in der Körperwelt. Die Welt ist gesetzmäfsig, weil der göttliche Wille beharrt und konstant ist. Die Gotteserkenntnis ist unter allen Einsichten die klarste und deutlichste; unsere Selbsterkenntnis hat den Charakter unmittelbarer Gewifsheit, aber die Natur des Geistes ist nicht so evident, wie die des Körpers — hier tritt Malebranche in Gegensatz zu Descartes —, daher ist die Mathematik klarer als die Psychologie. Wären Seele und Körper in gleichem Grade erkennbar, *„so müfste man aus der denkenden Natur mit derselben Leichtigkeit und Klarheit die Farben und Töne herleiten können, als aus der ausgedehnten die Figuren des Dreiecks, des Quadrats u. s. f.“* Die Körper können nur durch Ideen erkannt werden. Die Ideen aber — das Problem ihres Ursprungs im menschlichen Geiste wird nach allen Seiten und Möglichkeiten von Malebranche eingehend erörtert — sind und bleiben nur in Gott. Die Erkenntnis der Dinge ist aber nur möglich durch die Ideen, also sehen wir die Dinge in Gott. Die Ideen der einzelnen Körper sind nur Modifikationen der Idee der Ausdehnung, diese Idee der Ausdehnung ist Malebranches intelligible Ausdehnung, der Archetyp der Körperwelt. Diese allgemeinste Idee ist Objekt der *„allgemeinen Vernunft“*, d. h. sie wird

von allen Geistern gleich geschaut, und die *„allgemeine Vernunft“* ist die göttliche, Gott ist der Ort der Geister, und er schaut in sich die intelligible Ausdehnung, welche die Ideen der Körper in sich schliefst, d. h. wir sehen die Dinge in Gott. Malebranches Lehre neigt schon stark zum Pantheismus, ja sie geht, wenn man den Unbegriff der intelligiblen Ausdehnung eliminiert, restlos in den Spinozismus auf. Das fühlte Arnaulds feiner metaphysischer Instinkt. Er beschlofs also, Malebranches von seinem (Arnaulds) Standpunkt verderblich erscheinenden Spekulationen planmäfsig zu bekämpfen. Arnauld und Malebranche waren, ehe jener langdauernde litterarische Streit ausbrach, persönlich sehr befreundet. Malebranche hatte sich das unerreichbare Ziel gesteckt, Religion und Philosophie seiner Zeit in einem *„Traité de la nature et de la grâce“* zu versöhnen. Darüber wünschte er Arnaulds Ansicht zu hören, und man veranlafste 1678 eine Zusammenkunft beim Marquis von Roney. März 1680 erhielt er einen Brief von Malebranche, worin dieser eine Schrift ankündigte über die vor zwei Jahren besprochenen Gegenstände. Arnauld verschob die Antwort und erfuhr unterdessen, dafs der Druck im Werk sei. Arnaulds erster Gedanke war, denselben zu hintertreiben, um seinem Freunde einen Dienst zu erweisen und jenen abzuhalten, Dinge zu veröffentlichen, von deren Unrichtigkeit er persönlich überzeugt war. Aber das Buch erschien trotz seiner Bemühungen. Er griff also zur Feder, nachdem er Malebranche seine Absicht mitgeteilt, und jener gegen eine Kritik nichts einzuwenden hatte, und zwar wollte er zuerst den philosophischen Teil, Malebranches Ideenlehre, entkräften. Unter Arnaulds Händen wuchsen seine Entwürfe zu dem Buche aus: *„Des vraies et des fausses idées“*. Obwohl die Einwürfe in rücksichtsvollem Tone eines Freundes vorgetragen waren, veranlafsten sie in dem Briefe vom 15. Januar 1684 eine leidenschaftliche Entgegnung Malebranches, worin dieser Arnauld vorwarf, dafs ihm die Sucht, vor seinen Anhängern zu glänzen, mehr gelte als die Liebe zur Wahrheit. Die nochmalige Entwickelung der occasionalistischen Ansichten war in elegantem Stil verführerisch dargestellt und liefs die starke Dunkelheit vieler Punkte übersehen. Dies war die Einleitung zu dem Streite zweier Geistesheroen, an dem die ganze gebildete Welt das gröfste Interesse nahm. Denn Malebranche und Arnauld galten für die ersten lebenden Philosophen Frankreichs. Malebranche hatte sich durch sein eingangs erwähntes Hauptwerk als feiner Metaphysiker und glänzender Schriftsteller gezeigt und Arnauld war ein durch vierzig Jahre erprobter Geisteskämpfer; die Verfolgungen, die er damals erduldete, hatten ihn mit dem Glorienschein eines Märtyrers seiner Sache umgeben. Malebranche warf seinem Gegner vor, er sei nicht mehr im-

stande, seine Ansichten zu verstehen. Selbst Anhänger des Occasionalismus aber sahen sich gezwungen anders zu urteilen und weit entfernt, einen durch lange Arbeit erschöpften Geist in ihm zu finden, konnten sie nicht umhin, dieselbe Kraft und Behandlungsart der Materie bei ihm wiederzuerkennen, die man von jeher an ihm bewundert hatte. Malebranche selbst konnte es sich nicht verhehlen; er sagte entschuldigend, er kämpfe gegen zwei mächtige Gegner, gegen Arnauld und dessen Ruf, und letzterer sei für ihn das Gespenst, das er nicht zu fassen vermöge und das jenem im Voraus zum Siege verhelfe. Im Jahre 1684 erschien Arnaulds Erwiderung auf Malebranches Brief unter dem Titel: *„Défense de M. Arnauld etc. contre la réponse au livre des vraies et des fausses idées“*. In dieser schlug nun auch er einen schärferen Ton an. *„Der hauptsächlichste Streitpunkt zwischen Malebranche und Arnauld betraf die Lehre von der göttlichen Vorsehung und Gnade, von der unbedingten, in jeder einzelnen Begebenheit wirksamen Prädestination, von der grundlosen göttlichen Willensfreiheit, die durch keinerlei Notwendigkeit und anderweitige Freiheit (menschliche Willensunabhängigkeit) zu binden sei oder eingeschränkt werden dürfe. Für Arnauld giebt es keine Anerkennung einer Notwendigkeit in Gott, jeder Versuch einer Theodicee, jede optimistische Weltansicht, welche den göttlichen Willen für verpflichtet hält, die vollkommenste und beste Welt zu schaffen, erschien ihm als ein naturalistischer, dem christlichen Glauben widersprechender Zug“* (Kuno Fischer). Arnauld bekämpfte mit einem Wort: *„la prétention, qu'on ne peut voir les corps que dans l'étendue intelligible; que ce qu'enseignoit S. Augustin, qu'on voit en Dieu les vérités éternelles et immutables, étoit plus différent que le jour ne l'est de la nuit de cette monstreuse philosophie de la vue du soleil, d'un cheval, d'un arbre dans une étendue intelligible qu'on prétend être Dieu.“* (In der Schrift gegen Huygens.) Nacheinander erfolgten von Seiten Arnaulds die *„Reflexions philosophiques et theologiques“*, welche 1685 und 1686 in drei Bändchen in Duodez erschienen, dann (im ganzen neun, zuerst sieben, dann noch zwei weitere) *Lettres de M. Arnauld, Docteur de Sorbonne, au Réverend P. Malebranche, Prêtre de l'oratoire, sur les idées générales, la grâce et l'étendue intelligible.* Besonders die sieben ersten Briefe galten als ein Meisterwerk und wurden viel bewundert. In den beiden späteren sucht Arnauld nachzuweisen, daſs Malebranche seine Ansicht von der *étendue intelligibile* nicht aufrecht erhalten könne, ohne Gott materiell zu machen. Jede der aufgezählten Schriften veranlaſste eine heftige Gegenschrift Malebranches, welche alle wieder Verteidigungen seiner Ansichten oft in denselben Worten brachten, und worin er nicht aufhörte, Arnaulds Loyalität anzuzweifeln. Die Einmischung Bayles, des Herausgebers der *„Nouvelles de la republique des lettres“*, veranlaſste eine

Replik Arnaulds *„Avis sur le prétendu bonheur des plaisirs de sens“* und eine längere Duplik Bayles im Dezemberheft genannter Zeitschrift 1685.

Für den Mathematiker interessant ist, dafs Malebranche im Verlauf der philosophischen Fehde Arnauld verspottete, dafs *dieser über Geometrie geschrieben habe: „sans avoir d'idée de l'objet unique de cette science, qui n'en avoit point d'autre que l'étendue intelligible“* (nach Malebranche). Arnauld erwiderte bescheiden: *„que le P. Malebranche n'avait pas toujours parlé de même sur sa Géométrie, puisqu'il y avoit renvoyé dans sa 'Recherche de la vérité' pour y apprendre cette science.“* Er fährt weiter fort: *„que sa Géométrie devoit avoir pour objet non l'étendue intelligible, mais l'étendue divisible et mobile, que d'ailleurs, nec l'ayant composé que par forme de divertissement, il n'avoit point eu un dessin si relevé que de faire une Géométrie Theologique et divine, comme elle l'auroit été, si elle avoit eu Dieu ou l'étendue itelligible pour l'objet.“ (Défense de M. Arnauld contre la Replique au livre des vraies et des fausses Idées V. Part. XI. Exemple à la fin.)* Wirklich hatte Malebranche einst in seinem Hauptwerke Arnaulds Lehrbuch zum Studium der Geometrie, die von Malebranche sehr hoch geschätzt wurde, empfohlen. Die Antwort Arnaulds ist eine beifsende Satyre gegen Malebranches *étendue intelligible,* ein Zug, der überhaupt Arnaulds Polemik oft durchweht.

Der Streit war schon mehrere Jahre beigelegt, als Régis, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, Malebranche wegen dreier Lehren seines Systems angriff, nämlich hinsichtlich seiner Ideenlehre, des sinnlichen Vergnügens und seiner sittlichen Würdigung und wegen dessen Ansicht über die sichtbare Gröfse der Gegenstände, eine optische Frage, in welcher Malebranche die Auffassung Descartes' acceptiert und weiter entwickelt hatte. Régis verwies hinsichtlich der beiden ersten Punkte auf Arnauld, der Malebranches Meinung glänzend widerlegt habe. Der vielgeplagte Malebranche antwortete in einem offenen Briefe im Märzheft des *„Journal des Sçavans“,* es sei weder seine Sache, noch aber die des Régis, zu entscheiden, ob wirklich Arnauld in jenem Streite die Oberhand behalten habe, da sie beide nicht unparteiisch seien und deshalb nicht objektiv urteilen könnten. Er führe gegen Arnauld den hl. Augustin ins Feld, welcher in seinen Werken mit ihm (Malebranche) übereinstimme. Jetzt trat auch Arnauld wieder hervor; er erwiderte in zwei Briefen, welche im *„Journal des Sçavans“* erschienen (Juni und Juli 1694). Bald nach seinem zweiten Briefe bekam Arnauld eine Antwort Malebranches gegen Régis zu Gesicht; er zögerte nicht, sich in einem dritten Briefe noch ausführlicher zu äufsern, worin er sagt, dafs er hinsichtlich der erkenntnistheore-

tischen und moralischen Frage mit Régis übereinstimme, inbezug auf das optische Problem aber immer der Ansicht Malebranches gewesen und durch die Erklärungen, welche jener in seiner „*Recherche de la vérité*“ über den Gegenstand gäbe, noch wesentlich darin bestärkt worden sei. Malebranches Erregung wurde hierdurch nicht beschwichtigt, er liefs seinerseits noch zwei weitere Briefe im „*Journal des Sçavans*“ drucken, der erste vom 1., der zweite vom 7. Juli. Arnauld setzte ihm einen vierten Brief entgegen, welcher vom 25. Juli datiert ist. Es war die letzte Äufserung Arnaulds in dem langen Federkriege. Am 8. August 1694 starb Arnauld zu Brüssel, nach andern in einem Dorfe unweit Lüttich. Malebranche konnte es sich nicht versagen, 1704 nochmals eine Antwort auf den dritten und vierten Brief zu veröffentlichen, welche ihm erst fünf Jahre nach dem Tode des Verfassers zu Gesicht gekommen seien; er behauptete darin, dafs jene vier Briefe, welche unter dem Namen Arnaulds gegen ihn veröffentlicht worden seien, gar nicht von jenem herrührten.

Arnauld hatte sich bis in sein hohes Alter — er wurde zweiundachtzig Jahre alt — seine Geistesfrische bewahrt. Am 18. November 1680 schreibt Huygens an Leibniz: „*Mr. Arnaut* (so schreibt Huygens den Namen immer) *est en ce pays, ou fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse*“ (Gerhardt, *der Briefwechsel Gottfried Wilhelm Leibniz' mit Mathematikern* Bd. I S. 616). Ebenda äufsert sich Leibniz gegen Tschirnhaus über jenen Streit und über Malebranche: „*Je m'étonne que Messieurs Arnaud et Malebranche, qui estoient si bons amis, quand j'estois à Paris, écrivent maintenant l'un contre l'autre; je n'ai pas encore lû leurs écrits opposés, mais autant que je puis juger par leurs autres ouvrages, le Père Malebranche a beaucoup d'esprit, mais Mons. Arnaud écrit avec plus de jugement. Il y a quantité de jolies pensées dans la Recherche de la vérité, mais il s'en faut beaucoup que l'auteur ait pénétré bien avant dans l'analyse et généralement dans l'art d'inventer, et je ne pouvois m'empêcher de rire quand je voyois, qu'il croit l'Algèbre la première et la plus sublime des sciences, et que la vérité n'est qu'un rapport d'égalité et d'inégalité, que l'Arithmétique et l'Algèbre sont les seuls sciences qui donnent à l'esprit toute la perfection et toute l'estendue dont il est capable, enfin que l'Arithmétique et l'Algèbre sont ensemble la veritable Logique. Et cependant je ne voy pas que luy même ait grande connoissance de l'Algèbre. Les louanges qu'il donne à l'Algèbre, se devroient donner à la Symbolique en général dont l'Algèbre n'est qu'un echantillon assés particulier et assés borné.*“

Nachdem wir Arnaulds Leben geschildert und seinen geistigen Verkehr mit den grofsen Philosophen der Zeit entwickelt haben, wobei wir

auch speziell den mathematischen Gegenständen in den Beziehungen zu Leibniz erhöhte Aufmerksamkeiten zuwandten und das Urteil jener Männer über Arnaulds mathematische Qualitäten kennen lernten, wenden wir uns jetzt in dem zweiten Teile vorliegender Arbeit zur Besprechung von Arnaulds eigenen litterarischen Produktionen und deren Bedeutung im Gebiete der mathematischen Wissenschaften.

Für die äufseren Lebensdaten der Biographie Arnaulds haben wir benützt:

1) (Quesnel), *Histoire abregée de la vie et des ouvrages de Mons. Arnauld.* A Cologne, chez Nicolas Schouten. MDCLXXXXV, mit Portrait Arnaulds.

2) I. M. Schröckh, *Arnauld, A., Doktor der Sorbonne,* Leipzig (in I. M. Schröckhs *Lebensbeschreibung berühmter Männer.* Leipzig, 2 Bde. 1789/91).

3) Höfer, *Nouvelle biographie générale.* Paris 1855—66. 46 vols. Artikel: *Arnauld, Antoine.*

4) Saint-Beuve, *Port-Royal,* Tom. II. 2 éd. Paris 1860.

Sammlung der Werke.

Die Werke Arnaulds wurden 84 Jahre nach seinem Tode in einer monumentalen Gesamtausgabe vereinigt. Nachdem schon im Jahre 1759 ein Prospekt veröffentlicht worden war, stellte der Tod des Papstes Benedikt XIV. das Unternehmen in Frage, da unter seinem Nachfolger Clemens XIII. ein Systemwechsel eintrat. Erst 1774 konnte man daran denken, mit einem neuen Prospekte hervorzutreten; die nun rasch nacheinander veröffentlichte Ausgabe umfafst 42 Bände und erschien unter dem Titel: *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld Docteur de la Maison et Société de Sorbonne. A Paris et se vend à Lausanne chez Sigismond d'Arney et Compagnie.*

Die Werke sind eingeteilt in acht Klassen; die ersten vier Bände enthalten:

I. die Briefe vom Jahr 1637—1676,
II. „ „ „ „ 1677—1687,
III. „ „ „ „ 1687—1694,
IV. „ „ „ „ 1694,

sowie ein Supplement, enthaltend die Briefe, welche sich während der Herausgabe noch vorfanden, ferner eine Appendix, enthaltend diejenigen, zu welchen die Antworten fehlten, darunter die Leibniz'; erstmals waren die Briefe 1727 (der letzte Band 1743) gesammelt in neun Duodezbändchen erschienen, ohne die neun Briefe an Malebranche.



Die ersten sechs Klassen, Bd. V—XXXVII, umfassen die theologischen Schriften, die siebente bilden die philosophischen mit Bd. XXXVIII, XXXIX und XL. In der achten Klasse sind die Werke aus den übrigen Wissenschaften vereinigt; wir heben hervor: in Bd. XLI die Logik Arnaulds *„La logique ou l'art de penser"*, in Bd. XLII die *„Nouveaux Elémens de Géométrie"*.

Zweites Kapitel.

Besprechung von Arnaulds mathematischen Arbeiten und deren Bedeutung.

Seine Thesen und die Logik von 1662.

Wir beginnen in chronologischer Reihenfolge mit Arnaulds mathematischen Thesen und lassen deren Wortlaut hier folgen. Dieselben wurden, wie wir schon im ersten Teile ausführten, am 25. Juli 1641 vor der Sorbonne verteidigt.

Ex Mathematicis.

I. *Male profecto de Philosophia meritus, qui ab illius studio mathematicum pulverem*[1]) *eiecit. Obscuritas, quae multos deterret, saepe non doctrinae, sed Doctoris. Nec immerito Ptolemaeus Rex ab Euclide postulavit compendiariam magis ad geometriam viam, quam eius Elementorum. Vera quidem illic omnia, sed ordine praepostero plerumque tradita. Res per se clarissimae nimio demonstrandi studio obscuriores redditae. Innumera non aliunde probata, quam ab impossibili, quod ἐπιστημικόν non est. Probationes denique fere omnes extrinsecus adductae non ex natura figurarum.*

II. *Rectam datae rectae aequalem describere non problematis locum habere debet, sed postulati. Omissum in Elementis angulorum aequalium axioma infinitam obscuritatem peperit. Angulorum ad basim aequalitas in triangulo aequicruro vitiose admodum ab Euclide vel Theone demonstratur. Quod in 16. et 17. Prop. lib. I traditur ab Histerologia non potest excusari. Duo trianguli latera reliquo esse maiora, notius per se est quam Euclidis demonstratione. Quod aequalis altitudinis et basis parallelogramma sint*

1) *pulvis mathematicus* der grüne Glasstaub oder Sand, worin die antiken Mathematiker mit einem Stäbchen ihre Figuren zeichneten, daher fig. für die Wissenschaft selbst auch *pulvis eruditus* an mehreren klassischen Stellen, vgl. Heinichen, *Lat. Wörterbuch* Art. *pulvis*.



aequalia, sine ullis triangulis et trapeziis, ex sola parallelogrammi natura demonstrari potest. Nullus est angulus contactus; et rectus est angulus semicirculi.

III. *Astronomia geometriae soboles revolutionum coelestium leges, mundanorumque corporum situm et ordinem contemplatur. Ut perfecta sit, non solius calculi, sed etiam naturae tactionem habere debet. Systema Ptolemaicum undique vitium facit. Si lunam excipias errorum omnium sol centrum est. Circa terram volvitur luna sphaerica, opaca, et prorsus obscura. Laevem et perfecte politam non esse, sed scaprosa admodum et aspera superficie non modo telescopium ostendit, sed etiam opticae rationes evincunt.*

IV. *Quod terram in mundi centro immotam stare credamus, magis auctoritati quam rationi debemus. Nullis siquidem hactenus argumentis vel astronomicis vel physicis immobilitas terrae demonstrata est. Vana sunt praesertim, quae vulgo desumi solent a motu gravium ad perpendiculum cadentium: inanis etiam metus ne per terrestrem vertiginem aedificia corruerent, ne aves nidos suos repetere non possent. Non minus terra lunam illustrat quam luna terram; et eadem, eiusdemque periodi, phasium in utraque varietas.*

Es ist, um zunächst von den astronomischen Sätzen zu reden, ein ehrendes Zeichen von Arnaulds geistiger Freiheit und seiner durch nichts einzuschüchternden Liebe zur Wahrheit, dafs er, der junge Kleriker, hier zwar in vorsichtiger Form, aber in unverkennbarer Weise sich für das Kopernikanische System entscheidet; denn der Satz „*Quod terram in mundi centro immotam stare credamus, magis auctoritati debemus, quam rationi. Nullis siquidem hactenus argumentis vel astronomicis vel physicis immobilitas terrae demonstrata est*“ ist richtig betrachtet genau dasselbe wie Galileis „*E pur si muove*“[1]); und das im Jahre 1641, nachdem im Jahre 1633 erst Galilei von der römischen Inquisition verurteilt worden war und dessen Lehre nicht einmal als Hypothese auftreten sollte, „*quamvis hypothetice a se illam proponi simularet*“. Descartes hatte sich bekanntlich (s. Kuno Fischer Bd. I S. 207) die Herausgabe seines kosmologischen Werkes durch jenes Urteil verleiden lassen. Arnauld rügt offen die kindisch-lächerlichen Einwürfe der Gegner, dafs durch die Bewegung der Erde die Häuser einstürzen müfsten oder die Vögel ihre Nester nicht mehr finden könnten. Auch im übrigen sind Arnaulds astronomische Ansichten ganz vernünftig.

Die mathematischen Sätze beginnen mit einem Hinweis auf die Wichtigkeit mathematischer Schulung; sollte sich die Spitze des Wortes „*Male pro-*

1) Der Ausspruch „*E pur si muove*“ wurde von Galilei nicht gethan, sondern von spätern Schriftstellern ihm in den Mund gelegt, bezeichnet aber sehr treffend Galileis Haltung.

fecto de Philosophia meritus, qui ab illius studio mathematicum pulverem eiecit" gegen Bacon richten, der die hohe Bedeutung der Mathematik in seinem System nicht zu würdigen verstand, sodafs erst unter Hobbes' Einflufs jenes Einströmen und die enge Verknüpfung des mathematischen Elements mit den nach der Methode der Induktion betriebenen naturwissenschaftlichen Forschungen stattfand, welche in Newton ihre höchste Blüte und Vollendung erreichte? Schon hier setzt Arnaulds Euklidkritik ein, welche in seinen folgenden mathematischen Schriften einen immer prononcierteren Charakter erhält und als positives Ergebnis unter Pascals direktem Einflufs sein geometrisches Hauptwerk entstehen läfst. Schon einmal, ein Jahrhundert früher, hatte ein Mann von „*streitbarer Geistesveranlagung*", Petrus Ramus, in seinem Kampfe gegen die aristotelisch-scholastische Schule seine Angriffe gegen Euklid gerichtet. Aber die Zeit, welche ein wirklich neues und inhaltsvolles System der Elementargeometrie bringen sollte, war damals noch nicht gekommen. So blieb es von Seiten dieses Mannes bei unreifen Versuchen (vgl. S. 226). Die reformatorische Stellung gegen den grofsen griechischen „*Elementenschreiber*" prägt sich schon scharf in der kühn originalen Weise aus, in welcher Arnauld die bekannte Antwort Euklids auf die Frage des Ptolemaeus negiert: „*Nec immerito Ptolemaeus Rex ab Euclide postulavit compendiariam magis ad Geometriam viam quam eius Elementorum.*" Arnauld glaubt jenen geraden Pfad zu kennen. Wahr sind die Ergebnisse Euklids, aber eine natürliche, ungezwungene Architektonik des Gebäudes der Elementargeometrie erscheint unserm Autor unbedingt notwendig, und diese vermifst er bei dem Griechen. Dinge, welche an sich klar seien, also durch unmittelbare Anschauung einleuchteten, seien durch einen blinden Beweiseifer nur verdunkelt worden. Wenn M. Cantor in seinen „*Vorlesungen*" Bd. I S. 209 sagt, „*dafs die Alten sich der apagogischen Beweisführung, dieser indirekten Methode der Zurückführung auf das Gegenteil (namentlich bei sogenannten Exhaustionen immer, wo nur die synthetische Hypothese des Unendlichkleinen als Ersatz zu dienen vermag), wenn auch nicht gerade überwiegend, doch viel häufiger als die modernen Geometer bedienten, ja dafs in neuerer Zeit die indirekten Beweise nicht beliebt sind*", so sehen wir hier, dafs Arnauld derjenige war, welcher wohl zum ersten Male dieser Abneigung klaren Ausdruck gegeben hat: *Innumera non aliunde probata quam ab impossibili, quod ἐπιστημικὸν non est.* „*Der Grund liegt darin*", fährt M. Cantor l. c. erläuternd fort, „*dafs bei aller zwingenden Strenge für den Verstand der indirekte Beweis der Einbildungskraft keine vollständige Befriedigung zu gewähren pflegt. Ungezügelt umherschweifend sucht sie noch immer dritte Fälle ausfindig zu machen, welche neben der Existenz von Nicht-D eine Koexistenz von D zu-*

lassen, und nur schwer giebt sie sich gefangen, dafs wirklich die Einteilungsteile des Einteilungsganzen vollständig erschöpft wurden, dafs wirklich zwei sich ausschliefsende Thatsachen vorliegen, die nicht gleichzeitig gesetzt werden können." Sodann beanstandet Arnauld, dafs Euklid seine Beweise vielfach mit Hilfe fremder Bestandteile (*extrinsecus*), nicht aus der Natur der betreffenden Figur heraus führe. Im zweiten Absatz der Thesen wird die Kritik noch etwas weiter spezialisiert. Eine einer gegebenen gleiche Strecke abzutragen, müsse als Forderung, als Postulat eingeführt werden, da der Charakter einer Aufgabe, eines Problems hier nicht vorliege. Die Gleichheit der Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks werde von Euklid oder vielmehr Theon so gut wie fehlerhaft bewiesen. Arnauld denkt wohl hier an das nach seiner Ansicht vergessene Axiom über die Gleichheit zweier Winkel ($\gtrless$ als ein Rechter); zu den an sich evidenten Wahrheiten rechnet er den Satz, dafs die Summe zweier Seiten im Dreieck gröfser ist als die dritte. Dahin gehört nach ihm auch der Satz von der Flächengleichheit von Parallelogrammen gleicher Höhe und Basis. Mit dem letzten Satze: *„Nullus est angulus contactus, sed rectus est angulus semicirculi"* nimmt Arnauld Stellung zu einer wichtigen Frage, zu der über den Contingenzwinkel. Mit diesem gemischtlinigen Winkel, dem Winkel zwischen Tangente und Kreis, hat sich Euklid III 16 beschäftigt und daselbst bewiesen, dafs dieser kleiner ist als irgend ein geradliniger spitzer Winkel. Die Bezeichnung *angulus contingencie* tritt bei Jordanus Nemorarius im geometrischen Werke *„De triangulis"* im dritten Buche auf. Von da an hat er die Mathematiker fortwährend beschäftigt. Wir finden den Contingenzwinkel wieder bei Johannes Campanus erörtert, der Euklids Ansicht teilt. Ende des XVI. Jahrhunderts entbrannte über die Natur des Contingenzwinkels eine heftige Meinungsverschiedenheit. Der Franzose Jacques Peletier oder Peletarius hatte in seiner Euklidausgabe von 1557 erklärt, der in Rede stehende Winkel sei gar nicht als Winkel zu betrachten; er sei ein Nichts, und der Winkel, welchen der Halbkreis mit dem Durchmesser bilde, sei von einem Rechten nicht im mindesten verschieden. Peletarius hatte in scharfsinniger Weise seine Ansicht durchgeführt. Ein Gegner fand sich in dem Jesuitenpater Clavius. Dieser sagte in der von ihm veranstalteten Ausgabe Euklids (III. Ausgabe 1591), dafs damit ein neues Ergebnis nicht erzielt worden sei, denn Euklid hätte eben dann einfach III 16 bewiesen, dafs das Nichts kleiner sei als ein spitzer Winkel. Vielmehr müsse man annehmen, dafs der Contingenzwinkel wohl eine gewisse Gröfse, ein Etwas sei, aber ein Winkel anderer Art als der geradlinige. Damit war aber der Streit nicht beendigt; es bildeten sich zwei förmliche Parteien. Der Ansicht Peletiers pflichteten in der Folge

die ersten Mathematiker bei. Vieta vertritt sie mit einer neuen Beweisführung in seinem *„Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII.“* Dort heifst der Contingenzwinkel *cornicularis.* John Wallis gab 1656 eine Abhandlung heraus: *„De angulo contactus et semicirculi tractatus“,* worin er den Contingenzwinkel, einen *non-angulum,* ein *non-quantum* nennt. Dies veranlafste eine Entgegnung in der *Cyclomathia* des Leotaud (1662). Wir sehen aus dem Satze: *„Nullus et angulus contactus, et rectus est angulus semicirculi“,* dafs Arnauld dieselbe Überzeugung hat wie Peletarius, wie Vieta, wie Wallis. Die besprochenen Sätze sind zum grofsen Teile noch näher ausgeführt im IV. Abschnitt von Arnaulds Buch *„La Logique ou L'Art de penser“,* das wir schon im ersten Teile vorliegender Arbeit angekündigt und charakterisiert haben. Dieser IV. Abschnitt handelt von der Methode im allgemeinen und speziell von der der Geometer. In dem *„Discours sur le dessin de cette Logique“,* welcher dem ganzen Buche vorausgeht, sagt der Verfasser, dafs er besonders im vierten Abschnitt eine kleine, bis dahin nicht gedruckte Schrift eines ausgezeichneten Geistes mit verarbeitet habe, die von jenem betitelt worden sei: *„De l'esprit géométrique“;* hier also in Arnaulds *Logik* von 1662 ist Pascals gröfseres Fragment über die *„Methode der geometrischen Beweisführung“* zuerst genannt und der Inhalt veröffentlicht worden. Wir legen der Übersicht über den ganzen für die Geschichte der Mathematik bemerkenswerten IV. Abschnitt die erste, sehr seltene Ausgabe von 1662 zugrunde. Das erste Kapitel handelt von der analytischen und der synthetischen Methode. Arnauld beginnt mit der Definition der Methode im allgemeinen: *„Es ist Methode: Die Kunst, eine Folge von Gedanken wohl anzuordnen, sei es um die Wahrheit zu entdecken, wenn wir noch nicht im Besitz derselben sind, sei es um eine Wahrheit andern zu beweisen, wenn wir sie schon kennen.“* Dem ersten Falle entspricht die analytische Methode, *méthode de resolution* oder *méthode d'invention,* dem zweiten die synthetische, *méthode de composition* oder *méthode de doctrine.* Bei der analytischen setzt man voraus, dafs das Gesuchte nicht vollständig bekannt ist, aber dafs man darauf kommen kann, indem man die Angaben darüber ins einzelne prüft und das Ergebnis dieser Prüfung benützt, um zu dem Gesuchten zu gelangen. Bei beiden Methoden aber ist Grundregel, von dem Bekannteren zum weniger Bekannten fortzuschreiten; dieser stillschweigenden Annahme mufs sich jede wahre Methode fügen. Was aber die analytische von der synthetischen Methode unterscheidet, ist, dafs man zu bekannten Wahrheiten durch die eingehende Prüfung des Gegenstandes gelangt, und nicht wie bei der synthetischen gleich zu Anfang allgemeinere Wahrheiten etabliert, aus denen man die Wahrheit seines speziellen Objektes herleitet. Als treffendes Bei-

spiel wird die Genealogie einer Person durchgeführt. Hieraus ergiebt sich sehr einfach, wie die Geometer verfahren, wenn ihnen eine Frage vorgelegt wird, deren Richtigkeit oder Unrichtigkeit im Falle eines Theorems, deren Möglichkeit oder Unmöglichkeit im Falle einer Aufgabe sie nicht kennen. Sie nehmen also an, die Sache sei so, wie behauptet wird; darauf ziehen sie die notwendigen Konsequenzen daraus und schliefsen, dafs die vorgelegte Behauptung richtig bezw. eine verlangte Aufgabe möglich ist, wenn unter diesen notwendigen Konsequenzen eine evidente Wahrheit sich befindet: wenn aber dieses Verfahren auf eine Absurdität oder Unmöglichkeit führt, so war jene erste Annahme von der Richtigheit falsch oder vielmehr der Satz ist unrichtig oder die betreffende Aufgabe ist unmöglich. Hatte der so eingeschlagene Weg ein positives Ergebnis, so gehen die Geometer beim Beweis eines Satzes oder der Möglichkeit einer Aufgabe von jener Wahrheit aus, zu der sie das analytische Entdeckungsverfahren geführt hatte, und liefern ihn durch die entgegengesetzte, die synthetische Methode. Die Auffindung einer Wahrheit durch Analysis sei mehr Sache einer gewissen Urteilskraft und Geschicklichkeit, als bestimmter Regeln. Zur Vermeidung des Irrtums, so fährt Arnauld fort, leisteten aber jene vier von Descartes aufgestellten Regeln sehr gute Dienste:

1) *Man solle nie etwas für wahr halten, an dem man diese Eigenschaft nicht evident erkennt, d. h, sich sorgfältig vor Überstürzung oder Vorurteil hüten und nur solche Bestandteile in seine Urteile aufnehmen, die sich so klar dem Geiste darstellen, dafs man keinen Grund hat, daran zu zweifeln.*

2) *Jede Schwierigkeit in so viele Parzellen auflösen, als überhaupt möglich oder doch zu ihrer Überwindung notwendig sind.*

3) *Seine Gedanken in Ordnung so reihen, dafs man mit den einfachsten und leicht erkennbarsten Gegenständen beginnt und stufenweise zu den zusammengesetzteren aufsteigt, indem man selbst unter denjenigen eine Ordnung voraussetzt, welche auf den ersten Anschein sich nicht zwanglos zu folgen scheinen.*

4) *Überall so vollständige Aufzählungen machen und so allgemeine Übersichten geben, dafs man sicher sein darf, nichts vergessen zu haben.*

Freilich stellen sich der Anwendung dieser Regeln vielfach Schwierigkeiten entgegen, aber ihre bestmöglichste Anwendung garantiert auch eine weitgehende Sicherheit bei der Erforschung der Wahrheit, soweit sie der Vernunft erkennbar ist.

Im zweiten Kapitel wird nochmals speziell auf die synthetische Methode der Geometer eingegangen. Durch die Voranstellung allgemeinster und einfachster Wahrheiten vermeidet man Wiederholungen, die unfehlbar eintreten müfsten, wollte man die Arten vor der Gattung behandeln. Die geo-

metrische Methode ist die überzeugendste und sie befriedigt zugleich den Intellekt vollständig. Die Geometer wollen nur vollständig überzeugende Resultate zutage fördern und glauben dies durch Beobachtung der folgenden Regeln zu erreichen:

1) *Man lasse keinerlei Zweideutigkeit in den Bezeichnungen bestehen (ne laisser aucune ambiguité dans les termes).*

2) *Man stütze seine Überlegungen nur auf klare und evidente Prinzipien, die von niemand bestritten werden können (n'establier leurs raisonnemens que sur des principes clairs et évidens);* deshalb legen die Geometer vor allem ihre Axiome fest und verlangen, daſs man ihnen einräume, diese seien so klar, daſs sie durch Beweisversuche nur verdunkelt werden könnten.

3) *Man beweise alle seine Schlüsse demonstrativ (prouver demonstrativement toutes les conclusions qu'ils avancent), d. h. man benütze dazu nur die ausgesprochenen Definitionen, die zugestandenen Prinzipien oder Axiome und die hieraus durch Denkkraft hergeleiteten Sätze, welche so brauchbar wie die Axiome selbst für die weitere Beweisführung sind.*

Dieses sind die drei Hauptsätze; sie lassen sich weiter ausführen in fünf anderen. Es folgen die fünf positiven Vorschriften Pascals, die M. Cantor unter 2, 3, 5, 7, 8 in seinen *„Vorlesungen"* Bd. II S. 682 wiedergegeben hat. Wir benützen zu ihrer Aussprache M. Cantors Übersetzung:

Für die Definitionen.

1) *Man soll keinen dunkeln oder Zweifel gestattenden Ausdruck ohne Definition lassen.*

2) *Man soll bei den Definitionen nur solcher Wörter sich bedienen, welche entweder vollkommen bekannt sind oder vorher ihre Erklärung gefunden haben.*

Für die Axiome.

3) *Man soll als Axiome nur Dinge aufstellen, die an sich vollkommen einleuchtend sind.*

Für die Beweise.

4) *Man soll jeden Satz beweisen, dem irgend Dunkelheit anhaftet, und als Beweismittel nur sehr einleuchtende Axiome oder vorher schon Bewiesenes bezw. Zugestandenes anwenden;* bei Arnauld:

4) *Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les definitions qui auront précédé, ou les axiomes qui auront esté accordez, ou les propositions qui auront déjà esté demontrées, ou la construction de la chose mesme dont il s'agira, lors qu'il y aura quelque operation à faire.*

5) *Man soll fortwährend in Gedanken das Definierte durch seine Definition ersetzen, um nicht vermöge des vielfachen Sinnes von Wörtern, die*

innerhalb der Definitionen enger gefaſst würden, zu Irrtümern verleitet zu werden.

Kap. III ist den Definitionen gewidmet. Schon im ersten Abschnitt war mit Beziehung auf Pascal in Kap. X der Unterschied zwischen Verbaldefinition (*definition du nom, definitio nominis*) und der Realdefinition (*definition de la chose, definitio rei*) klargestellt worden. Die Nominaldefinitionen sind willkürlich und unanfechtbar und deshalb kann eine solche Definition die Stelle eines Prinzips vertreten. Dagegen hat eine Realdefinition durchaus den Charakter eines Theorems, das bewiesen werden muſs wie jeder Satz, und nur wenn jene an sich klar und evident ist, tritt sie als Axiom, als Prinzip auf. Natürlich müsse man dem Gegenstand einer Nominaldefinition nicht ohne weiteres Realität zuschreiben. Sehr oft würden Realdefinitionen aufgestellt, die sehr anfechtbar seien, von denen aber ihre Urheber durch Verwechslung glaubten, es seien Nominaldefinitionen, mithin Prinzipien, und man könne auf die Gegner derselben den Grundsatz anwenden: *contra negantem principia non est disputandum,* Deshalb sei es notwendig, gleichsam eine neue Sprache zu schaffen, indem man die gebräuchlichen Bezeichnungen ihrer Bedeutung ganz und gar entkleide. So könne man z. B. das Wort Parallelogramm, so paradox es klinge, für eine dreiseitige Figur gebrauchen, deren Winkelsumme zwei Rechten gleich sei, wenn man nur an der Bezeichnung konsequent festhalte, d. h. eine bestimmte, wohlunterschiedene Idee eindeutig dadurch fixiere. Wem fiele hier nicht Pascals souveräne Bezeichnung *„antobola“* für Ellipse ein, die in seinen Kegelschnittfragmenten wohl aus Gründen der Symmetrie mit *hyperbola* und *parabola* durchgeführt ist? Durch vernachlässigte oder nicht eindeutige Nominaldefinitionen bringen es viele sogenannte Philosophen zustande, mit Hilfe der klaren Idee einer Sache unklare und verworrene Seiten derselben Sache zu verfechten. Auch zur Abkürzung von langen Definitionssätzen dient eine Nominaldefinition, und dies ist ein nicht zu gering anzuschlagender Vorteil einer passend gewählten kurzen Bezeichnung gerade in geometrischen Abhandlungen. Diese Dinge werden im dritten Kapitel des vierten Abschnitts wieder aufgenommen, besprochen und mit speziellen historischen Beispielen belegt. So definiere Euklid den ebenen gradlinigen Winkel als: *Zusammentreffen zweier geneigter Geraden in derselben Ebene (La rencontre de deux lignes droites inclinées sur un mesme plan).* Gegen diese Nominaldefinition an sich könne man ja nichts einwenden; aber Euklid hat im Verlaufe nicht daran festgehalten, sondern ist in die natürliche Konzeption des Winkels zurückgefallen. Durch Substitution des Definierten an Stelle der Definition ergeben sich daher mancherlei Absurditäten und Inkonvenienzen. Wenn man einen Winkel

halbiere, so werde nicht das *„Zusammentreffen zweier Geraden“* halbiert. Auch hätte dieses keine Schenkel und keine Basis, sondern alle diese Eigenschaften kämen dem eingeschlossenen ebenen Winkelraum zu. Euklid sei wohl abgeschreckt worden, den ebenen Winkelraum einzuführen dadurch, dafs dieser gröfser oder kleiner sein könne, ohne dafs der Winkel selbst sich ändere. Gebrauche man dagegen folgende Definition: *Der Winkel ist ein zwischen zwei sich schneidenden Geraden liegender Flächenraum, unbegrenzt hinsichtlich der Dimension, welche der Länge der Geraden entspricht, und begrenzt in Bezug auf die zweite Dimension durch den proportionalen Teil des Umfangs eines Kreises, dessen Mittelpunkt mit dem Schnittpunkt jener beiden Geraden zusammenfällt,* so sei diese Definition so hübsch und reinlich, dafs sie zugleich als Nominal- und Realdefinition gelten könne. Auf Grund dieser Definition liefsen sich alle Eigenschaften des ebenen Winkels entwickeln, ohne dafs man nötig habe, in eine andere Vorstellung überzugehen. Besonders fliefse daraus mit Leichtigkeit der Begriff der Gleichheit zweier Winkel, der bei Euklid fehle, was schon Petrus Ramus bemerkt habe, ohne dafs diesem seine Verbesserungen sonderlich geglückt seien.

Ein zweites Beispiel von mangelhafter Nominaldefinition biete Euklids unklarer Verhältnisbegriff. Er definiert: *„La raison est une habitude de deux grandeurs de mesme genre, comparées l'une avec l'autre selon la quantité; Proportion est une similitude de raison.“* Auch die Differenz zweier Gröfsen sei eine solche Gröfsenbeziehung zwischen ihnen. Euklid habe also seine Definition zu eng gefafst, wenn bei ihm $3 \cdot 5 : 8 \cdot 10$ nicht als Proportion gelte. Er hätte also bemerken müssen, dafs man zwei Gröfsen auf zweierlei Arten vergleichen kann; dementsprechend seien zwei Bezeichnungen zu wählen: Differenz und Verhältnis. Ebenso hätte er die Proportion als Gleichheit zweier gleichartiger jener beiden Gröfsenbeziehnungen definieren müssen und auch hier wieder zwei Bezeichnungen auswerfen: Für Gleichheit von Differenzen: Arithmetische, für Gleichheit zweier Verhältnisse: Geometrische Proportion mit dem Zusatz, dafs letztere Gleichheit, weil sie wichtiger und häufiger sei, Proportion schlechthin heifsen solle. Solchergestalt wäre alle Dunkelheit und Zweideutigkeit vermieden worden.

Kap. IV führt die Sache noch weiter. Nicht immer seien die Geometer sich bewufst gewesen, dafs Nominaldefinitionen unbestreitbar seien. Der ganze Streit über den Contingenzwinkel zwischen Clavius und Peletier gehöre hierher. Mit einem Worte wäre er beendigt gewesen, hätte man sich darüber verständigt, was man eigentlich unter Winkel verstehen wolle. Derselbe Fehler sei von Simon Stevin, dem berühmten Mathematiker des Prinzen von Oranien, gemacht worden. Er habe definiert: *„Nombre est cela par lequel s'explique la quantité de chacune chose“* und

sei dann sehr aufgebracht gewesen gegen diejenigen, welche die Einheit nicht als Zahl bezeichneten. Allerdings sei in jenen Disput eine Frage eingemengt worden, welche vorweg auszuscheiden sei, nämlich, ob sich die Einheit zur Zahl verhalte wie der Punkt zur Strecke. Untersuche man jeden Teil der Kontroverse für sich, so müsse in Bezug auf den ersten die gemachte Nominaldefinition entscheiden. Für Euklid z. B., der definiere: *nombre est une multitude d'unitez assemblées,* sei allerdings die Einheit keine Zahl. Aber da dies eben eine Nominaldefinition und diese ganz beliebig sei, so könne man natürlich mit Stevin eine andere zu Gunsten der Einheit aufstellen. Aber damit sei die Sache erledigt und man könne nichts weiter gegen eine andere Definition einwenden, ohne sich einer *petitio principii* schuldig zu machen; wie man erkennt, wenn man die sogenannten Beweise Stevins genauer ansieht. Dieser schliefse:

> „*La partie est de mesme nature que le tout. Unité est partie d'une multitude d'unitez. Donc l'unité est de mesme nature qu'une multitude d'unitez.*
>
> *Et par consequent nombre.*"

Dieses Argument beweist nichts, sagt Arnauld, ein Halbkreis ist kein Kreis, der Teil eines Quadrats kein Quadrat.

Ebensowenig besage der andere Versuch Stevins:

> „*Si du nombre donné l'on oste aucun nombre, le nombre donné demeure. Donc si l'unité n'estoit pas nombre, en ostant un de trois, le nombre donné demeuroit, ce qui est absurde.*"

Arnauld findet den Obersatz lächerlich, denn er setze voraus, was bewiesen werden soll. Euklid müfste ihn leugnen, denn nach seiner Definition brauche er nur die Einheit zu subtrahieren, um ihn zu widerlegen. So könne man auch beweisen, dafs ein (ganzer) Kreis bleibe, wenn man einen Halbkreis abziehe, weil man keinen (ganzen) Kreis abgezogen habe. Es besagen Stevins Argumente also höchstens, dafs die Ähnlichkeit zwischen der Einheit und einer Mehrheit von Einheiten genügend sei, um für beide eine Kollektivbezeichnung einzuführen. Das hänge aber vom Belieben ab und deshalb war Stevins ganze Kontroverse ein Wortstreit. Seine Bücher seien voll derartiger Wortstreitigkeiten, indem er sich an anderer Stelle bemühe darzuthun, die Zahl sei keine diskrete Menge, die Proportion der Zahlen sei immer arithmetisch, nie geometrisch, jede Wurzel einer beliebigen Zahl sei eine Zahl. Die zweite anfangs ausgeschiedene Frage aber sei von ganz anderer Natur. Da handle es sich um eine Realdefinition und die Behauptung: *Die Einheit verhalte sich zur Zahl wie der Punkt zur Strecke* sei ganz und gar falsch. Denn die Addition der Einheit vergröfsere die Zahl, während der Punkt an der Strecke dies nicht bewirke. Wir haben

nur deshalb die Streitfrage so eingehend wiedererzählt, weil sie eine gewisse Etappe bildet in der fortwährenden Erweiterung des Zahlbegriffs, der von Stevin hier auf die Irrationalen ausgedehnt wird, und deshalb für die Entwicklungsgeschichte einfacher Begriffe der heutigen Mathematik interessant ist.

Im V. Kapitel wird die Natur der Axiome beleuchtet. Alle Welt sei einig darüber, daſs es an sich evidente Sätze gäbe, welche nicht bewiesen werden könnten. Solche Prinzipien müssen das Fundament einer richtigen Beweisreihe bilden. Viele aber seien sich nicht recht bewuſst, worin die Evidenz besteht; sie glauben, daſs der Widerspruch irgend eines Menschen einen Beweis nötig mache. Diese sind auf das Wort des Aristoteles zu verweisen, daſs ein Beweis nur die innere, nicht die äuſsere Zustimmung verlange. Es folgt ein Exkurs gegen die Sensualisten; deren Behauptung, daſs alle Gewiſsheit aus den Sinnen und der Erfahrung stamme, widerlege sich selbst, da die Erfahrung nur unvollständige Induktionen liefere, zur Gewiſsheit aber vollständige notwendig seien. Als Beweis führt Arnauld die neu entdeckte Kapillarität ins Feld, die, eine neue Erfahrung, die alten umstoſse. Auf der klaren und distinkten Idee des Ganzen und der des Teils beruht allein die Evidenz des Axioms: *Das Ganze ist gröſser als sein Teil.* Wir haben schon im ersten Teil der vorliegenden Arbeit Arnaulds rationalistischen Standpunkt gekennzeichnet. So folgt denn hier eines der rationalistischen Grundprinzipien: *„Alles, was in der klaren und distinkten Idee einer Sache enthalten ist, kann in Wahrheit von dieser Sache behauptet werden.“* Solche Grundwahrheiten, wie: *„Das Ganze ist gröſser als sein Teil“* können nicht bezweifelt werden, denn man kann sie nicht bezweifeln, ohne sie zu denken, ohne sie für wahr zu halten. Nun aber gelangt Arnauld zu einer Schwierigkeit, die offenbar durch die Parallelentheorie und deren logische Bedeutung in ihm angeregt worden ist: Es giebt gewisse Eigenschaften von Dingen, die in deren klarer Idee enthalten sind, die aber bewiesen werden können und bewiesen werden müssen. Die Verwendbarkeit gewisser Sätze als Axiome ist durch die beiden folgenden Vorschriften geregelt, die wir im Texte wiedergeben:

1. Regel. *Lorsque pour voir clairement qu'un attribut convient à un sujet, comme pour voir qu'il convient au tout d'estre plus grand que sa partie, on n'a besoin que de considerer les deux idées du sujet et de l'attribut avec une médiocre attention en sorte qu'on ne le puisse faire sans s'appercevoir que l'idée de l'attribut est veritablement enfermée dans l'idée du sujet: on a droit alors de prendre cette proposition pour un axiome qui n'a pas besoin d'estre demontré, parce qu'il a de luy mesme toute l'évidence que luy pourroit donner la demonstration, qui ne pourroit faire autre chose sinon*

demontrer que cet attribut convient au sujet, en se servant d'une troisième idée pour montrer cette liaison ce qu'on en voit déjà sans l'aide d'aucune troisième idée.

Dabei dürfe man aber Erklärung und Beweis nicht verwechseln; denn manche Axiome müssen erklärt, d. h. mit immer anderen Worten ausgesprochen werden, um verständlich zu sein, während ein Beweis ein ganz neues Moment (*troisième idée*) einführt.

2. Regel. *Quand la seule consideration des idées du sujet et de l'attribut ne suffit pas pour voir clairement que l'attribut convient au sujet, la proposition qui l'affirme ne doit point estre prise pour axiome, mais elle doit estre demontrée, en se servant de quelques autres idées pour faire voir cette liaison, comme on se sert de l'idée des lignes paralleles pour montrer que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droits.*

Die beiden Regeln seien von hervorragender Wichtigkeit; denn die meisten Menschen pflegen in der Befragung ihres logischen Gewissens nicht gewissenhaft genug zu sein.

Das folgende Kapitel zählt einige solche allgemeinste Axiome auf.

An erster Stelle steht der Satz des Widerspruchs, dem aber Arnauld keine grofse praktische Bedeutung zuerkennt. Dann folgen Axiome, die wir wegen des allzuengen Zusammenhangs mit Descartes' Körperbegriff und dessen occasionalistischer Ausläufer hier nicht anführen. Hat Arnauld bisher in Kap. III und IV die Regeln Pascals über die Definitionen näher erläutert, in Kap. V den Begriff des Axioms in Pascals oben wiedergegebenem Satz 3 eingehend untersucht, so kommt er in Kap. VI auf die Sätze 4 und 5 Pascals über die Beweise. Bei einem Beweise mufs sowohl die Materie wahr und unzweifelhaft sein, als auch die Form des Argumentierens richtig. Das erstere tritt ein, wenn man nach Pascals viertem Satze nur Nominaldefinitionen, nur Axiome und bewiesene Sätze, sowie Konstruktionen verwendet, deren Möglichkeit vorher demonstriert wurde. Die fünfte Regel (zweiter Satz über den Beweis) Pascals gewährleistet die Richtigkeit der Form, sie verhindert, dafs man sich gegen die Regeln des Syllogismus vergeht, was meistens nur dadurch geschieht, dafs in den Ober- und Untersatz eine mehrdeutige Begriffsbildung eingeht. Andre Fehler aber können einem normalen Verstande in der Form nicht leicht begegnen, wie sich die Geometer nicht darum kümmern, ob ihre Überlegungen immer genau den Schablonen des Schlusses angepafst sind. Man braucht somit 1) bei evidenten Sätzen nicht immer zu wiederholen, warum sie es sind, d. h. den rationalistischen Grundsatz anzuführen, dafs alles, was in der klaren und distinkten Idee einer Sache enthalten ist, in Wahrheit von ihr gilt. Und 2) gilt, was von der Gattung bewiesen ist, ohne nochmaliges Schlufsverfahren von deren Arten.

„Obwohl es bewundernswert im höchsten Grade sei“, beginnt Arnauld das VIII. Kapitel, *„daſs auf Grund dieser fünf einfachen Regeln die Geometer soviele verborgene Wahrheiten entdecken und sie durch unzerbrechliche Beweise sichern konnten, obwohl sie unter den Philosophen die einzigen seien, die aus ihrem Hause und aus ihren Schriften Wortzänkereien und Dispute im allgemeinen verbannt hätten, und es bei den Geometern stehender Grundsatz sei, nur Überzeugendes und Unbestreitbares zu behaupten, so müsse man doch hinzufügen, daſs einige Fehler übrig geblieben seien, welche sie zwar nicht von ihrem Ziele abhalten, aber doch schuld sind, daſs sie es nicht auf dem kürzesten und bequemsten Wege erreichen.“*

Wir folgen bei deren Aufzählung wieder Arnaulds Text:

I. *Avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que d'éclairer.*

In der vollendeten Wissenschaft ist es nicht genug zu beweisen, daſs etwas so ist, sondern durch Gründe, welche der Natur der Sache entnommen sind, ist darzuthun, warum es so ist. Erst dann ist der Intellekt befriedigt.

II. *Prouver des choses, qui n'ont pas besoin de preuves.*

Wir haben schon anläſslich der Thesen hiervon gesprochen. Der Satz, die Summe zweier Seiten ist im Dreieck gröſser als die dritte, sei ebenso evident und intuitiv, wie die natürliche Notion der geraden Linie als des kürzesten Wegs und des natürlichen Distanzmaſses zweier Punkte. Die Bestimmtheit einer geraden Linie durch zwei Punkte sei in der klaren und distinkten Idee der Geraden enthalten, ebenso daſs jeder Punkt einer Geraden von zwei festen Punkten einer andern Geraden gleich weit absteht, wenn zwei Punkte der ersteren diese Eigenschaft besitzen. So gelangt man zum Begriff der Senkrechten. Die Senkrechte ist aber das natürliche Maſs der Distanz eines Punktes von einer Geraden. Wenn dann zwei Punkte einer Geraden gleiche Distanz von einer andern Geraden haben, so sind alle Punkte der ersteren von der zweiten ebensoweit entfernt; man bezeichnet die beiden Geraden als parallel; so ist Arnaulds Auffassung hier vom Parallelismus. Diese Vorstellungen seien ebenso klar wie das Grundprinzip Archimeds, daſs von Curven, die in denselben beiden Punkten endigen, die eingeschlossene immer die kürzere sei.

Jene Beweissucht sei ja an und für sich nicht so schlimm, aber sie ist es, die an Stelle eines natürlichen Aufbaus Verwirrung hervorbringt.

III. *Demonstration par l'impossibilité.*

Wir haben eingehend Arnaulds Stellung zum apagogischen Beweis kennen gelernt; hier präzisiert er sie dahin, daſs man ihn gelten lassen könne in negativen Corollaren oder mehr an Stelle einer Erläuterung;

wahre Berechtigung besitze er nur, wenn kein direkter positiver Beweis möglich sei.

IV. *Demonstrations par des voyes trop eloignées.*

Auch dieser Beweisfehler wurde in den Thesen schon erörtert. Ein Beispiel sei Euklids Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes I 47. Die benützten Dreiecke seien der Sache ganz fremd, und der einzige natürliche Weg der durch Proportionen, mit einer einzigen Hilfslinie, der Senkrechten aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse.

V. *N'avoir aucun soin du vraye ordre de la nature.*

Arnauld gerät hier in Feuer. Dies ist ja auch das Hauptfeld seiner Kritik. Die Geometer glaubten, keine weitere Ordnung einhalten zu müssen, wenn nur die folgenden Sätze durch die vorhergehenden bewiesen würden. Statt sich um die Regeln der wahren Methode zu kümmern und vom Einfachsten und Allgemeinsten zum Zusammengesetzteren und Spezielleren fortzuschreiten, werfen sie Linien und Oberflächen durcheinander, ebenso Dreiecke und Quadrate, und beweisen die Eigenschaften einfacher Linien mit Hülfe von Figuren, wodurch die schöne Wissenschaft der Geometrie so ungemein entstellt wird. Man müſste den ganzen Euklid abschreiben, um alle die Beispiele beisammen zu haben. Nachdem dieser in den vier ersten Büchern von der Ausdehnung gehandelt, behandle er im fünften Buche die Proportionen an Gröſsen jeder Art. Er nimmt die ausgedehnten, d. h. räumlichen wieder auf im sechsten, bringt die Zahlen im siebenten, achten und neunten, und fängt im zehnten nochmals wieder von der Ausdehnung zu sprechen an. Das ist seine Unordnung im groſsen, im speziellen aber lehrt er z. B. zu Beginn des ersten Buches die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks, während erst zweiundzwanzig Sätze weiter unten die allgemeinere Konstruktion eines beliebigen Dreiecks aufgenommen wird. Seine Beweise über Senkrechte und Parallele sind alle durch Vermittlung von Dreiecken geführt, und so die lineare Dimension mit Gebilden zweier Dimensionen bunt durcheinander gemengt. Auch die Stellung des für die Parallelentheorie wichtigen Satzes I 16 und dessen Wiederaufnahme sechszehn Sätze später bemerkt Arnauld mit Unwillen.

VI. *Ne se point servir de divisions et de partitions.*

Die Geometer geben für die Arten einer Gattung nur Nominaldefinitionen und stellen sie beliebig nebeneinander, statt zu bemerken, daſs eine Gattung so viele Arten hat und nicht mehr haben kann, weil ihre Idee nur gerade soviele verschiedene Spezialisierungen zuläſst.

Es folgt ein Schema für die Dreiecke. Wir geben es wörtlich wieder:

Le triangle se peut diviser selon les costez, ou selon les angles.

Car les costez sont

Ou { *tous égaux et il s'appelle . . . Equilatère*
deux seulement égaux s'appelle Isoscele
tous trois inégaux s'appelle . . Scalene. }

Les angles sont

Ou { *tous trois aigus, et il s'appelle Oxigone*
deux seulement aigus, et alors le 3. est }

Ou { *droit, et il s'appelle . . . . . . Rectangle*
obtus, et il s'appelle . . . . . . Amblygone. }

Am besten giebt man diese Einteilung erst, wenn die allgemeinen Eigenschaften des Dreiecks entwickelt sind, weil man dann ihren notwendigen und hinreichenden Charakter erkennt. Man definiert also die Arten erst nach Charakterisierung der Gattung, ein Vorteil, der sich besonders da geltend macht, wo innerhalb des Gattungsbegriffs die Anzahl der *differentiae specificae* relativ klein ist.

Kap. IX giebt die Erwiderung der Geometer, um in dieser Form nochmals die Vermeidung jener sechs Methodenfehler anzuraten. Arnauld sagt: Es giebt Geometer, welche glauben, daſs die Sache erledigt sei, wenn sie erklären über jene Ausstellungen zur Tagesordnung überzugehen, da ihre einzige Absicht sei, durch überzeugende Beweise die Wahrheit festzustellen, gleichviel auf welchem Wege. Man muſs ja zugeben, daſs jene sechs Punkte nicht verhindern konnten, daſs die geometrische Beweisführung besser ist als die aller anderen Wissenschaften, daſs kein Wissenschaftskomplex besser behandelt worden ist als der in der Gesamtbezeichnung „*Mathematik*" begriffene (*les sciences qui sont comprises sous le nom général de Mathematiques*), aber alles ist vervollkommnungsfähig, und wenn auch der einzige Zweck der Wissenschaft ist, die Wahrheit zu erforschen und festzustellen, so muſs sie doch auch dafür sorgen, daſs der Weg der natürlichste ist, auf welchem die Wahrheit ihren Einzug in den Geist hält. Es liegt im Wesen des Verstandes, daſs wir ein reinlicheres, vollständiges und vollendetes Wissen von dem bekommen, was wir durch seine wahren Erkenntnisgründe erfahren, als von auf entlegenen und gewundenen Wegen Erworbenem. Sodann erlernt man auch leichter, was in seiner natürlichen Folge gelehrt wird, weil die Ideen, welche eine natürliche Ordnung besitzen, sich in unserem Gedächtnis besser aneinanderreihen und sich leichter gegenseitig auslösen. Denn Dinge, deren wahren Grund man kennt, werden nicht mechanisch behalten, sondern jedesmal durch einen Urteilsakt reproduziert. Gerecht ist der Einwand, fährt Arnauld fort, daſs es besser sei, sich einer Inkonvenienz auszusetzen und die natürliche Ordnung zu vernachlässigen, als die Strenge der Beweise zu opfern. Er sei persönlich überzeugt, daſs beides vereinigt werden könne, und daſs es möglich sei,

eine Elementargeometrie zu liefern, wo alle Sätze in der natürlichen Ordnung sich folgen, alle Beweise auf den einfachsten Wegen und mit den einfachsten Mitteln geführt seien und doch der Kraft nicht entbehrten. Er glaube also den Regeln, die (von Pascal) schon gegeben seien, noch zwei oder drei hinzufügen zu müssen, die ebenso wichtig seien, weil sie die gebräuchliche Methode vervollkommneten.

Der Vollständigkeit wegen geben wir nochmals eine Zusammenstellung getreu dem Original; Arnauld bemerkt, dafs die erste und zweite dem I. Abschnitte, die dritte und vierte dem II., die fünfte und sechste dem III., die siebente und achte Regel, die methodologischen, Arnauld eigenen, dem IV. Abschnitt, der Methodologie, seiner Logik entsprechen.

La Methode des sciences reduite à huit regles principales.

Deux Regles touchant les definitions.

1⁰. *Ne laisser aucun des termes un peu obscurs ou equivoques sans le definir.*

2⁰. *N'employer dans les definitions que des termes parfaitement connus ou déjà expliquez.*

Deux regles pour les axiomes.

3⁰. *Ne demander en axiomes que des choses parfaitement evidentes.*

4⁰. *Recevoir pour evident ce qui n'a besoin que d'un peu d'attention pour estre reconnu veritable.*

Deux regles pour les demonstrations.

5⁰. *Prouver toutes les propositions un peu obscures, en n'employant à leur preuve que les definitions qui auront precedé, ou les axiomes qui auront esté accordez ou les propositions qui auront déjà esté demontrées.*

6⁰. *N'abuser jamais de l'equivoque des termes en manquant de substituer mentalement les definitions qui les restreignent et qui les expliquent.*

Deux regles pour la Methode.

7⁰. *Traiter les choses autant qu'il se peut dans leur ordre naturel, en commençant par les plus générales et les plus simples et expliquant tout ce qui appartient à la nature du genre, avant que de passer aux especes particuliers.*

8⁰. *Diviser autant qu'il se peut chaque genre en toutes ses especes, chaque tout en toutes ses parties, et chaque difficulté en tous ses cas.*

Arnauld fügt bei, dafs er schreibe *autant qu'il se peut,* weil gewisse Schwierigkeiten sich der strengen Durchführung entgegenstellen, z. B. müsse man vom Kreis in der Elementargeometrie handeln, ohne die Gattung, die

ebenen Curven, näher zu entwickeln, man müsse sich damit begnügen, sie zu definieren.

Wir haben aus dem Behandelten die Überzeugung gewonnen, daſs Arnauld neben und mit Pascal der Begründer der modernen Philosophie der Mathematik ist. Wir haben zugleich hier im IV. Abschnitt seiner *Logik* das Programm kennen gelernt für Arnaulds geometrisches Hauptwerk. Die Veranlassung zur Abfassung und Herausgabe, Pascals Anregung, den Inhalt, die Bedeutung und die Nachwirkung dieses Hauptwerkes, in welchem Arnauld die methodische Emanzipation von Euklids Elementen, diesem altersgrauen, ehrwürdigen Denkmal antiker Weisheit im Geiste einer Renaissance vollzogen hat, werden wir im nächsten Abschnitt auseinandersetzen.

Wir glauben die *Logik* Arnaulds von 1662 nicht verlassen zu dürfen, ohne darauf hingewiesen zu haben, daſs eines der nächsten Kapitel, welches von der Glaubwürdigkeit menschlicher Zeugnisse handelt und betitelt ist: *„Quelques regles pour bien conduire sa raison dans la creance des evenemens qui dependent de la foy humaine"*, noch mehr aber das Schluſskapitel des ganzen Buches: *„Du jugement qu'on doit faire des accidens futurs"* Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen enthält. Arnauld sagt an letzterer Stelle: *„Pour obtenir un bien, ou pour eviter un mal il ne faut pas seulement considerer le bien et le mal en soy, mais aussi la probabilité qu'il arrive ou n'arrive pas et regarder géometriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble. Ce qui peut estre eclairci par cet exemple."*

Das Beispiel ist das von zehn Spielern, wobei jeder einen Thaler einsetzt, jeder hat die Chance, neun Thaler zu gewinnen, aber die Wahrscheinlichkeit, den einen zu verlieren, ist neunmal so groſs als die, jene neun zu gewinnen, sodaſs für alle ein voller Ausgleich eintritt. (Mathematische Hoffnung — Einsatz!) Ungerecht dagegen seien die Lotterien, da der Unternehmer gewöhnlich den zehnten Teil vorweg für sich beanspruche, sodaſs die Gesamtheit der Losabnehmer in derselben Weise betrogen wird, wie wenn ein Mann in einem Spiele, wo die Möglichkeit des Gewinns so groſs ist wie die des Verlusts, zehn Pistolen gegen neun setzt. In dem gleichen Nachteil befindet sich aber auch der einzelne, weil er Glied der Gesamtheit der Spielenden ist.

Manchmal ist die Wahrscheinlichkeit des Verlustes, wie klein auch der Einsatz ist, so groſs, daſs es unvorteilhaft ist, jenen letzteren zu machen. So wäre es toll, zwanzig Sols gegen zwanzig Millionen Goldstücke zu wetten, daſs ein Kind, wenn es die Lettern einer Druckerei nebeneinandersetzt, zufällig die ersten Verse von Virgils *Äneis* trifft. Auch die oftmalige Wiederholung eines ungünstigen Umstandes geringerer Bedeutung

kann die Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ausfalls der Hauptsache kompensieren oder gar in Unwahrscheinlichkeit umschlagen lassen. Scharf ist sich Arnauld der Bedeutung der *„Möglichkeit“* in geometrischen Wahrheiten und in Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen bewufst. Er sagt, wenn die Geometer wissen, dafs sich eine Curve durch vier oder fünf Bewegungen verschiedener Art beschreiben läfst, so kümmern sie sich nicht darum, ob jene Curve wirklich gezeichnet wird, sondern sie halten es für genügend, dafs dies möglich ist, um ihre Überlegungen daran zu knüpfen. Bei zufälligen Ereignissen aber bedingt die Möglichkeit derselben durchaus nicht die Annahme ihres Vorhandenseins oder Eintretens. Mit diesen im Texte sehr ausführlichen Betrachtungen hat Arnauld Leibniz' systematischer Unterscheidung der ewigen und thatsächlichen Wahrheiten vorgearbeitet.

Arnaulds mathematisches Hauptwerk, die Nouveaux Elémens de Géométrie. Entstehungsgeschichte, Pascals Einflufs, Nachwirkungen.

Unter umstehendem Titel erschien 1667 die editio princeps von Arnaulds *Géométrie* in 4⁰. Wie die Wiedergabe des Titelblattes zeigt, erschien das Buch anonym; es ist in den modernen Bibliographien unter den *Anonyma* und *Pseudonyma* z. B. bei A. Barbier nicht verzeichnet.

In der Vorrede sagt der Verfasser, nachdem er den Nutzen der Geometrie für die Ausbildung der Urteilskraft betont, von sich und seinem Werke:

„Ce qui luy a donc faire croire qu'il estoit utile de donner une nouvelle forme à cette science est, qu'estant persuadé que c'estoit une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à reduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre estant comme une lumiere qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toûjours eu quelque peine de ce que les Elemens d'Euclide estoient tellement confus et broüillez, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goust de veritable ordre, ils ne pouvoient au contraire que l'accoûtumer au desordre et à la confusion.

Ce defaut luy paroissoit considerable dans une science dont la principale utilité est de perfectionner la raison; mais il n'eust pas pensé neanmoins à y remedier sans la rencontre que je vas dire qui l'y engagea insensiblement. Un des plus grands esprits de ce siecle, et des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques, avoit fait en quelques jours un essay d'Elemens de Geometrie; et comme il n'avoit pas cette vüe de l'ordre, il s'estoit contenté de changer plusieurs des démonstrations d'Euclide pour en substituer d'autres plus nettes et plus naturelles. Ce petit ouvrage estant tombé entre les mains de celuy qui a depuis composé ces Elemens, il s'étonna qu'un si grand esprit

NOVVEAVX ELEMENS
DE
GEOMETRIE;
CONTENANT,

Outre un ordre tout nouveau, & de nouvelles demonſtrations des propoſitions les plus communes,

De nouveaux moyens de faire voir quelles lignes ſont incommenſurables,

De nouvelles meſures des angles, dont on ne s'eſtoit point encore aviſé,

Et de nouvelles manieres de trouver & de demontrer la proportion des Lignes.



A PARIS,
Chez Charles Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Noſtre-Dame, à l'Enſeigne des trois Vertus.

M. DC. LXVII.

AVEC PRIVILEGE DV ROY.

n'eust pas esté frappé de la confusion qu'il avoit laissée pour ce qui est de la méthode, et cette pensée luy ouvrit en même temps une maniere naturelle de disposer toute la Geometrie, les démonstrations s'arrangerent d'elles mêmes dans son esprit, et tout le corps de l'ouvrage que nous donnons maintenant au public se forma dans son idée.

Cela luy fit dire en riant à quelques uns de ses amis, que s'il avoit de loisir il luy seroit facile de faire des Elemens de Geometrie mieux ordonnez que ceux que l'on luy avoit montrez . . ."

Für den Verfasser vorliegender Arbeit stand es fest, daſs mit den Worten: *Un des plus grands esprits de ce siecle, et des plus celebres par l'ouverture admirable qu'il avoit pour les Mathematiques* niemand gemeint sein könne als Blaise Pascal. Den thatsächlichen Nachweis für diese Annahme zu führen, gelang aber erst nach langen Nachforschungen. Er wird erbracht durch folgende Stelle eines schwer zugänglichen Werkes. Im sechsten Bande S. 183—184 von Besoigne, *Histoire de l'abbage de Port Royal, à Cologne, aux depens de la Compagnie MDCCLII (seconde partie)* heiſst es:

„*Il a bien paru, qu'il (Arnauld) avoit l'esprit fait pour les Mathematiques par l'ouvrage qu'il a composé sous le titre d'Elemens de Géométrie, et qui a été plusieurs fois imprimé.*

On trouve l'histoire et l'origine de cet ouvrage dans une anecdote que racontoit M. Nicole à ses amis, et qui montre bien jusqu'à quel point le génie de M. Arnauld étoit propre aux Mathematiques. M. Nicole ditoit que M. Pascal ayant montré un jour à M. Arnauld un travail qu'il avoit fait sur les Elemens d'Euclide, celui-ci n'en fut pas content, parce que M. Pascal y laissoit le défaut d'ordre qui se trouve dans Euclide. M. Pascal défia en riant le Docteur de faire mieux. M. Arnauld accepta le défie et à son premier loisir il traça l'ordre selon lequel il falloit étudier et enseigner la Géométrie. Etant au Chesnai proche Versailles pour rétablir sa santé après une maladie, il commença à executer son plan, et enfin il le mit dans l'état où il est imprimé. Lorsque M. Pascal vit l'ouvrage, il condamna le sien au feu, et reconnut franchement que M. Arnauld avoit trouvé le vrai ordre naturel de traiter cette matière, et il en rendit gloire au Docteur de Sorbonne."

Hier haben wir durch einen vollständig einwandsfreien Zeugen, durch Nicole, einen der bedeutendsten unter den Herren von Port royal, der wohl persönlich jener Unterredung zwischen Pascal und Arnauld beiwohnte, einer Unterredung, die wir in den Salon der geistreichen Madame de Sablé verlegen, von der wir im ersten Teile unserer Arbeit ausführlich erzählten, ein hübsches Bild von der Entstehungsgeschichte der *Géométrie* Arnaulds. Wir erfahren sogar, wo sie verfaſst wurde, wir vernehmen,

wie Pascal die Anregung gab zur Niederschrift und endgültigen Fassung der Gesichtspunkte, welche schon in Arnaulds *Thesen* von 1641 uns zuerst entgegengetreten sind. Damit ist zugleich erwiesen, daſs auch Pascal wirklich eine Elementargeometrie verfaſst hat, eine Thatsache, die bisher aus dem winzigen Fragmente, das C. J. Gerhardt in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie 1892 S. 202—204 aus Leibniz' Nachlaſs veröffentlicht hat, nur vermutet werden konnte. Leibniz hatte jenes Blatt von de Billettes erhalten (s. M. Cantor, *„Vorlesungen“* Bd. II S. 682). Daſs wirklich Teile von Pascals *„Essai“* der Verbrennung entgingen, könnte man auſserdem aus einem Briefe Leibniz' an Oldenburg vom 12. Juni 1675 schlieſsen, der lautet: *Clarissimus Pererius, Pascalis ex sorore nepos, misit mihi ex Avernia per suos fratres Ms. quaedam fragmenta Pascaliana. Ex quibus nunc penes me habeo elementa Geometrica singulari quadam ratione ab eo tractata, quamquam non integra. Quae ubi reddidero etiam Conica mihi legenda dabunt* (s. Leibniz' Brief vom 30. August 1676). Um damit Besoignes Erzählung in Einklang zu bringen, braucht man ja nur anzunehmen, daſs die Freunde Pascals jene Fragmente dem Feuer rechtzeitig entrissen. Besoignes Nachricht enthält zudem durch Leibniz' Zusatz *„non integra“* eine gewichtige Bestätigung.

Arnaulds *Elementargeometrie* wurde also von Pascal sehr günstig beurteilt, so günstig, daſs er sie über seine eigene Arbeit stellte. Ein glänzendes Zeugnis! Mit ebenso groſsem Beifall wurde Arnaulds *Lehrbuch* von der gleichzeitigen Gelehrtenwelt aufgenommen. Wir finden in den *Philosophical Transactions,* dem Organ der Royal Society in London, folgende Ankündigung im Februarheft von 1667/8 (in der Lateinischen Ausgabe: *Acta philosophica societatis regiae in Anglia Anni MDCLXV, LXVI; LXVII, LXVIII, LXIX, Auctore Henrico Oldenburgico, societatis reg. secret., Anglice conscripta, et in Latinum versa interprete C. S. Nunc iterum adiecto indice accurato edita Lipsiae anno MDCLXXV* S. 512).

VI. Ennarratio quorundam librorum.

I. Nouveaux Elemens de Geometrie.

Sive tractatus mathematicus titulum ferens, Nova Elementa Geometrica, impressus Parisiis in quarto, Anno 1667.

Divisus in 15 libros seu sectiones continet:

Novam methodum, novasque Demonstrationes communissimarum Propositionum Geometricas.

Nova media domonstrandi, quaenam lineae sint incommensurabiles.

Novas mensuras Angulorum hactenus non consideratas.

Novos modos inveniendi et demonstrandi proportionem linearum.

In quibus observamus, Authorem prodere methodo nova et Ordine pro-

prio, fundato super Algebraica Elementa, diversas novas Demonstrationes communiorum propositionum, contentarum praecipue in primis sex libris Elementorum Euclidis, et sine recursu ad Eucliden, vel quemvis alium scriptorem Geometricum, ad demonstrandum quodlibet in novis his Elementis assertum.

Quibus additur solutio Problematis Arithmetici, quod Author vocat Quadrata Magica scil. Dato quadrato Cellularum pari seu impari repleto Numeris sive secundum Progressionem Arithmeticam sive Geometricam: ita disponere omnes illos numeros, in aliquo simili quadrato Cellularum, ut omnes Numeri cuiusque ordinis sive collateralis, sive ascendentis et descendentis, sive duplicis Diagonalis, existentes in progressione Arithmetica additi, eandem semper producant summam, et in Progressione Geometrica multiplicati cum invicem, semper idem Productum conficiant.

Mit dem letztgenannten Problem wird sich der dritte Abschnitt des zweiten (mathematischen) Teils vorliegender Arbeit beschäftigen.

Aber nicht genug damit, auch die andere bedeutendste gelehrte Publikation der Zeit hat sich mit Arnaulds *Géométrie* bekannt gemacht, das *Journal des Sçavans,* welches im Jahre 1655 von Denis de Sallo begründet worden war. Wir haben mit Hilfe von *Cornelius a Beughem's La France Sçavante,* Amstelod. MDCLXXXIII in 12^0, einem sehr brauchbaren Generalregister mit chronologischem, Personal- und Realindex der ersten Jahrgänge des *Journal des Sçavans,* die betreffende Stelle gefunden. Sie lautet (im Heft vom 26. Dezember 1667):

Nouveaux Elemens de Géométrie.

In 4. à Paris chez Charles Savreux.

De toutes les Sciences, il n'y en a point qui ait été traitée avec une si belle méthode que la Geometrie. Néantmoins on a remarqué ce défaut dans les ouvrages des anciens Géomètres, qu'ils ont eu plus de soin de la certitude que de l'évidence de leurs demonstrations. Et cela se voit particulierement dans l'arrangement des propositions qui composent le Liure des Elemens que l'on attribue à Euclide. Car cet Auteur sans se mettre en peine de l'ordre naturel, qui est de commencer par ce qu'il y a de plus simple et de traitter séparément ce qui est different, a seulement pris garde à ranger les propositions en sorte que les premières servent à démontrer les suivantes et a souvent meslé des propositions où il traite de figures très differentes. Ramus qui a raffiné sur toutes les sciences, a composé un Liure de Geometrie où il a tâché d'éviter ce défaut. Mais il avoüe qu'il s'est plus appliqué à y observer les regles de la Méthode, qu'à traiter le fond de la Geometrie. Et en effet s'il a suivy un ordre plus naturel qu'Euclide, il s'en faut beaucoup qu'il n'ait donné tant de force à ses demonstrations.

Néantmoins comme ces deux choses ne sont pas incompatibles, l'Auteur de ce Liure a entrepris de les accorder: Et il y a heureusement réeussi au jugement des plus intelligens dans cette Science. L'ordre qu'il garde est très naturel. Il considère dans les quatre premiers Liures, ce qui convient à la Grandeur en général et principalement les Raisons et les Proportions, qui sont les fondemens de la Geometrie. Il vient en suitte aux différentes espèces de Grandeur: Et comme de toutes les grandeurs continües il n'y en a point de plus simple que la Ligne, il en examine les proprietez dans les trois Liures suivans, et il traitte par ordre des Lignes Perpendiculaires, des Obliques, des Paralleles, et de celles qui sont terminées à une circonference. Des Lignes il passe aux Angles, dont il parle dans le VIII. et dans le IX. Liure. Il employe le X. et le XI. à traitter des Lignes Proportionelles et des Reciproques: Et après avoir parlé des Figures dans le XIII., il considère en particulier dans les trois derniers Liures les Triangles, les Quadrilateres et les autres Figures Polygones.

Mais le principale avantage de ce Liure est que quantité de demonstrations très embarrassées qui ne convainquoient l'esprit qu'après l'avoir beaucoup fatigué et qui après l'avoir convaincu ne le satisfaisoient point, y sont proposées d'une manière si simple qu'on a aucune peine à les concevoir, et cependant si certaine qu'elles ne sont pas moins convaincantes que celles d'Euclide.

De plus il y a dans ce Liure de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de mesurer les angles, de trouver et démontrer la proportion des lignes; et une méthode très-facile de faire les Quarrez Magiques, qui est un des plus celebres Problemes d'Arithmetique.

Die Verbreitung von Arnaulds *Géométrie* wurde durch die Ankündigung in den *Philosophical Transactions* und die äufserst günstige Rezension im *Journal des Sçavans* jedenfalls sehr befördert, noch mehr aber verdankte sie ihr rasches Bekanntwerden inneren Ursachen; denn das Studium der Elementargeometrie wurde durch Arnaulds Methode ungemein erleichtert und weiteren Kreisen zugänglich. Im Jahre 1683 wurde eine zweite Ausgabe notwendig; sie erschien wiederum zu Paris, diesesmal bei dem Verleger von Pascals Schriften, bei Guillaume Desprez (De Prexius bei Leibniz). Laut dem *Avertissement sur la seconde édition* ist in den ersten vier Büchern vieles verändert, das zweite und dritte Buch vollständig umgearbeitet worden. Arnauld selbst schien von der zweiten Ausgabe nicht so befriedigt; wir finden seine Ansicht darüber in einem Briefe vom 28. Oktober 1683. (*Gesamtausgabe der Werke* Tom. IV p. 149 Lettre XI.)

A Madame Bois!

Je n'ai reçu que depuis deux jour les nouveaux Elémens. Je les trouve bien imprimés pour ce qui est du caractere. Mais n'en ayant lu que ce qui est de nouveau danc cette edition, j'y ai trouvé bien des fautes, outre celles de l'errata, que je voudrois qu'on eût mis en plus grosses lettres. Je ne m'en prends à personne. Je ne doute point que vous n'y ayiez fait de votre mieux; et je suis assuré que M. Ferrier y aura aussi mis un grand soin. Je lui en suis très-obligé. Cela peut-être venu du copiste qui a copié mes brouillons, qui n'a pas assez pris garde aux avis que j'avois donnés et à suivre ma ponctuation et mes à linea. Car un des plus grands défauts et qu'il y en a trop peu.

Quoi qu'il en soit, j'ai pensé au remede, qu'on pourroit apporter à cela, et j'en ai trouvé de meilleur que d'imprimer l'Avis au lecteur que je vous envoie pour le mettre au commencement, afin que par là et l'errata chacun puisse corriger son livre, comme j'ai été obligé d'en corriger un avant que de le donner à une personne de condition de mes amis. Je salue ma commere et tout le reste de votre famille. Je prie Dieu qu'il la benisse.

En ouvrant le livre, je suis tombé sur la page 347. Il y a une figure qu'on a voulu faire par des caracteres d'impression, au lieu de la faire par une figure de bois; et elle est tout à fait mal faite. Car au lieu qu'elle devoit être quarré c'est à dire aussi large d'un côté que de l'autre, elle est bien moins haute que large; et les divisions sont presque égales, au lieu qu'elles devroient être notablement inégales. Je viens encore de trouver une autre chose assez mal. C'est que dans le XIV. livre on renvoie assez souvent au 2e et au 3e livre. Or comme ces deux livres sont tout changés, il falloit aussi changer ces renvois, et on a oublié de le faire. Je vous prie donc, mon compere, de faire imprimer l'avis que je vous envoie, qui reparera un peu les défauts de cet ouvrage, en donnant moyen de le corriger à ceux qui le voudront lire.

Je me suis encore apperçu qu'ayant ajouté au Xe livre deux ou trois propositions touchant une ligne coupée harmoniquement, on ne les y a point mises, sans que j'en puisse deviner la raison; si ce n'est peut-être qu'on a eu si peu de soin des papiers que j'avois envoyés pour faire cette seconde édition, qu'on en ait laissé perdre cet endroit. Je souhaiterois qu'on le cherchât, et si on le trouvoit, qu'on le fît imprimer avec ce titre: Addition pour la fin du Xe livre qui a été oubliée par mégarde.

Page 98 l. 24 propositions, lisez proportions.

Die Sätze Arnaulds über harmonisch geschnittene Gerade wurden nie gedruckt; vielleicht sind gerade sie es, die Leibniz im Auge hat,



wenn er schrieb: „*Il (Arnauld) méditoit alors quelque chose de fort beau sur les raisons et sur les proportions et je serois faché s'il en avoit été distrait entièrement*" (27. April 1683). Wir haben bis jetzt wenigstens den Verlust der gerade für die neuere synthetische Geometrie interessanten Papiere zu beklagen.

Auch der nachstehend wiedergegebene Brief (Dez. 1693) bezieht sich auf die zweite Ausgabe (*Gesamtwerke* Tom. III S. 701 Lettre DCCCCXCIII) A. M. Dodart[1]):

Je vous réponds par avance à votre lettre du 25 que je reçus hier, ne sachant encore comment, ni quand je vous enverrai cette reponse.

Je commence par ce que j'avois oublié de vous mander touchant les Noveaux Elémens de Géométrie, de peur de l'oublier encore une fois. L'Auteur est mal satisfait de la seconde édition, à causes des fautes d'impression qu'on y a laissées. Mais ces fautes étant corrigées, comme un habile homme le peut faire aisément, il estime beaucoup plus le II. livre de la seconde édition, que ce même livre de la premiere. Et il croit qu'il feroit entrer votre ami dans son sentiment, s'il lui pourroit parler. Mais cela ne se peut expliquer par lettre. Le Ve livre de la seconde édition est aussi beaucoup meilleur que celui de la premiere. Et il me semble qu'il y a quelque chose pour l'explication des incommensurables qui est noveau. On y a aussi corrigé une grosse faute de la premiere édition, touchant les nombres quarrés qui sont égaux à deux autres nombres quarrés com. 25, à 9 et 16. Je viens de penser que je ferois mieux de vous envoyer un livre de ces Elémens, corrigé par l'Auteur en beaucoup d'endroits; avec un brouillon de ce qu'il avoit marqué qu'il falloit corriger dans cette seconde édition, outre l'errata; mais à condition que vous me renverrez l'un et l'autre quand vous en aurez fait l'usage que vous voudrez.

Eine dritte Ausgabe von Arnaulds Buch wurde 1692 in Holland veranstaltet. Sie erschien in La Haye, chez Jean van Duren, jedoch im Format kleiner, in 12°. Mit neuem Titelblatt versehen, kennt man von dieser Ausgabe Exemplare vom Jahre 1711. In den nachfolgenden Briefen wird diejenige des Jahres 1692 erwähnt.

Lettre de M. Dodart (*Ges. Werke* Tom. IV p. 24). Der Brief ist von 1694.

Il y a quelques mois qu'un de mes amis, grand approbateur et même admirateur de la Géométrie nouvelle attribuée à M. Arnauld, me fit de-

---

1) Denis Dodart, Mitglied der Ancienne Academie des Sciences, geboren 1644, gest. 1707, hervorragender Botaniker, Verfasser der „*Mémoires pour servir à l'histoire des plantes*" 1676.

mander s'il (M. Arnauld) trouveroit bon qu'il poussât cette Géométrie jusques aux solides. Je lui fit dire que la reponse étoit dans l'avertissement, où l'Auteur si je m'en souviens, s'excuse de ne l'avoir pas fait, parce qu'il avoit d'autres occupations, et ajoute, ce me semble que suivant la route marquée dans ce livre, il sera facile de supléer ce qui y manque. Depuis le temps j'ai vue l'auteur de ce supplément prétendu qui m'a dit que voulant y travailler, il en avoit été détourné par la nouvelle édition de la Géométrie du P. Lami, qui n'est visiblement qu les Elémens de M. Arnauld, poussés jusqu'à la Stéreométrie inclusivement, quoique sans nommer M. Arnauld. Car outre que mon ami est un Géomètre sublime, il est très-familier et très-net, et vouloit ajouter outre la Stéreométrie une introduction à l'Algebre, très courte et très nette, et proposer une revision du II. livre, qui est des proportions. Un mot sur cet article, si vous pouvez trouver une voie pour savoir de M. Arnauld s'il le trouvera bon; car sans cela on n'écrira pas un mot . . .

Arnauld erwiderte im folgenden Briefe vom 10. Juli 1694 (*Gesamtausgabe* Tom. IV p. 63 Lettre MLXI):

A. M. Dodart.

Je suis bien obligé, Monsieur, à votre ami, qui veut bien se donner la peine d'ajouter à mes Elémens de Géométrie ce qui y manque, qui est de la Stéreométrie. Mais j'ai un avis à lui donner sur cela, qui est que la seconde édition de ces Elémens qui a été faite à Paris, est pleine d'une infinité de fautes, et qu'il faudroit qu'il eût celle qui a été faite en Hollande par une personne que je ne connois point. S'il ne l'a peut trouver à Paris je tâcherai de vous l'envoyer. Il y a cependant dans cette édition de Hollande quelques fautes qui y sont restées, mais un habile homme les corrigera aisément pourvu qu'il y fasse attention. Je ne vois ce que votre ami entend par ces mots, „proposer une revision du seconde livre qui est des Proportions". Cela a-t-il rapport à ce que vous m'avez mandé autrefois qu'une personne estimoit plus la manière dont on avoit parlé des raisons et des proportions dans la première édition de ce qu'on en dit dans la seconde? Mais c'est de quoi que je ne saurois convenir. En ouvrant le livre de l'impression de Paris page 29 ligne 11 j'y ai trouvé deux fautes. La première „précisement. Mais il y aura", il faut „précisement tant de fois; mais il y aura". La seconde lig. 16 „de la composition", lisez „de la comparaison". Cette dernière faute est demeurée dans l'impression d'Hollande.

Arnauld verfolgte, wie wir aus diesen Briefen ersehen, mit gespannter Aufmerksamkeit die Ausgaben seiner *Géométrie*. Nach seinem Tode wurde sie unseres Wissens nur noch einmal aufgelegt; nämlich für die Gesamt-

ausgabe von Arnaulds Werken, im Jahre 1781. Die *Nouveaux Elémens de Géométrie* sind in Tom. LXII enthalten, abgedruckt von der dritten Ausgabe von 1692; zur Korrektur der in dieser letzteren noch stehen gebliebenen entstellenden Druckfehler wurde von den Herausgebern der *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld* ein Exemplar der zweiten Pariser Ausgabe benützt, das mit handschriftlichen Verbesserungen bedeckt war; dieselben sind von sachkundiger Hand, vielleicht nach Arnaulds eigenen Notizen, mit grofsem Fleifs ausgeführt gewesen, wie die Herausgeber berichten.

Es wäre ein gänzlich verfehlter Schlufs, wollte man die Bedeutung von Arnaulds *Géométrie* nach der verhältnismäfsig geringen Zahl von drei Ausgaben (die vierte in den *Oeuvres* ist nicht hierher zu rechnen) beurteilen. Im Gegenteil, Arnaulds *Nouveaux Elémens* bezeichnen eine Epoche in der Geschichte des mathematischen Unterrichts. Eben deshalb, weil Arnaulds Methode sich so ganz und unwiderstehlich der Elementargeometrie bemächtigte, weil sie Gemeingut wurde, weil alle Schriftsteller jener und der Folgezeit, welche die Elemente behandelten, von ihr abhängen, konnte es geschehen, dafs Arnaulds Name und das Buch, welches die Euklidkritik des siebzehnten Jahrhunderts zur schärfsten Ausprägung brachte und einen in solcher Vollständigkeit zum ersten Male seit Euklid unternommenen Neuaufbau der Elementargeometrie darstellt, in gänzliche Vergessenheit geriet. Montucla nennt Arnaulds Namen nicht; merkwürdig berührt es, dafs Chasles im *Aperçu historique* Arnauld nicht erwähnt, während er in einer eigenen Note (Note XVII) seine Verwunderung ausspricht, dafs der *Euclides adauctus et methodicus* von 1671 des Italieners Guarini nicht in der Geschichte der Geometrie genannt werde. Einen anderen italienischen Schriftsteller Vitale Giordano Giordani, der 1686 einen *Euclide restituto* herausgab (s. M. Cantor, *„Vorlesungen“* Bd. III S. 14), machte Leibniz auf Arnaulds Buch aufmerksam: *„Nonancurtius quidam in Belgio libellum scripsit de rationibus quem me videre memini; huius methodum laudat Arnaldus (celebris apud Theologos, sed idem in omni doctrinarum genere excellens) in secunda editione libri Gallici, quem inscripsit: Nova Geometriae Elementa* (s. Leibniz' Brief in Bd. I von Gerhardts *Leibnizausgabe*).

Unter den Schriftstellern, deren Abhängigkeit von Arnauld wir urkundlich feststellen konnten, ist zuerst Bernhard Lamy[1]), Pater vom Oratorium, zu nennen. Wir haben ihn schon in dem Briefe Dodarts an Arnauld kennen gelernt. Auch in der Geschichte der Philosophie ist er eine bekannte Persönlichkeit: er schrieb zu Gunsten des Occasionalismus.

---

1) Lamy: ältere Schreibweise; die neuere ist Lami.

Auf mathematisch-naturwissenschaftlichem Gebiete nennt uns Cornelius a Beughem von ihm seine: *Traitez de Mechanique, de l'Equilibre des Solides et des Liqueurs à Paris 1679,* besprochen im *Journal des Sçavans* XXII 1679. Dieser Mann gab nun 1683 ein Lehrbuch der Geometrie heraus unter dem Titel: *Les elémens de géométrie et la mésure de l'étendue,* Paris in 12°. Obwohl er in der Vorrede selbst sagt, dafs er für seine Methode Arnauld verpflichtet sei und nie daran gedacht hätte, eine Elementargeometrie zu schreiben, wenn Arnauld der seinigen eine Stereometrie beigegeben hätte, scheint Lamys Unternehmen, wie es auch in Dodarts Brief aufgefafst wird, eine gewisse *„Contrefaçon“* gegen Arnaulds Originalleistung zu sein. Wir wissen nicht, glauben aber aus Arnaulds Antwort an Dodart zu entnehmen, dafs es als Fortsetzung von Arnauld nicht autorisiert war. Nichtsdestoweniger erlangte es rasche Verbreitung und wurde als Lehrbuch, das eben Arnaulds Methode fast unverändert aufgenommen hatte, vielfach benützt. Es wird in der von Tschirnhaus verfafsten und von Leibniz ausführlich rezensierten deutschen Schrift: *„Gründliche Anleitung zu nüzlichen Wissenschafften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, wie sie aniezo von den gelehrtesten abgehandelt werden“,* (in 4° pagg. 32) empfohlen. Leibniz sagt in seiner Rezension in dem in Hannover 1700—1702 erschienenen *„Monatlichen Auszug aus neuen Büchern“: „Langsame und geschwinde können hernach des Lamy Nouveaux Elémens de Géométrie durchnehmen, da sie das vorige in besser ordnung wiederholen.“* Wir sehen, dafs schon hier Lamy geradezu als Verfasser von Arnaulds *Nouveaux Elémens de Géométrie* erscheint. Hat Lamy durch seine Usurpation von Arnauld die Aufmerksamkeit ab und auf sich zu lenken gewufst, so hat er wenigstens das Seine zur Verbreitung von Arnaulds Methode gethan. Da wir jetzt den historischen Zusammenhang und das Verhältnis beider Lehrbücher kennen, so können wir es nur als Triumph von Arnaulds Methode gelten lassen, dafs noch 1758 eine siebente Edition von Lamys Buch erschien. Ein Opus mehr algebraischer Natur scheinen Lamys *„Elémens des Mathématiques ou traité de la grandeur en général“* gewesen zu sein, von denen wir eine 3. edit. Amsterdam 1692 in 12° kennen. Wollte der besorgte Autor vielleicht durch dieses Werk die Verbreitung von Jean Prestets geschätztem, vorwiegend zahlentheoretischem Werk: *Elémens des Mathématiques* übernehmen, welches 1675 (besprochen im *Journal des Sçavans* 1676 X p. 135) unter dem Titel: *„Elémens des Mathématiques ou Principes Généraux de toutes les Sciences qui ont les grandeurs pour objets“* à Paris in 4° erschien, das 1689 wiederum in Paris in 2 vols zum zweitenmale, 1694 ebenda nochmals gedruckt wurde?

Wir wenden uns von Lamy ab und zu jenem Manne, welcher in

offenster und ehrlichster Weise in Dodarts Brief anfragen liefs, ob Arnauld damit einverstanden sei, wenn er dessen Werk durch eine Stereometrie vervollständige. Dieser Freund Dodarts kann wohl nur Pierre Varignon *sein.* Wir haben dafür folgende Gründe:

1) War Varignon an der Redaktion des *Journal des Sçavans* beteiligt, mufste also daher Arnaulds Buch kennen.

2) Varignon war wie Dodart Mitglied der Akademie der Wissenschaften, die beiden Gelehrten kannten sich also daher und waren befreundet; auf Varignon pafst Dodarts Satz: *Car outre que mon ami est un Géomètre sublime, il est très-familier est très-net.*

3) Wenn Dodart schreibt, dafs der Verfasser des geplanten Supplements zu Arnaulds *Nouveaux Elémens* sich von der Herausgabe durch Lamys Veröffentlichung abhalten liefs, so stimmt dies wieder ausgezeichnet mit dem Umstande überein, dafs Varignon sein Lehrbuch nicht selbst während seines Lebens veröffentlichte, sondern dafs dasselbe erst 1731 nach seinem Tode (1722) unter dem Titel: *Elémens de Mathématique de Monsieur Varignon* zum Druck befördert wurde.

4) Jener Freund Dodarts (s. dessen oben wiedergegebenen Brief) wollte eine Einleitung in die Algebra beigeben; wir finden diese als *Elémens d'algèbre et d'arithmétique* auf 66 Seiten an der Spitze von Varignons Buch.

5) Machen innere Gründe, z. B. die gerade bei M. Cantor, *„Vorlesungen“* Bd. III S. 527 wiedergegebene Herleitung des Satzes der Winkelsumme im Dreieck, welche genau mit der Arnaulds übereinstimmt, die Bedeutung, welche auf Axiome und Definitionen gelegt wird, die Stellung des pythagoräischen Satzes und dessen Beweis mit Hilfe von Proportionen es geradezu unwiderleglich, dafs jener vertraute Freund Dodarts der grofse Geometer Pierre Varignon ist.

Wir haben das Resultat gewonnen: *Pierre Varignons Werk Elémens de Mathématique ist direkt abhängig von Arnauld und dessen originaler Methode; ihre konsequente Durchführung auf stereometrische Grundlagen ist Varignons Verdienst.* M. Cantor nennt das Buch *„eine Geometrie von überall durchblickender Eigenart, die philosophische Geistesrichtung seines Verfassers zu erkennen gebend“;* damit ist am treffendsten Arnaulds Schule in ihrem berufensten Vertreter, in Varignon, charakterisiert.

Wir haben schon früher bei der Besprechung von Arnaulds mathematischen Thesen erwähnt, dafs ihm die bekannte Frage des Ptolemaeus an Euklid, ob es bei geometrischen Dingen nicht einen abgekürzteren Weg gäbe als den durch Euklids Elemente, sehr berechtigt erschien. Arnauld glaubte den geraden Weg für Könige zu kennen; in seinen *Nouveaux Elé-*

mens de Géométrie hat er ihn angebahnt. Dieser stolze Ausspruch Arnaulds sollte fünfundvierzig Jahre, nachdem er gethan wurde, thatsächlich seine Verwirklichung finden. Ein Herzog von königlichem Geblüt sollte durch Arnaulds Methode den Zugang zur Geometrie erreichen. Nähere Auskunft hierüber giebt uns der folgende Auszug aus der *Histoire de l'académie Royale des Sciences, année MDCCXXVII, à Paris, de l'Imprimerie Royale MDCCXXIX:*

En 1696 feu M. le Duc de Bourgogne étant venu en âge d'apprendre les Mathématiques, Mad^e. de Maintenon porta le Roi à confier cette partie de son éducation à M. de Malézieu, tandis qu'il donneroit à M. Sauveur les deux autres Enfants de France. M. de Malézieu assés délicat pour craindre qu'un si grand honneur ne s'accordât pas parfaitement avec l'attachement inviolable qu'il devoit à M. et Mad^e. du Maine et rassuré par eux-mêmes sur ce scrupule, demanda du moins en grace, que pour mieux marquer, qu'il ne sortoit point de son ancien engagement, il lui fut permis de ne point recevoir d'appointements du Roi. (Malézieu hat den Herzog von Maine in seiner Jugend unterrichtet, noch 1722 finden wir Malézieu als Direktor der Privatsternwarte dieses Herzogs.)

Parmi tous les Elémens de Géométrie qui avoient paru jusque-là il choisit ceux de M. Arnauld, comme les plus claires et les mieux digérés, pour en faire le fond des leçons qu'il donneroit à M. le Duc de Bourgogne. Seulement il fit à cet Ouvrage quelques additions et quelques retranchements. Il remarqua bientôt que le jeune Prince, qui surmontait avec une extrême vivacité les difficultés d'une étude si épineuse, tomboit quelques fois aussi dans l'inconvenient de vouloir passer à coté, quant il ne les emportoit pas d'abord. Pour le fixer d'avantage, il lui proposa d'écrire de sa main au commencement d'une leçon ce qu'il lui avoit été enseigné la vieille. Toutes ces leçons écrites par le Prince pendant le cours de quatre ans, et précieusement rassemblées, ont fait un corps, que M. Boissière, Bibliothecaire de M. le Duc du Maine, fit imprimer en 1715 sous le titre d'Eléments de Géométrie de Mgr. le Duc de Bourgogne.[1] *L'éditeur les dédie au Prince même, qui en est l'Auteur, et n'oublie pas tout ce qui est dû au sçavant maître de Géométrie. Il y a à la fin du Livre quelques Problêmes qui n'appartiennent point à des Eléments, résolus par la méthode Analytique et qui, selon toutes les apparences, sont de M. de Malézieu. Il est dit sur ce sujet, qu'Archimède, et les grands*

---

1) Louis, Herzog v. Bourgogne, Enkel Ludwigs XIV., geb. 1682. Louis Auguste, Herzog v. Maine, Sohn Ludwigs XIV. und der Frau v. Montespan, geb. 1670.

Géomètres anciens, ont dû avoir notre Analise, ou quelque méthode équivalente, parce qu'il est moraliment impossible qu'ils eussent suivi, sans égarer des routes aussi composées que celles qu'ils proposent. Mais par-là, on leur ôte la force merveilleuse qui à été necéssaire pour suivre sans égarer, des routes si tortueuses, si longues et si embarrassées, et cette force compense le mérite moderne d'avoir découvert des chemins sans comparaison plus courts et plus faciles. On veut que pour causer plus d'amiration, ils ayent caché leur Secret, quoiqu'en le révélant ils eussent causé une admiration, du moins égale, et qu'ils eussent en même temps infiniment avancé des Sciences utiles, on veut qu'ils ayent été tous également fidelles à garder ce secret, également jaloux d'une gloire qu'ils pouvoient changer contre une autre, également indifférents pour le bien public.

Damit ist erwiesen, dafs auch Malézieus Lehrbuch sich auf Arnauld stützt und dafs Nicolas de Malézieus Unterrichtsmethode (M. Cantor erwähnt Malézieu in Bd. III S. 14—15 der *„Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“*) im grofsen und ganzen die Antoine Arnaulds ist; zugleich giebt zitierte Stelle Aufschlufs über die Entstehung der *Elémens de Géométrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne.* —

Inhaltsübersicht der Nouveaux Elémens de Géométrie.

Schon in der Rezension des *Journal des Sçavans* haben wir in grofsen Zügen den Inhalt von Arnaulds *Géométrie* kennen gelernt; wir haben bei der Besprechung der für die Geschichte der Mathematik in Betracht kommenden Teile seiner *Logik* viele der Gesichtspunkte kennen gelernt, welche Arnauld in seiner *Géométrie* verwertet hat; es erübrigt aber doch noch eine etwas ausführlichere Darstellung des Buches unter Hervorhebung interessanter Stellen, Wiedergabe originaler Beweise und die Konstatierung des Eigentumsrechtes Arnaulds an zahlreichen Lehrsätzen. Damit haben wir uns im folgenden zu beschäftigen.

Arnaulds *Nouveaux Elémens de Géométrie* sind eingeteilt in 15 Bücher. Dem I. Buche voraus gehen die Definitionen der Hilfsmittel des synthetischen Apparats, die Definitionen des Axioms, der Forderung (Demande), des Theorems, des Problems, des Lemma, Corollars, der Definition selbst; für Sätze mit zahlreichen Corollaren verwendet Arnauld die Bezeichnung: *„Proposition fondamentale“*. Arnauld fügt hinzu, dafs diese Dinge eigentlich in die Logik gehören; wir haben dort schon z. B. besonders für das Axiom und die Definition die Begriffe kennen gelernt, welche Arnauld mit den aufgeführten Bezeichnungen zur Deckung bringt. Bei Pascal und Arnauld sind überhaupt Logik und Geometrie keine sehr streng geschiedenen

Wissensgebiete. Pascal hat einmal den Ausspruch gethan, Geometrie sei Logik, und Arnauld sagt in der Vorrede der *Nouveaux Elémens*: „*On voit qu'il n'estoit pas fort difficile à l'Auteur de la Nouvelle Logique ou Art de penser, qui avoit veu quelque chose de cette Geometrie, de remarquer, comme il a fait dans la IV. Partie, les défauts de la méthode d'Euclide, et d'avancer qu'on pourroit digerer la Geometrie dans un meilleur ordre. C'estoit deviner les choses passées.*“ Mit dem letzten Satze weist er auf die von ihm selbst gefundenen Lehrsätze hin.

An diese Rekapitulation schliefst sich die Erklärung der verwendeten mathematischen Operationszeichen an. Wir finden in der heutigen Bedeutung das Zeichen der Addition und Subtraktion, das Gleichheitszeichen; die arithmetische Proportion schreibt Arnauld $7 \cdot 3 :: 13 \cdot 9$, die geometrische $6 \,.\, 2 :: 12 \,.\, 4$, die stetige $\div 3 \,.\, 9 \,.\, 27$. Durch Nebeneinanderstellung zweier kleiner lateinischer Buchstaben bezeichnet er sowohl das Produkt zweier Faktoren (*grandeur plane*), d. h. ein Rechteck der Höhe b und der Breite d, als auch eine Strecke, deren Endpunkte b und d genannt werden.

Für die Rückverweise führt er, was wieder bezeichnend ist für seinen Sinn für Methodik, eine sorgfältige Nummerierung der einzelnen Aussprüche, seien es nun Axiome, Theoreme u. s. w. oder Definitionen und Beweise, durch.

Das erste Buch behandelt getreu dem in der *Logik* festgestellten Grundsatze, die Gattung vor den Arten zu behandeln, die Gröfsen im allgemeinen; es lehrt die vier Grundoperationen. Arnauld setzt gewisse einfachste natürliche Kenntnisse voraus; Zweck sei es für jede Wissenschaft, diese zu vertiefen und zu erweitern. Es wird also hier vorausgesetzt:

1) Das Rechnen mit Zahlen.

2) Das kommutative Prinzip.

3) Der Begriff des Körpers, der Oberfläche (*surface*), indem man von einer Dimension absieht, und der Linie, wobei zwei Dimensionen unberücksichtigt bleiben.

4) Die Übertragung des Begriffs des Produkts auf den Inhalt begrenzter Flächenstücke.

5) Die Deutung von Gröfsen als Körper, Flächen und Strecken.

An sechster Stelle wird die Wichtigkeit allgemeiner Gröfsenzeichen betont gegenüber speziellen Fällen, in welche noch deren spezifische Abhängigkeit einzugehen pflegt; es wird darauf aufmerksam gemacht, dafs die Identität der formalen Bezeichnung gewahrt werden mufs. Unter Gröfse im allgemeinen versteht Arnauld die geometrischen Gebilde, die Zahlen, die Zeit, Geschwindigkeit, kurz jede Quantität.

Sodann wird der aliquote Teil (*mesure*) eines Ganzen definiert.

3 und 4 sind *„aliquotes pareilles“* von 9 und 12, weil $9:3 = 12:4$; *„portion“* ist ein aliquoter oder nicht aliquoter Teil.

Es folgen Axiome über Gleichheit und Ungleichheit, wie:

Das Ganze ist gröfser als sein Teil.

Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile.

Sind zwei Gröfsen einer dritten gleich, sind sie unter sich gleich.

Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches u. s. w.

Die *„aliquotes pareilles“* gleicher Gröfsen sind gleich und umgekehrt.

Als Schreibweise für das Quadrat giebt Arnauld in der ersten Ausgabe von 1667 b^q (*b quarré*) oder b^2 (*b de deux dimensions*) analog für den Cubus b^c oder b^3; in den späteren Ausgaben ist auch die Schreibweise der zweiten Potenz qb und $b2$ erwähnt.

Der inverse Charakter von Multiplikation und Division wird betont (*la multiplication refait ce que la division avoit défait*).

„Grandeurs complexes“ heifsen bei Arnauld die Aggregate; dafür giebt er besondere Regeln hinsichtlich der Grundoperationen.

„terme“ ist einer der Summanden des Aggregats.

Der Klammern bedient sich Arnauld nicht. Die Zeichenänderungen bei der Subtraktion der *„grandeurs complexes“* werden begrifflich klar gemacht.

Bei der Multiplikation der Aggregate sind soviele Partialprodukte zu bilden, wie das Produkt der Zahl der Terme des einen Faktors in die entsprechende Anzahl des andern Faktors angiebt. Daran schliefsen sich die Vorzeichenregeln für die Multiplikation. Um sich klar zu machen, wie zwei negative Faktoren ein positives Produkt geben, verfährt Arnauld in den späteren Ausgaben seines Buches so. Er giebt dem einen Faktor den Vorzug. Wir wollen ihn Multiplikator nennen. Ist der Multiplikator positiv, so ist die Multiplikation auf die Addition zurückzuführen; denn setzt man den zweiten Faktor sovielmal als Summand an, als der Multiplikator Einheiten hat, so bleibt, ob der zweite Faktor nun positiv oder negativ ist, das Zeichen nach den Regeln der Addition erhalten, z. B.

$$3 \cdot 7 = + 7 + 7 + 7 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot (-7) = (-7) + (-7) + (-7).$$

Ist dagegen der bevorzugte Faktor, der Multiplikator, negativ, so ist die Multiplikation auf die Subtraktion zurückzuführen, z. B.

$$(-3) \cdot 7 = -(+7) - (+7) - (+7)$$

und

$$(-3)(-7) = -(-7) - (-7) - (-7),$$

d. h. der zweite Faktor ist sovielmal (ob positiv oder negativ) als Subtrahend anzusetzen, als der Multiplikator Einheiten enthält. Hier, z. B. für

$1:(-3) = (-4):12$, sei die Definition der Multiplikation: dafs die Einheit sich zum einen Faktor verhalten müsse, wie der andere zum Resultat der so definierten Operation, nicht gerechtfertigt. Durch diese Betrachtungen ist Arnauld zu der Ansicht gelangt, dafs die Proportion $1:-1 = -1:1$ nicht wirklich richtig sei; dies ist die Stelle in Arnaulds Buch, welche Leibniz im Streite mit Grandi unter Berufung auf Arnaulds Namen angeführt hat. M. Cantor erwähnt diese Thatsache Bd. III S. 367 seiner *„Vorlesungen"*, wir haben schon in der Einleitung zu vorliegender Arbeit darauf hingewiesen.

Am Schlufs des I. Buches werden die Gleichungen ersten Grades eingeführt. Die Seite der Gleichung heifst *„membre d'équation"*. Die Reduktion auf 0 wird gelehrt. Das Negative weniger als Null genannt. Einige einfache Textgleichungen mit mehreren Unbekannten, z. B. die alte Aufgabe vom säckebeladenen Esel und der Eselin, eine Wechselaufgabe u. s. w. folgen.

Das II. Buch beginnt in der ersten Ausgabe mit dem Begriff der Differenz (*excès, difference*) und des Verhältnisses (*raison*). Der erste Term bei einer Vergleichung zweier Gröfsen heifst *„antecedent"*, der andere *„consequent"*. Das Verhältnis (*raison*) zweier Gröfsen ist der Ausdruck dafür, wievielmal die zweite in der ersten enthalten ist. Das Verhältnis wird von Arnauld also als Quotient definiert. Es werden sodann zwei Arten von Verhältnissen unterschieden: 1) *raison exacte* oder *raison de nombre à nombre* ist ein Verhältnis, in welchem der Konsequent selbst aliquoter Teil oder ein aliquoter Teil des Konsequenten aliquoter Teil des Antecedenten ist. Solche Gröfsen, deren Verhältnis eine *raison de nombre à nombre* ist, heifsen kommensurabel. Die zweite Art ist das Verhältnis zweier Gröfsen, welche kein gemeinsames Mafs besitzen (Inkommensurablen); es heifst *„raison sourde"*. Es wird dann weiter unterschieden, und zwar: *Raison de nombre à nombre* in *raison d'égalité* (ein Bruch, dessen Wert 1 ist) und *raison d'inégalité;* letzteres wieder in *raison de moindre inégalité* (echter Bruch) und *raison de plus grande inégalité* (unechter Bruch). Es folgt die Definition der arithmetischen und geometrischen Proportion als Gleichheit zweier Differenzen bezw. Verhältnisse. *Raison d'égalité* und *égalité des raisons* dürfen nicht verwechselt werden. Eine stetige arithmetische Proportion von mehr als drei Gliedern heifst *„progression"*.

Eingehend behandelt Arnauld die geometrische Proportion.

Die beiden äufseren Glieder inbezug auf die inneren heifsen *reciproques;* alle Glieder *proportionels*.

Für die Beweise seiner Sätze über Proportionen geht Arnauld von folgenden, von ihm natürliche genannten, einfachsten Proportionen aus:

(I) $A : A = B : B$ (alle *raisons d'égalité* sind unter sich gleich),

(II) $B : 3B = C : 3C$,

(III) $B : C = 3B : 3C$,

(IV) $3B : 5B = 3C : 5C$,

(V) $3B : 3C = 5B : 5C$.

Was von den Multiplen gilt, gilt auch vom aliquoten Teil; denn jede Gröfse ist Multiplum ihrer aliquoten Teile und selbst aliquoter Teil ihrer Multiplen.

Arnaulds Hauptdefinition der Proportion lautet: Zwei Verhältnisse sollen gleich heifsen, wenn alle *„aliquotes pareilles“* der beiden Antecedenten gleichvielmal in den beiden Consequenten enthalten sind: d. h. wenn es sich um die Proportion handelt $b \,.\, c :: f \,.\, d$ und $x = \frac{1}{100}b$ ist, soll y so gewählt werden, dafs $y = \frac{1}{100}f$; dann sind zunächst x und y *„aliquotes pareilles“* von b und f; also:

$$b \,.\, x :: f \,.\, y$$
$$b \,.\, f :: x \,.\, y;$$

wenn nun $c : x = d : y$ ist, hat man eine *raison de nombre à nombre* und es ist $b \,.\, c :: f \,.\, d$; diese Proportion gilt auch noch, wenn x zwar nicht restlos in c, aber y (und zwar dann auch nicht ohne Rest) ebensooft in d (auf)geht; dann hat man eine Gleichheit (Proportion) zweier *raisons sourdes* (irrationaler Verhältnisse). [Es heifst dies also soviel, um eine moderne Ausdrucksweise zu brauchen, dafs der Exponent eines irrationalen Verhältnisses eine Irrationalzahl, aber ein ganz bestimmter, einer und nur einer, ist.] Arnauld fährt fort: Wenn man den zweiten Fall hat, also der Rest von x in den ersten Consequenten r heifsen möge, der von y in den zweiten Consequenten r', so sind *„aliquotes pareilles“* von x und y gleichoft in r und r' enthalten, also:

$$x : r = y : r';$$

es sei die ursprüngliche Proportion

$$b : c = f : g$$

gleich der folgenden:

$$5x : (3x + r) = 5y : (3y + r');$$

es sei nun

$$x' = \tfrac{1}{10}d'x, \quad y' = \tfrac{1}{10}d'y;$$ [1]

1) Das hier in Druck erschienene $d'x$, $d'y$ für einen Bruchteil von x, und zwar einen kleinen, aliquoten, erinnert lebhaft an das Differential dx, sollte dieses französische $d'x$ Leibniz bei der Wahl seiner Bezeichnung vorgeschwebt sein?

ich behaupte, dafs, wenn x' in r 7mal $+ r_1$ geht, auch y' 7mal $+ r_1'$ in in r' gehen mufs; es wird die Proportion

$$x : r = y : r'$$

jetzt

$$10x' : (7x' + r_1) = 10y' : (7y' + r_1'),$$

die erste Proportion lautet jetzt, da $b = 50x'$ (da $c = 30x' + r$ und $r = 7x' + r_1$, also $c = 37x' + r_1$),

$$50x' : (37x' + r_1) = 50y' : (37y' + r_1');$$

würde diese Proportion nicht gelten, so würde sie auch die Unrichtigkeit der als richtig vorausgesetzten

$$b \,.\, c :: f \,.\, g$$

zur Folge haben; also mufs

$$x : r = y : r'$$

sein.

Für „*raisons de nombre à nombre*“ läfst sich der Beweis also positiv führen; für irrationale Verhältnisse dagegen nur apagogisch.

Es schliefsen sich hier bekannte Sätze über Proportionen an, z. B.:

Die Summe oder Differenz der Antecedenten in einer Proportion verhält sich zur Summe bezw. Differenz der Consequenten wie ein Antecedent zu seinem Consequent.

Eine Proportion bleibt bestehen, wenn man auf beiden Seiten die Summe oder Differenz eines Antecedenten und seines Consequenten vergleicht mit denselben Consequenten. Diese Operation heifst in der ersten Auflage Componendo bezw. Dividendo.

Der Hauptsatz über geometrische Proportionen: Das Produkt der äufseren Glieder ist gleich dem der innern, wird für die Gleichheit zweier „*raisons sourdes*“ besonders bewiesen unter Zurückgreifen auf die Definition der Proportion.

Für die bei Proportionen möglichen Vertauschungen der Glieder giebt Arnauld folgende Tabelle:

1) $b \,.\, c :: f \,.\, g$ } *Principale,*
2) $f \,.\, g :: b \,.\, c$ } *Equivalente,*
3) $c \,.\, b :: g \,.\, f$ } *Permutation,*
4) $g \,.\, f :: c \,.\, b$ } *Equivalente,*
5) $b \,.\, f :: c \,.\, g$ } *Alterne,*
6) $c \,.\, g :: b \,.\, f$ } *Equivalente,*
7) $f \,.\, b :: g \,.\, c$ } *Permutation de l'Alterne,*
8) $g \,.\, c :: f \,.\, b$ } *Equivalente.*

Davon sind drei für den Geometer wichtig: 1), 3) und 5).

Buch III handelt vom zusammengesetzten Verhältnis (*Des raisons composées*). Arnauld versteht das Produkt von Verhältnissen darunter. Es werden hier viele Sätze, die man jetzt nicht mehr in Worten auszusprechen pflegt, erörtert und bewiesen, z. B.:

Das Verhältnis einer Gröfse mehrerer Dimensionen zu einer homogenen Gröfse (von ebensoviel Dimensionen) ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen jeder Dimension der ersteren Gröfse zu der entsprechenden Dimension der anderen Gröfse.

Wir heben folgende Sätze hervor: In einer stetigen Proportion ist das Verhältnis zweier Terme eine *raison douplée, triplée* u. s. w. des Verhältnisses zweier unmittelbar sich folgender Terme, je nachdem jene ersteren durch einen Term (d. h zwei Intervalle) oder zwei Terme getrennt sind, z. B. ist in

$$\div\!\!\div a \,.\, b \,.\, c, \quad \frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} \left(\textit{raison douplée} \text{ von } \frac{b}{c}\right).$$

Das Produkt zweier Gröfsen ist mittlere Proportionale zwischen ihren Quadraten. In einer geometrischen Progression verhalten sich die Cuben zweier sich unmittelbar folgender Glieder wie zwei Glieder, zwischen welchen drei Intervalle liegen.

Beweis. Wenn

$$\div\!\!\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f,$$

so ist

$$bb \,.\, cc :: c \,.\, f,$$

also

$$bbf = ccc \quad \text{und} \quad bbb : bbf = b : f,$$

also

$$bbb : ccc = b : f.$$

Auf diesem Wege ist man zur Würfelverdoppelung gelangt. Denn wenn der gegebene Würfel bbb ist, hat man $f = 2b$ zu nehmen, wenn man nun zwischen b und f zwei mittlere Proportionalen einschiebt, so dafs $\div\!\!\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$, so ist der Cubus der ersten mittleren Proportionale das Doppelte des Cubus von b.

Allgemein kann man genannten Satz so aussprechen: Die Cuben zweier beliebiger Glieder einer stetigen geometrischen Proportion verhalten sich wie zwei Glieder derselben Proportion, zwischen denen dreimal soviele Intervalle liegen wie zwischen den beiden erstgenannten Gliedern.

Aus den folgenden Sätzen möge noch der herausgegriffen werden, weil er für die Art des Aussprechens von Sätzen charakteristisch ist, die wir heute einfach mechanisch nach den Regeln der Multiplikation und Division in Anwendung zu bringen pflegen:

Zwei gleiche *„grandeurs planes“* (Produkte zweier Faktoren) sind

immer reciprok; d. h. die beiden Dimensionen der einen sind die äußeren Glieder einer Proportion, deren innere Glieder die Dimensionen der andern bilden (Dimension ist der eine Faktor des Produkts).

Von zwei Verhältnissen heißt dasjenige größer, welches der *raison d'égalité* (der Einheit) näher kommt. Hier hat Arnauld offenbar nur echte Brüche im Sinn.

Zur Vergleichung der Verhältnisse hinsichtlich ihrer Größe lehrt Arnauld weiter das Verfahren auf gemeinsamen Nenner zu bringen.

Damit schließt in der Ausgabe von 1667 das III. Buch.

Der Titel des IV. Buches lautet: *Des Grandeurs Commensurables et Incommensurables.*

Inkommensurabel heißen zwei Größen, wenn sie sich nicht verhalten wie zwei Zahlen. Wenn zwei Größen inkommensurabel sind, dagegen ihre Quadrate oder Cuben kommensurabel, nennt Arnauld diese Größen „*incommensurables en elles mêmes, en longeur*" oder „*lineairement*". Die teilerfremden Terme des reduzierten Bruches, durch welchen ein Verhältnis (*raison de nombre à nombre*) gemessen wird, heißen „*Exposans de cette raison*". Hier betont Arnauld nochmals den Unterschied bei der Stellung von Ziffern und Buchstaben. Erstere sind nebeneinander gestellt addiert, letztere multipliziert.

Man darf bei Ziffern die Reihenfolge nicht ändern; im Produkt der Buchstaben ist sie gleichgültig.

Durch zwei nebeneinandergestellte gleiche Buchstaben wird eine Quadrat-, durch drei eine Cubikzahl bezeichnet. Überhaupt stellt jede Nebeneinanderstellung von Buchstaben, welche genau in zwei gleiche Hälften zerlegt werden können, eine Quadratzahl dar, z. B. $bbccdd$, die Wurzel derselben ist bcd. Daraus folgt ohne Beweis, daß das Produkt zweier Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist, ebenso für Cubikzahlen.

Um eine Größe zum Zweck der Vergleichung mit einer andern auf ebensoviele Dimensionen zu bringen, fügt Arnauld eins, zwei u. s. w. i hinzu, einen Buchstaben, den er zur Bezeichnung der reellen Einheit reserviert. Zwei Größen, die, beide zum Quadrat erhoben, sich verhalten wie zwei Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, stehen in keiner *raison de nombre à nombre* (unter *nombre* wird immer eine rationale Zahl verstanden), ferner: Zwei Größen, deren *raison douplée* oder *triplée* (d. h. das Verhältnis ihrer Quadrate oder Cuben) nicht gleich ist einem Verhältnis, dessen Exposans beide Quadrat- oder Cubikzahlen sind, stehen in keiner *raison de nombre à nombre;* umsomehr verhalten sich Größen nicht wie (rationale) Zahlen, wenn schon ihre Quadrate oder Cuben sich nicht verhalten wie (rationale) Zahlen. Zwei Größen dieser Art heißen inkommensurabel.

Wenn drei Gröſsen in stetiger Proportion stehen und die erste und dritte nach vollzogener Reduktion nicht wie zwei Quadratzahlen sich verhalten, so ist die erste und zweite und die zweite und dritte Gröſse linear inkommensurabel; ihre Quadrate dagegen kommensurabel.

Beweis. Das Verhältnis der ersten zur dritten ist zusammengesetzt aus den Verhältnissen der ersten zur zweiten und der zweiten zur dritten. Da diese beiden letzteren Verhältnisse aber gleich sind, so können sie keine *raisons de nombre à nombre* sein, wenn ihre Multiplikation nicht das Verhältnis zweier Quadratzahlen ergiebt; es sind also *raisons sourdes.* Zwei Gröſsen sind inkommensurabel oder bilden eine *raison sourde,* ist aber gleichbedeutend.

In Zeichen:

$$\div k \,.\, l \,.\, m$$

$$k \,.\, m :: 3 \,.\, 4$$

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} \quad \text{und} \quad \frac{k}{l} = \frac{l}{m},$$

da $\frac{k}{m} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} = \frac{3}{4}$ ist, so kann $\frac{k}{l}$ und $\frac{l}{m}$ nicht das Verhältnis zweier (rationaler) Zahlen sein; dagegen $\frac{k^2}{l^2} = \frac{k}{m} = \frac{3}{4}$, also k^2 und l^2 kommensurabel.

Wenn das Verhältnis der ersten zur dritten Gröſse sich nicht durch zwei (rationale) Zahlen darstellen läſst, so ist die zweite und dritte, und die erste und zweite linear und quadratisch inkommensurabel.

Wenn vier stetig proportionale Gröſsen gegeben sind und die erste zur vierten sich verhält wie eine Cubikzahl zu einer anderen Cubikzahl, so verhält sich die erste zur zweiten wie die erstere Cubikzahl zur Wurzel aus der zweiten $\times$ dem Quadrat der Wurzel der ersteren Cubikzahl, und die dritte Gröſse zur vierten wie das Produkt der Wurzel der ersteren Cubikzahl in das Quadrat der Wurzel der zweiten Cubikzahl zur zweiten Cubikzahl.

$$\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$$

$$b \,.\, f :: \begin{cases} 8 \,.\, 27 \\ xxx \; yyy \end{cases}$$

also

$$\div b \,.\, c \,.\, d \,.\, f$$

$$\div 8 \,.\, 12 \,.\, 18 \,.\, 27$$

$$\div xxx \,.\, xxy \,.\, yyx \,.\, yyy.$$

Wenn die erste und vierte sich nicht wie zwei Cubikzahlen verhalten, so ist die erste und zweite, die zweite und dritte, sowie die dritte und vierte linear [und quadratisch] inkommensurabel, und erst deren Cuben sind kommensurabel.

Denn wenn

$$\div k \,.\, l \,.\, m \,.\, n \quad \text{und} \quad k \,.\, n :: 3 \,.\, 4\,,$$

so ist

$$\frac{k}{n} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l}{m} \cdot \frac{m}{n},$$

und da $\frac{k}{l} = \frac{l}{m} = \frac{m}{n}$ ist, kann keines dieser drei Verhältnisse rational sein. Dagegen $\frac{k^3}{l^3} = \frac{l^3}{m^3} = \frac{m^3}{n^3} = \frac{k}{n}$ rational. Wenn endlich das Verhältnis der ersten zur vierten Gröſse eine *raison sourde* ist, so sind die Verhältnisse der zweiten zur dritten, der ersten zur zweiten und der dritten zur vierten irrational; linear und cubisch inkommensurabel jene Gröſsen selbst. Wenn zwei quadratische Gröſsen sich nicht verhalten wie zwei rationale Zahlen oder wenigstens nicht wie zwei Quadratzahlen, so sind ihre Wurzeln inkommensurabel.

Wenn drei Gröſsen eine stetige Proportion bilden und die gröſste der Summe der beiden andern gleich ist, so sind sie absolut inkommensurabel.

Eines der Glieder ist, wenn die drei Gröſsen sich wie Zahlen verhalten würden, nach möglichster Reduktion jedenfalls ungerade, die beiden andern gerade, oder beide ungerade. Die auferlegte Bedingung schlieſst also aus, daſs die drei Gröſsen, zu je zwei ein Verhältnis bildend, sich wie (rationale) Zahlen verhalten können.

Den letzten Abschnitt des vierten Buches bilden Sätze über Quadratzahlen, welche die Summe zweier Quadratzahlen sind, also die Konstruktion rationaler rechtwinkliger Dreiecke ermöglichen.

Arnauld giebt in der ersten Auflage folgende Regel: Die gröſsere Hälfte einer ungeraden Quadratzahl ist die Wurzel eines Quadrats, welches gleich der Summe zweier Quadrate ist.

Beweis: $(b+1)^2 = b^2 + \overline{2b+1}$ ist jedenfalls dann Summe zweier Quadrate, wenn $\overline{2b+1}$ Quadratzahl ist; seiner Form nach ist aber $2b+1$ ungerade; $b+1$ nennt Arnauld gröſsere Hälfte von $\overline{2b+1}$.

Arnauld giebt zur Berechnung rationaler rechtwinkliger Dreiecke folgende Tabelle bei, deren erste Kolonne eine arithmetische Progression der Differenz 4 enthält; die zweite Kolonne füllen die Triangularzahlen der ersteren; in der dritten stehen dieselben Triangularzahlen je um Eins vermehrt.

Die vierte Kolonne bringt die natürlichen ungeraden Zahlen, beginnend mit 3; die fünfte die Quadrate der Zahlen der vierten, die sechste die Quadrate der Zahlen der zweiten; die siebente Kolonne endlich die Quadrate der Zahlen der dritten; also:

I	II	III	IV	V	VI	VII
4	4	5	3	9	16	25
8	12	13	5	25	144	169
12	24	25	7	49	576	625
16	40	41	9	81	1600	1681
20	60	61	11	121	3600	3721
24	84	85	13	169	7056	7225
28	112	113	15	225	12544	12769
32	144	145	17	289	20736	21025
36	180	181	19	361	32400	32761
40	220	221	21	441	48400	48841

Die Zahlen in der fünften Kolonne sind die Summe der entsprechenden in der zweiten und dritten; die der siebenten die Summe der entsprechenden in der fünften und sechsten Kolonne.

In der ersten Ausgabe folgt noch ein Kapitel *„De la Proportion entre les aliquotes de la même grandeur"*, in welchem die Verhältnisse von Quotienten zu Quotienten besprochen werden.

Hier werden die geometrischen Reihen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots$$
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \cdots$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \cdots \text{ u. s. w.}$$

ins Unendliche fortgesetzt und ihre Summen zu 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. bestimmt. Zum Beweise trägt Arnauld $bx = \frac{1}{3}bz$ von einem festen Anfangspunkt aus auf einer Geraden ab, ferner trägt er $bc = \frac{1}{4}bz$ auf; dann verhält sich $bx : bc = \frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$, also ist $cx = \frac{1}{3}bc$, man hat also cx in 4 gleiche Teile zu teilen und drei zu behalten, um $\frac{1}{16}bz$ zu bekommen, da $cx = \frac{1}{12}bz$

b c d f x z

Fig. 2.

ist, also $\frac{3}{4}cx = \frac{3}{48}bz = \frac{1}{16}bz$; nun heiſse $\frac{3}{4}cx$ cd; dann ist $dx = \frac{1}{4}cx$ ein Drittel von cd; fährt man so fort, teilt entsprechend dx in vier gleiche Teile, sodaſs $\frac{3}{4}dx = df$, so ist zunächst $df = \frac{3}{4}dx = \frac{1}{4}cd = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}bc = \frac{1}{64}bz$; um das nächste Glied der geometrischen Reihe zu erhalten, hätte man fx in vier gleiche Teile zu teilen und $fg = \frac{3}{4}fx$ ergäbe das Glied $\frac{1}{256}bz$ der Reihe. Man sieht, daſs die Werte bc, bd, bf, bg u. s. w. (die Partialsummen) alle unter bx bleiben und erst nach *„subdivisions infinies"* die Stelle x erreichen. Mit dieser Kenntnis wird sich Arnauld genau des Sophismas bewuſst, welches der sogenannte Achilles des Zeno enthält. Denn

wenn die Schildkröte eine Meile Vorsprung hat und Achill zehnmal so schnell läuft, so beträgt die Summe der Strecken, welche die Schildkröte macht, $\frac{1}{9}$ (einer Meile) $= \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} +$ in inf. und Achill wird $\frac{10}{9}$ zurücklegen, während jene $\frac{1}{9}$ kriecht, also wird Achill sie am Ende des $\frac{1}{9}$ der zweiten Meile einholen. Eine verwandte Aufgabe schliefst Arnauld an: Wenn eine Uhr Stunden- und Minutenzeiger hat, alle Punkte zu bezeichnen, wo die beiden sich begegnen.

Er (Arnauld) giebt die Lösung $1 + \frac{1}{11}$, $2 + \frac{2}{11}$, $3 + \frac{3}{11}$ u. s. w. bis $11 + \frac{11}{11} = 12$.

Wir sind bisher der ersten Ausgabe gefolgt. In den späteren sind die Bücher II, III, IV ziemlich umgearbeitet und etwas vermehrt. An der Spitze des II. Buches sagt Arnauld dort: Nichts sei in der Geometrie bisher schlechter behandelt worden als die Proportionen. Wirklich waren ja im Munde der Zeit die Proportionen der zweite Fleck neben der Parallelenlehre, welche den schönen Leib der Geometrie entstellten. Auch er (Arnauld) sei von dem, was er in der ersten Auflage seines Buches zum Druck gegeben, nie so ganz befriedigt gewesen. Unterdessen habe ihm ein flamländischer Edelmann Mons. de Nonancourt eine Abhandlung zu lesen gegeben, deren Urheber jener sei: *Euclides logisticus sive de ratione Euclidea;* diese habe ihm so gefallen, dafs er manches davon in sein Buch übernommen habe. Nicht alle Leute waren der Ansicht, dafs die späteren Zusätze vorteilhaft waren, uud auch wir müssen, nachdem wir beide Versionen kennen gelernt haben, der ursprünglichen Klarheit der ersten Ausgabe den Vorzug geben. Hervorheben wollen wir aus den späteren Fassungen nur den Beweis für die Gleichheit zweier Verhältnisse unter der notwendigen und hinreichenden Bedingung, dafs alle *aliquotes pareilles* der Antecedenten gleich oft in den Consequenten enthalten sind. Er lautet: Wären die beiden Verhältnisse unter obiger Bedingung auch nur um eines Haares Breite ungleich, so könnte man im Nenner des gröfseren $\frac{B}{C}$ eine Gröfse Z addieren, welche die Gleichheit mit $\frac{F}{G}$ herstellen würde. Dann könnte man den aliquoten Teil X von B so wählen, dafs er in Z enthalten wäre, und dann wäre X in C mindestens einmal mehr enthalten wie der *„aliquote pareille“* Y von F in G. Damit ist die Annahme der Ungleichheit der beiden Verhältnisse unter erfüllter obiger Bedingung ad absurdum geführt.

In den späteren Auflagen sind die Sätze über Quadratzahlen vermehrt.

Zuerst wird der Satz $(bb - cc) = (b + c)(b - c)$ in Worten ausgesprochen.

Hieran schliefst sich die Aufgabe, die Quadrate zu finden, welche eine gegebene Differenz h besitzen.

Lösung: Der Quotient aus h und einem beliebigen seiner Teiler sei $q = \frac{h}{d}$; nimmt man als Wurzel der einen Quadratzahl $\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}q$, als Wurzel der andern $\frac{1}{2}d - \frac{1}{2}q$, so genügt die Differenz der Quadrate dieser Werte der Aufgabe.

Speziell kann man als Teiler d auch die Einheit benützen.

II. Aufgabe: Alle Zahlen zu bestimmen, deren Quadrat Summe zweier Quadrate ist.

Lösung: Jede Zahl, welche selbst Summe zweier (verschiedener) Quadratzahlen ist, hat die Eigenschaft, dafs ihr Quadrat Summe zweier Quadrate ist.

Beweis. Es sei $bb + cc$ eine solche Zahl, dann ist

$$(bb + cc)^2 = b^4 + c^4 + 2bbcc$$
$$(bb - cc)^2 = b^4 + c^4 - 2bbcc,$$

also

$$(bb + cc)^2 = 4bbcc + (bb - cc)^2;$$

hier ist aber $4bbcc$ sicher Quadratzahl, weil sie sich in genau zwei gleiche Faktoren $2bc$ zerspalten läfst.

I. Corollar: Im speziellen kann $cc = 1$ sein; also jede Quadratzahl $+ 1$ hat die Eigenschaft, dafs ihr Quadrat Summe zweier Quadrate ist; die Wurzel des einen dieser Summanden ist die ursprüngliche Quadratzahl $- 1$, die des andern die doppelte Wurzel der ursprünglichen Quadratzahl.

$$(bb + 1)^2 = 4bb + (bb - 1)^2.$$

II. Corollar: Das Quadrat der gröfseren Hälfte einer ungeraden Quadratzahl ist die Summe zweier Quadrate.

$$(n + 1)^2 = n^2 + \overline{2n + 1}$$

und $(n + 1)^2$ ist Summe zweier Quadrate, wenn $2n + 1 = hh$ ist.

Es könnte nun jemand den Einwand machen, es könnte aufser den Zahlen, welche Summe zweier Quadrate sind, noch andere geben, welche die verlangte Eigenschaft besitzen. Arnauld sagt: Ich leugne die Folge. Dann müfste es unter den gröfseren Hälften ungerader Quadratzahlen auch solche geben, welche nicht Summe zweier Quadrate sind.

Diesen Nachweis, dafs wirklich alle gröfseren Hälften ungerader Quadratzahlen Summe zweier Quadrate sind, kann man aber so führen:

Eine jede ungerade Quadratzahl $(2a + 1)^2$ hat die Form $2n + 1$, also:

$$\begin{aligned} 2n + 1 &= (2a + 1)^2 = [\underbrace{(a + 1) - a}_{1}]^2 + 4a(a + 1) \\ &= \qquad\qquad\qquad 1 \qquad\quad + 4a(a + 1) \\ n &= 2a(a + 1), \end{aligned}$$

also

$$n + 1 = 2a(a + 1) + 1 = 2a^2 + 2a + 1,$$

endlich

$$n + 1 = a^2 + (a^2 + 2a + 1) = a^2 + (a + 1)^2.$$

Die gröfsere Hälfte der ungeraden Quadratzahl läfst sich also darstellen als Summe der Quadrate der gröfseren und der kleineren Hälften der Wurzel der ungeraden Quadratzahl.

III. Corollar: Das Doppelte einer Zahl, welche Summe zweier Quadratzahlen ist, ist ebenfalls Summe zweier Quadratzahlen; nämlich des Quadrats der Summe der Wurzeln der beiden Componenten der ursprünglichen und des Quadrats der Differenz jener Wurzeln.

$$2(bb + cc) = 2bb + 2cc = (b + c)^2 + (b - c)^2.$$

IV. Corollar: Dasselbe gilt für die Hälfte

$$\tfrac{1}{2}(bb + cc) = \tfrac{1}{2}bb + \tfrac{1}{2}cc = (\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c)^2 + (\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c)^2.$$

Hieran schliefsen sich Probleme zur Auffindung von Zahlen, welche in bestimmter Ordnung aufeinanderfolgen.

1) Wird die Summe einer arithmetischen Progression bestimmt, wenn man den ersten und letzten Term und die Anzahl der Terme kennt.

2) Wird die Summe einer geometrischen Progression bestimmt.

Im III. Problem behandelt Arnauld die Triangular- und Pyramidalzahlen.

Wir finden eine Tafel derselben in Gestalt eines Rechtecks:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	

Es handelt sich darum, die Summe beliebig vieler Terme eines Bandes (einer Zeile) zu finden: *Ex definitione* ist es dasselbe, z. B. die Summe der 10 ersten Triangularzahlen oder die zehnte Pyramidalzahl anzugeben. Um dieselben zu finden, hat man den Ansatz $\frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. *Arnauld sagt, dafs er die Regel hierfür von einem sehr geschickten Manne habe (que je tiens d'un fort habile homme).* Damit ist wieder Pascal gemeint; denn Pascal hat dieselbe gefunden; sie wurde nach Pascals Tod im „*Triangle*

arithmétique“ Pascals im Jahre 1665 publiziert. Wir können hierfür auf M. Cantors *„Vorlesungen“* Bd. II S. 751 verweisen. Wir brauchen im folgenden die von M. Cantor angewendete Schreibweise.

Allgemein heifst die von Arnauld gegebene Regel für die Berechnung von $(r)_K$ (Kte Zelle der $r$ten Zeile):

$$(r)_K = \frac{K(K+1)(K+2)\cdots(K+r-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(r-1)},$$

während die Vorschrift im *Triangle arithmétique* lautet:

$$(r)_K = \frac{r(r+1)(r+2)\cdots(r+K-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(K-1)}.$$

Die Verschiedenheit der beiden Vorschriften ist erklärt durch das Gesetz $(r)_K = (K)_r$.

Als ersten Satz über Triangularzahlen giebt er in obiger Bezeichnungsweise:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2,$$

nach Arnaulds Regel ist:

$$(3)_K = \frac{K(K+1)}{1\cdot 2} \quad \text{und} \quad (3)_{K-1} = \frac{(K-1)K}{1\cdot 2},$$

folglich:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = \frac{K[(K+1)+(K-1)]}{1\cdot 2} = \frac{K\cdot 2K}{1\cdot 2},$$

also:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = K^2$$

in $(r)_K$ wird für $r = 3$ ja $(r-1)_K = (2)_K$, und hier wird speziell $(2)_K = K$, also:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2.$$

Die zweite Eigenschaft dieser Zahlreihen

$$(r)_K - (r)_{K-1} = (r-1)_K$$

wird *ex definitione* gefolgert.

$$(r)_K = \sum_1^K (r-1)_\nu \quad \text{und} \quad r_{K-1} = \sum_1^{K-1} (r-1)_\nu,$$

also:

$$(r)_K - (r)_{K-1} = (r-1)_K.$$

Eine dritte Eigenschaft besteht darin, fährt Arnauld fort, dafs in obiger Reihe der natürlichen Zahlen jede ungerade Quadratzahl — 1, die durch 8 teilbar ist, 8 sovielmal enthält, als die kleinere Hälfte der Wurzel jener Quadratzahl durch ihre Triangularzahl Einheiten angiebt; mit der vorher angewendeten Bezeichnung. $\frac{[(2)_K]^2 - 1}{8} = (3)_\lambda$, wenn K die Form hat $2\lambda + 1$ [da $(2)_K = K$ und $(2)_\lambda = \lambda$ ist].

Der erste Satz über die Triangularzahlen (so genannt bei Arnauld, sonst gewöhnlich Triagonalzahlen) wird benützt, um die Summe der m ersten Quadrate abzuleiten. Diese muſs die entsprechenden Triangularzahlen je zweimal enthalten, auſser der letzten, welche sie nur einmal enthält. So ergiebt sich aus der allgemeinen Regel für die Bildung der $m$ten Pyramidalzahl, welche die Summe der m ersten Triangularzahlen darstellt:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots m^2 = 2\,\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}.$$

Dies läſst sich schreiben:

$$\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}\left[\frac{2(m+2)}{3} - 1\right];$$

$\frac{2(m+2)}{3}$ ist aber gleich:

$$\frac{(2m+1)+3}{3} = \frac{2m+1}{3} + 1;$$

folglich der Ausdruck in der eckigen Klammer $\frac{2m+1}{3}$ und die Summe der m ersten Quadrate:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Um aus der Summe der ersten m natürlichen Zahlen die der ersten m Quadrate abzuleiten, hat man die erstere $\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ mit dem Faktor $\frac{2m+1}{3}$ zu multiplizieren. Auch die Ableitung der Summe der ersten m Cuben wird von Arnauld mit Hilfe seiner Tafel gelehrt.

Es ist:

$$(3)_K + (3)_{K-1} = [(2)_K]^2$$
$$(3)_K - (3)_{K-1} = [(2)_K],$$

also

$$[(3)_K + (3)_{K-1}]\,[(3)_K - (3)_{K-1}] = [(2)_K]^3$$

oder

$$[(3)_K]^2 - [(3)_{K-1}]^2 = [(2)_K]^3.$$

Mit Hilfe dieser Relation bestimmt Arnauld durch successive Substitution der Cuben die Summe der ersten m Cuben.

$$[(3)_m]^2 = [(2)_m]^3 + [(3)_{m-1}]^2$$
$$[(3)_{m-1}]^2 = [(2)_{m-1}]^3 + [(3)_{m-2}]^2$$
$$[(3)_{m-2}]^2 = [(2)_{m-2}]^3 + [(3)_{m-3}]^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(3)_2]^2 = [(2)_2]^3 + [(3)_1]^2$$
$$[(3)_1]^2 = [(2)_1]^3 + [(3)_0]^2,$$

oder, da allgemein $[(2)_K]^3 = K^3$ ist, aufsteigend:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots (m-1)^3 + m^3 = [(3)_m]^2 = \left[\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\right]^2$$

[in der gebräuchlicheren Form $\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$]; hieraus folgt:

$$1^2 + 2^3 + 3^3 + \cdots m^3 = [1+2+3\cdots m]\,[1+2+3\cdots m].$$

Arnauld giebt das spezielle Beispiel $m = 6$, die Triangularzahl von m schreibt er $\hat{m}$, also:

$$\hat{6}^2 = \left\{\begin{matrix}6^3\\ +\\ \hat{5}^2 =\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}5^3\\ +\\ \hat{4}^2 =\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}4^3\\ +\\ \hat{3}^2 =\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}3^3\\ +\\ \hat{2}^2 =\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}2^3\\ +\\ \hat{1}^2 =\end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix}1\\ +\\ 0\,.\end{matrix}\right.$$

Um die Triangularzahl einer beliebigen Zahl zu finden, giebt Arnauld folgende Regeln: 1) wenn die natürliche Zahl ungerade ist, multipliziere man sie mit ihrer gröſseren Hälfte; wenn sie also die Form hat $(2n+1)$, so ist:

$$\widehat{2n+1} = (2n+1)(n+1) = \frac{(2n+1)(2n+2)}{1\cdot 2}.$$

2) für eine gerade nehme man die Hälfte und multipliziere damit die ursprüngliche, zu der man 1 addiert hat, d. h.

$$\widehat{2n} = n(2n+1) = \frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2}$$

im Einklang mit der allgemeinen Regel.

Wir kehren zur ersten Ausgabe von 1667 zurück. Mit dem V. Buche beginnt die eigentliche Elementargeometrie; wie schon die ersten Worte anzeigen: „*Nous avons parlé jusque icy de la grandeur en général. Il faut maintenant descendre à ses especes*“. Jede Gröſse ist entweder *continüe* (stetig) wie Zeit, Bewegung, Raum, oder unstetig wie die Zahl. Letztere Auffassung ist insofern bei Arnauld konsequent, weil er unter den Zahlen nur rationale versteht, die ja kein Continuum bilden.

Das Kontinuierliche ist entweder ein aufeinander Folgendes (*successive*) oder ein nebeneinander Beharrendes (*permanente*), wie der Raum. Durch Abstraktion gelangt man zu Gebilden von weniger als drei Dimensionen. Man gelangt zu den *surfaces*, diese unterscheiden sich in *surfaces courbes* und *surfaces plates* = *plans* (Ebenen). Man gelangt weiter zu den *lignes courbes* und *lignes droites*. Der Punkt wird als Grenze der Geraden definiert; er ist unteilbar (*indivisible*). Ebenso ist die Linie Grenze der Fläche, und die Fläche Grenze des Körpers.

Der Begriff der Ebene und der Geraden erscheint Arnauld als durch natürliche Anschauung gewonnen so einfach, daſs man ihn nur verdunkeln würde, wollte man eine Definition geben; man braucht sich dafür nur auf

das normale Bewufstsein zu berufen. („*Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle même, et que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot.*") Man kann aber gewisse Eigenschaften, welche in jener Anschauung enthalten sind, erklärend anführen, z. B. Archimeds Axiom, dafs die Gerade die kürzeste Entfernung zweier Punkte sei. Als II. Axiom wird die Bestimmtheit einer und nur einer Geraden durch zwei Punkte angeführt. Als Axiom III bedinge die Einfachheit der geraden Linie ihre unendliche Verlängerbarkeit.

Im Axiom IV wird festgestellt, dafs zwei Gerade ganz zusammenfallen, wenn sie eine Strecke gemein haben.

Axiom V: Zwei Gerade schneiden sich in einem und nur einem Punkte.

Das VI. Axiom fällt seinem Inhalt nach mit der berüchtigten fünften Forderung Euklids zusammen: „*Deux lignes droites qui estant prolongées vers un même costé s'approchent peu à peu se couperont à la fin.*" Arnauld fügt hinzu: „*Euclide prend cette proposition pour un principe et avec raison: car elle a assez de clarté pour s'en contenter et ce seroit perdre de temps inutilement que de se rompre la tête pour la prouver par un long circuit.*" Die Nutzlosigkeit der Beweisversuche hat also Arnauld klar durchschaut, aber von der Geltung der Forderung ist er überzeugt.

Im zweiten Abschnitt dieses Buches wird die Entstehung der Kreislinie durch Drehung (Bewegung) einer Strecke um den einen festen Endpunkt definiert.

Daraus fliefst sofort die Eigenschaft eines Kreises von einer „*entiere uniformité*" (von einer vollständigen Gleichförmigkeit, d. h. von überall gleicher Krümmung zu sein), woraus viele Eigenschaften des Kreises ohne weiteres folgen, z. B. Bogen über gleich langen Sehnen desselben Kreises sind gleich.

Der dritte Abschnitt handelt von den Senkrechten. Wenn eine Gerade eine andere so schneidet, dafs sie gegen die eine Seite der zweiten (inbezug auf den Schnittpunkt) sich nicht mehr neigt als gegen deren andere Seite, so sollen die zwei Geraden senkrecht zu einander heifsen (*perpendiculaires l'une à l'autre*).

Man darf Neigung (*obliquité*) nicht mit Krümmung (*curvité*) verwechseln, erstere hängt von der Lage, letztere von der Natur der Linie ab.

Eine genauere Definition der Senkrechten, welche hier wiederholt wird, haben wir schon in Arnaulds *Logik* kennen gelernt. Nämlich: wo zwei Punkte einer Geraden von zwei festen Punkten einer zweiten Geraden je gleichen Abstand besitzen, haben alle Punkte der ersteren diese Eigenschaft. Er legt grofses Gewicht auf diese Definition, da sie einen wesentlichen Bestandteil bilde für die natürliche Ordnung der Sätze; denn ohne dieselbe

müſste man Winkel beiziehen, und diese werden als flächenhafte Gebilde erst viel später eingeführt.

Alle Geometer sind von der Evidenz dieses Satzes überzeugt. Die Bestimmtheit einer Geraden durch zwei ihrer Punkte ist für Arnauld auſser jedem Zweifel; wollte man zum Beweise jenes Satzes Dreiecke heranziehen, so würde man die Eigenschaften von Linien durch kompliziertere flächenhafte Gebilde zu beweisen suchen, was wieder ein grober Verstoſs gegen einen natürlichen Aufbau wäre: *„Soit donc de justice ou de grace, nous demandons qu'on nous accorde cette proposition, qui donne un moyen très facile de demonstrer les Problemes suivans sans se servir des triangles comme fait Euclide."*

Es folgen die Aufgaben:

1) Von einem Punkte auſserhalb auf eine Gerade ein Perpendikel zu fällen.
2) in einem Punkte einer Geraden eine Senkrechte auf derselben zu errichten,
3) eine gegebene Strecke zu hälften,

die alle mit Hilfe von Kreisbogen gelöst werden.

I. Theorem: Die Senkrechte ist die kürzeste von allen Geraden, die von einem Punkte nach einer Geraden hin gezogen werden können.

II. Theorem: Aus einem Punkte kann man nur *ein* Lot auf eine Gerade fällen und in einem Punkte einer Geraden nur *eine* Senkrechte auf ihr errichten.

Das I. Theorem wird durch Verlängerung der Senkrechten aus dem gegebenen Punkte um sich selbst nach der andern Seite der Geraden unter Zuhilfenahme einer beliebigen schiefen Transversalstrecke nach der gegebenen Geraden hin und Verbindung des Schnittpunktes mit dem andern Endpunkt der Senkrechten auf Grund des Archimedischen Prinzips bewiesen. Der Beweis des zweiten Satzes ist indirekt.

Die Senkrechte ist also das natürliche Maſs des Abstandes eines Punktes von einer Geraden. Aus dem zweiten Theorem wird die Folgerung gezogen, daſs zwei Gerade, welche auf derselben Geraden senkrecht sind, keinen Punkt gemein haben können, da es sonst einen Punkt geben würde, von dem sich zwei Senkrechte auf eine Gerade fällen lieſsen.

Zieht man von einem Punkte auſserhalb eine beliebige Schnittgerade (*oblique*) gegen eine andere Gerade, so fällt das aus jenem Punkte herabgelassene Lot auf die Seite der zweiten Geraden, gegen welche die schiefe Schnittgerade (*oblique* — inbezug auf deren Schnittpunkt) geneigt ist. Andernfalls wäre die Senkrechte und das Lot nicht mehr identisch, sondern dieses *a fortiori oblique.*

III. Theorem: Die unbegrenzte Senkrechte, welche den Abstand zweier Punkte halbiert, ist der Ort aller Punkte der Ebene, welche von jenen beiden Punkten gleiche Abstände besitzen.

Der vierte Abschnitt ist überschrieben: *„Des lignes droittes obliques“*.

Unter *oblique* versteht Arnauld jede Gerade, welche eine andere schneidet, außer der senkrechten.

Um ohne Hilfe von Winkeln die Länge einer *oblique* zu beurteilen, d. h. die Strecke zwischen dem Punkte, den sie mit der Senkrechten gemein hat, und ihrem Schnittpunkt mit der Geraden, gegen welche sie *„oblique“* ist, nennt Arnauld 1) jene Länge *„oblique“* schlechthin (d. h. die Hypotenuse unseres entstehenden rechtwinkligen Dreiecks);

2) die Kathete, welche mit der geschnittenen Geraden zusammenfällt: *„éloignement du perpendicule“*; die andere Kathete heißt *„perpendiculaire“*.

Nun heißt sein Satz (in moderner Aussprache): Die *„obliques“* eines Büschels, welcher eine gegebene Gerade aus einem Punkte projiziert, sind um so länger, je größer das *„éloignement du perpendicule“* ist.

Auch dieser Satz wird mit Hilfe eines gebrochenen Linienzugs nach dem Archimedischen Axiom bewiesen, indem die Senkrechte um sich selbst verlängert wird.

Sieht man aber die geschnittene (projizierte Gerade) als Senkrechte an (d. h. dreht man die Figur um 90^0), so ergiebt sich, daß unter den *obliques,* die durch einen Punkt einer Geraden hindurchgehen, diejenige die längste ist, welche die größte *„perpendiculaire“* besitzt.

Die Kongruenzsätze am rechtwinkligen Dreieck:

Die Gleichheit 1) der Hypotenusen und einer Kathete;

2) der beiden Katheten

bedingen die Gleichheit der dritten Seite, werden so ausgesprochen: *„Des trois lignes que nous avons dit se devoir considerer dans les lignes obliques: la perpendiculaire, l'éloignement du perpendicule, et l'oblique même, deux ne peuvent estre égales que la troisiême ne le soit aussy.“* Die Beweise werden aber nicht durch *„zur Deckung bringen“* geführt. Arnauld nennt dies *„une preuve grossiere et materielle“*.

Als Corollar: Es ist unmöglich, daß ein Punkt von drei Punkten einer Geraden gleichen Abstand besitze.

Es werden weiter die Fälle untersucht, wenn nur Gleichheit in einem Bestimmungsstücke herrscht.

Als letztes Theorem dieses Buches erscheint mit den Bezeichnungen *obliques* u. s. w. der Satz, daß in kongruenten schiefwinkligen Dreiecken die Höhen gleich sind.

Es ist Arnauld also gelungen, mit Hilfe der Axiome und gewählten

Bezeichnungen diese Sätze ohne Hilfe von Winkeln und Dreiecken, die bei ihm immer als begrenztes Stück einer Ebene gelten, wie wir vorgreifend bemerken (*„On appelle figure dans ces elémens de Géométrie une surface platte terminée de tous costez“* Anfang von Buch XII) abzuleiten, auszusprechen und zu beweisen.

Buch VI ist den Parallelen gewidmet: *Des lignes paralleles.* Die Parallelen können auf zwei Arten definiert werden. 1) negativ: Es sind Gerade (dafs sie in einer Ebene liegen, wurde schon im V. Buche vorausgesetzt: *„Lors que l'on compare plusieurs lignes ensemble, on les suppose toujours dans ces elémens comme estant posées, ou décrites sur un même plan c'est à dire sur une même superficie plate“,* und dadurch Arnaulds *Nouveaux Elémens* als Planimetrie gekennzeichnet), die bis ins Unendliche verlängert sich nie schneiden; 2) positiv: Parallel heifsen Gerade, die überall denselben Abstand besitzen. Die erste Definition, die negative, nennt Arnauld eine notwendige Folge der positiven. Dafs die positive Definition die unendliche Verlängerbarkeit involviert, wird von Arnauld ausdrücklich hervorgehoben.

Die drei Fundamentalsätze über Parallelen lauten:

1) Wenn zwei Gerade durch eine dritte geschnitten werden, welche auf beiden zugleich senkrecht ist, so sind alle Punkte der geschnittenen einen gleichweit von der andern entfernt und umgekehrt.

2) Wenn zwei Punkte einer Geraden gleichen Abstand besitzen von einer anderen Geraden, so sind alle Punkte einer jeden gleichweit entfernt von der andern Geraden.

3) Zwei Strecken, welche zwischen zwei Geraden liegen, können unter der Bedingung, dafs sie sich nicht kreuzen, nur dann gleich und je eine auf je einer der begrenzenden Geraden senkrecht sein, wenn alle beide auf beiden einschliefsenden (begrenzenden) Geraden senkrecht sind.

Corollare: 1) Die Umkehrung der positiven Definition (alle Lote zwischen Parallelen sind gleichlang). 2) Transversalen beliebiger Steigung (*les obliques entre paralleles*) sind länger als das Lot. Zum Beweise dieser Sätze schickt Arnauld acht Lemmen voran:

1) Wenn die Geraden x und z von einer andern geschnitten werden, welche zu x senkrecht, zu z aber schief ist, so sind alle andern auf x Senkrechten ebenfalls schief zu z und umgekehrt.

2) Die beiden Geraden mögen wieder von einer zu x Senkrechten, zu z Schiefen geschnitten werden, so sind alle andern ähnlichen Transversalen ($\perp$ zu x und schief zu z) ungleichlang.

3) Jede zu x Senkrechte (zu z Schiefe) und jede zu z Senkrechte (zu x Schiefe) sind, wenn sie innerhalb x und z keinen Punkt gemein haben,

wechselseitig verglichen ungleich lang (nämlich die Strecken innerhalb x und z, und diese versteht Arnauld immer unter den Transversalen).

4) Faſst die beiden vorhergehenden Hilfssätze in einen zusammen: Zwei zwischen zwei Geraden liegende Strecken, von denen je eine auf einer beliebigen jener beiden Geraden senkrecht ist und die sich nicht kreuzen, können nur dann gleich sein, wenn beide auf beiden Geraden zugleich senkrecht sind.

5) Wenn eine Transversalstrecke senkrecht ist zu beiden Geraden, so ist jedes Lot, das von einem Punkte der einen Geraden auf die andere gefällt wird, gleich jener ersteren Senkrechten, und folglich sind die Lote unter einander gleich.

Der Beweis wird indirekt mit Hilfe des Satzes, daſs aus einem Punkte nur eine Senkrechte gefällt werden kann, geführt.

6) Wenn eine Gerade senkrecht ist zu zwei andern, so sind alle Geraden, welche zu der einen senkrecht sind, zu beiden senkrecht, denn gäbe es auch nur eine, welche senkrecht wäre zur einen und schief zur andern Geraden, so müſsten nach dem 1. Lemma auch alle andern zur einen senkrecht, schief zur andern sein, was der Voraussetzung widerspricht.

7) Die Punkte einer Geraden sind von einer zweiten entweder alle gleich weit entfernt oder alle ungleich weit.

8) Die Punkte zweier sich schneidender Geraden sind — alle der einen — ungleich weit entfernt von der andern, und die kürzesten Abstände sind die in der Nähe des Schnittpunkts.

An die genannten Hauptsätze schlieſst sich die Aufgabe: Durch einen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu konstruieren; sie wird von Arnauld auf drei Arten in Angriff genommen. Zuletzt mit Hilfe der inneren Wechselwinkel an einer beliebigen von dem Punkt ausgehenden Transversalen. Die Aussprache ist aber eine andere, da Arnauld den Winkel ja überhaupt noch nicht eingeführt hat. Er begründet seine Lösung durch den früher abgeleiteten, im Anschluſs an Euklid hier ausgesprochenen Satz, daſs in kongruenten Dreiecken die Höhen gleich sind. Den Schluſs des VI. Buches bilden dreizehn weitere Sätze über Parallelen. Z. B. durch einen Punkt kann zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele gelegt werden; gleich geneigte Transversalstrecken zwischen Parallelen sind einander gleich und die am stärksten geneigten sind die längsten. Gleich geneigte nach derselben Seite (der Ebene) sind selbst parallel.

Die Abschnitte gleich geneigter Transversalstrecken auf den Parallelen sind gleich. Ungleich geneigte Transversalstrecken zwischen Parallelen können nicht gleich lang sein.

Hier wird das Parallelogramm eingeführt durch den Satz: *„Quatre*

lignes ne se joignant qu'aux extrémitez, si les opposées sont égales elles sont paralleles."

Der elfte Satz lautet: Wenn eine Gerade zwei andere schief schneidet und gegen beide nach derselben Seite (der Ebene) geneigt ist, so sind alle zur Schnittgeraden parallelen Transversalstrecken zwischen jenen beiden Geraden ungleich lang.

1. Corollar: Zwei derart geschnittene Gerade können nie parallel sein.

2. Da sie sich nach der Seite, nach welcher die dritte schneidende Gerade geneigt ist, annähern, so werden sie sich, unbegrenzt verlängert, endlich einmal schneiden (V, 11).

Der Gedankengang zum nächsten VII. Buch knüpft an die Begrenzung der Transversalen durch die Parallelen an, das VII. Buch führt also die Bezeichnung: *Des lignes terminées à une circonference.*

Es sind: 1) Sehnen,
2) Sekanten (*secantes interieurs et exterieurs*),
3) Tangenten.

Dazu kommt ein vierter Abschnitt vom Parallelismus von Kreislinien. Arnauld versteht darunter konzentrische Kreise.

I. Von den Sehnen.

1. Satz: Eine Gerade, die eine Sehne schneidet, kann drei Lagen haben, die sich auszeichnen:

1) senkrecht sein zur Sehne,
2) die Sehne hälften,
3) durch den Kreismittelpunkt gehen.

Zwei dieser Eigenschaften bedingen die dritte.

Wenn z. B. die beiden ersten Eigenschaften erfüllt sind, enthält die Mittelsenkrechte alle Punkte, welche von den Endpunkten der Sehne gleichen Abstand besitzen, das Centrum des Kreises ist aber ein solcher Punkt.

1. Corollar: Ein Kreis ist durch drei Punkte oder durch einen Punkt und das Centrum vollständig bestimmt (natürlich dürfen jene drei Punkte nicht in einer Geraden liegen).

2. Corollar: Haben zwei Kreise drei Punkte gemein, so fallen sie ganz zusammen; denn sie haben dann das Centrum und einen Radius gemein.

3. Corollar: Drei Kreise können sich nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.

2. Satz: Eine Mittelsenkrechte einer Sehne hälftet auch die beiden Bogen, welche die Sehne stützt; denn sie enthält alle Punkte, welche von den Endpunkten der Sehne gleiche Abstände besitzen; da diese Abstände aber wieder Sehnen sind für die beiden Durchschnittspunkte der Mittelsenkrechten mit dem Kreis, und gleiche Sehnen gleiche Bogen stützen im

gleichen Kreise, so sind die von der ursprünglichen Sehne gestützten beiden Bogen beide durch die Mittelsenkrechte jener Sehne gehälftet.

Das dritte Theorem giebt die Umkehrung des zweiten.

4. Theorem: Gleich weit vom Centrum abstehende Sehnen in gleichen Kreisen sind gleich und umgekehrt.

An sich ist das klar für Durchmesser, da sie alle dem Centrum gleich nahe sind, d. h. durch dasselbe gehen.

Auch ist ein Durchmesser gröſser als eine andere Sehne, wie aus dem Archimedischen Prinzip folgt, wenn man die Endpunkte der Nichtdurchmessersehne mit dem Centrum verbindet.

5. Theorem: In gleichen Kreisen stützt die gröſsere Sehne den gröſseren Bogen; denn trägt man die kleinere Sehne in den Kreis parallel zur gröſseren ein, so können die beiden sich nie schneiden, also liegt der kleinere Bogen ganz im gröſseren.

Es folgt die Definition des Sinus, für Bogen $< \frac{\pi}{2}$, sowie des Sinus versus an der Figur. Eine zweite Definition ist: Der Sinus ist die Hälfte des Sehne des doppelten Bogens.

6. Theorem: Bogen gleichen Sinus sind gleich.

7. Die Gleichheit zweier Sinus bedingt die Gleichheit ihrer Sinus versus. Die gröſseren Sinus geben die gröſseren Sinus versus.

Die Definition des Sinus wird in einem Avertissement auf Bogen $\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}$ ausgedehnt. Denn das Complement (heute Supplement) eines solchen Bogens wird dann durch den Sinus gemessen. Der Bogen aber ist der gröſsere, welcher das kleinere Complement hat.

8. Theorem: Hat man ein System konzentrischer Kreise und zieht vom Centrum aus unbegrenzte Radien, so stehen die zwischen zweien liegenden Bogen aller Kreise, ein jeder zur ganzen Peripherie, der er angehört, im gleichen Verhältnis. Zwei derartige Bogen heiſsen *„proportionellement égaux“* oder schlechthin *„égaux“*, während gleiche Bogen gleicher Gröſse *„tout-égaux“* genannt werden. Anschlieſsend wird die Sexagesimalteilung des Kreises gelehrt.

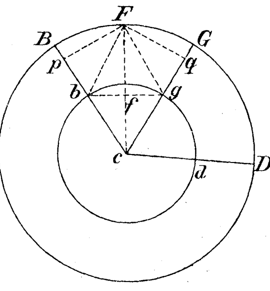


Fig. 3.

Beweis: Die aliquoten Teile von BD seien x genannt; zieht man nach den Teilpunkten Radien, so wird, behaupte ich, auch bd in *„aliquotes pareilles“* durch diese Radien geteilt. Es genügt, zwei x zu betrachten, BF und FG. Zieht man cF und cG, so muſs also $bf = fg$ sein. Denn fällt man von F ein Lot auf Bc und ebenso auf Gc, so sind die Lote Fp und

Fq Sinus gleicher Bogen, also gleich, und die Sinus versus Bp und Gq sind es ebenfalls, also auch $pb = qg$. Folglich auch $Fb = Fg$ als *„obliques"*, deren *„perpendiculaires"* und *„eloignemens du perpendicule"* gleich sind. Also giebt es auf Fc zwei Punkte F und c, die gleichen Abstand von den Endpunkten der Sehne bg besitzen, also ist Fc Mittelsenkrechte von Sehne bg und hälftet den Bogen $\widehat{bg}$, den die Sehne bg stützt. Dasselbe kann man natürlich jetzt für alle *aliquotes* von BD und bd beweisen, indem man ein nächstes x hinzunimmt; es also mit einem der beiden, für die der Beweis schon geführt wurde, kombiniert. Wenn also X das Maſs bedeutet, mit dem man die gröſsere Kreisperipherie miſst, und dieses mit oder ohne Rest so und so oft in der gröſseren Kreisperipherie aufgeht, so ergiebt sich, nachdem die Radien nach den Teilpunkten gezogen sind, ein x als *„aliquote pareille"* der kleineren Kreisperipherie, und nach der Definition der proportionalen Gröſsen ist

$$\frac{BD}{bd} = \frac{\text{gröſserer Kreisumfang}}{\text{kleineren Kreisumfang}}.$$

9. Theorem: Wenn die Kreise, deren Bogen proportional gleich sind, verschieden groſs sind, so stützt sich im gröſseren Kreis der Bogen auf die gröſsere Sehne.

Das zehnte und letzte Theorem lautet im ersten Abschnitt des VII. Buches:

Die Sehnen in demselben Kreise wachsen durchaus nicht proportional den Bogen, sondern die gröſsten Bogens (immer $< \pi$ gedacht) haben verhältnismäſsig kleinere Sehnen als die kleinsten Bogen.

Der Beweis ist sehr leicht. Halbiert man einen Bogen, so ist die Summe der Sehnen der halben Bogen gröſser als die Sehne des ganzen Bogens (nach dem Axiom Archimeds). Also ist die Hälfte der Sehne des ganzen Bogens kleiner als die Sehne des halben Bogens.

Auf den nun folgenden Zusatz glauben wir besonders aufmerksam machen zu müssen, weil er den Satz enthält, den man heute zu schreiben pflegt: Die Differenz eines unendlich kleinen Bogens und seiner Sehne ist unendlich klein dritter Ordnung (allgemein).

Sein Wortlaut ist bei Arnauld:

De là il s'ensuit que plus les arcs sont grands, plus la difference est grande entre la longeur de l'arc et celle de la corde, et qu'au contraire plus les arcs sont petits plus cette difference diminue. De sorte qu'on peut prendre un si petit arc que cette difference sera plus petite que quelque ligne qu'on ait donnée (kleiner als jede, noch so kleine, be-

liebig vorgegebene Strecke). *Ein für diese frühe Zeit äufserst schöner und präziser Ausdruck für den Grenzübergang!* [1])

Der zweite Abschnitt von Buch VII behandelt die Sekanten. Die Sekante eines Büschels k, die durch das Centrum c geht — Arnauld nennt sie immer kg —, ist die längste, wie mit Hilfe des Archimedischen Prinzips gezeigt wird, nachdem der betreffende Hilfsradius gezogen wurde. Die kürzeste ist kf, d. h. der äufsere Abschnitt jener längsten; dafs Arnauld diesen Abschnitt als besondere Sekante des Büschels rechnet, kommt daher, dafs er den Mittelpunkt des Büschels auch innerhalb des Kreises liegend zuläfst (*secantes interieures*).

3. Satz: Werden von k aus Sekanten nach Punkten hin gezogen, welche von f oder g gleich weit entfernt sind, so sind diese Sekanten gleich lang.

4. Satz: Ein Kreis mit dem Mittelpunkt k und dem Radius kf, sowie ein Kreis mit dem Radius kg und dem Mittelpunkt k berühren den ursprünglichen Kreis (Centrum c, Radius cg) in einem Punkte, ohne ihn zu schneiden.

7. Theorem: Ein Kreis (k, Radius kx, wobei $kf < kx < kg$) schneidet den Kreis (c, Radius cg), innerhalb dessen k liegt, in zwei von f und g gleich weit abstehenden Punkten X, x, der Bogen Xx des ursprünglichen Kreises, dessen Mitte g ist, liegt aufserhalb des Kreises (k, Radius kx).

Dieser Abschnitt schliefst mit dem Corollar: Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dafs man von einem Punkte k drei gleich lange innere Sekanten ziehen kann, ist, dafs k mit dem Centrum c des Kreises zusammenfällt.

Der dritte Abschnitt von VII beschäftigt sich mit den Tangenten.

Jede Senkrechte im Endpunkt eines Radius ist Kreistangente. Dieser Endpunkt ist Berührungspunkt (*point de l'attouchement*).

2. Satz: Zwischen der Peripherie und Tangente kann man keine Gerade durchlegen; dagegen eine unendliche Anzahl von Kreisen, welche nur den Berührungspunkt gemein haben. Heifsen die Punkte des Berührungsradius cf alle x, so ist jeder Kreis vom Centrum x und Radius xf zu jenen gehörig. An dieser Stelle ist für uns bemerkenswert die Bezeichnungsweise der Punkte einer Geraden durch denselben Buchstaben, welche sich auch bei Pascal findet.

Daran schliefsen sich die Aufgaben: In einem gegebenen Peripherie-

---

1) Eine ähnlich scharfe (noch frühere) Definition der Grenze findet sich nach der Bemerkung von I. Timschenko in der *Bibl. Mathem.* 1900 S. 511 bei Gregorius v. St. Vicentius (1647).

punkte die Tangente zu konstruieren und von einem Punkte aufserhalb Tangenten an den Kreis zu legen. Arnauld legt für die Lösung der letzteren einen zum gegebenen konzentrischen Kreis durch den gegebenen Punkt k, legt ferner im Durchschnittspunkt f von kc und dem gegebenen Kreis c die Tangente mn an den gegebenen. Dann trägt er den Bogen des Hilfskreises $\widehat{mn}$ über dieser Tangente mn von k aus nach beiden Seiten ab auf dem Hilfskreise und behauptet, kb und kd seien die verlangten Tangenten.

Er begründet sein Verfahren so: Da Bogen $\widehat{mn} = \widehat{bk} = \widehat{kd}$, so ist auch Sehne $mn = kd = kb$. Also sind die beiden Sehnen kb und kd um den Radius cf von c entfernt. Zugleich ist aber dieser Radius $\perp$ zu ihnen (d. h. seine Länge), da er sonst nicht ihren Abstand von c messen würde. Also sind kb und kd Tangenten des gegebenen Kreises. Sie berühren ihn in den Schnittpunkten mit den Radien cm und cn des Hilfskreises. Denn da k den Bogen mn hälftet, so hälftet auch m den Bogen kb und n den Bogen kd, also Radius $mc \perp$ zu kb und zwar mittelsenkrecht, wenn also h der Durchschnittspunkt von kb und mc ist, so mufs h auch der Fufspunkt des Radius ch des ursprünglichen Kreises sein, denn aus c läfst sich nur eine Senkrechte auf kb fällen.

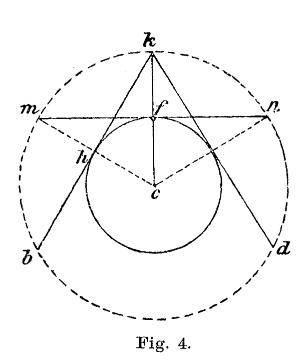


Fig. 4.

Aus dieser Konstruktion folgt, dafs man zwei und nur zwei Tangenten von k aus an den Kreis legen kann; zugleich sind die Abschnitte bis zum Berührungspunkt als Hälften gleicher Sehnen gleichlang.

Der letzte Abschnitt dieses Buches ist betitelt: *Des circonferences paralleles.*

Der Abstand eines Punktes von einem Kreise wird durch die kürzeste Linie gemessen, die von ihm aus nach dem Kreise gezogen werden kann. Ihre Verlängerung geht stets durch den Kreismittelpunkt.

Ferner ist eine Gerade senkrecht zu einem Kreise, wenn sie auf der Tangente des Schnittpunktes mit dem Kreise $\perp$ ist.

I. Theorem: Zwei konzentrische Kreise sind parallel. Sind zwei Kreise nicht konzentrisch, so ist nur die Gerade, welche beider Centren verbindet, senkrecht zu jedem der beiden Kreise.

Auf dieser Geraden liegt der gröfste und der kleinste Abstand der beiden Kreise.

Wenn zwei Punkte des einen Kreises gleich weit abstehen von einem Endpunkte seines Durchmessers, der durch das Centrum des andern geht,

so sind sie (jene Punkte) auch gleich weit entfernt von der Peripherie des letzteren Kreises.

Daraus ergeben sich drei bemerkenswerte Unterschiede des Parallelismus von Kreisen und Geraden.

1) Das negative Merkmal, bei Geraden sich niemals zu schneiden, ist für den Parallelismus von Kreisen nicht ausreichend.

2) Zwei Gerade sind parallel, wenn sie eine gemeinsame Senkrechte besitzen, dagegen giebt es zwischen den beiden Kreisen zwei Strecken, welche zu beiden senkrecht sind, ohne den Parallelismus der Kreise herbeizuführen; dieser ist erst bedingt durch drei solcher senkrechten zwischenliegenden Strecken.

3) Während zwei sich nicht kreuzende Gerade parallel sind, wenn zwei Punkte der einen gleichen Abstand besitzen von der andern, bedarf es hierzu bei zwei Kreisen dreier solcher Punkte, während unendlich viele Punkte paarweise gleichen Abstand vom andern Kreise zeigen können.

Wir gehen zum VIII. Buche über: *Des Angles Rectilignes.*

Wir haben Arnaulds Definition des Winkels oder besser seines Winkelraumes schon in der Euklidkritik seiner Logik kennen gelernt. Der Winkel ist ihm wesentlich eine flächenhafte Gröſse (*tenant quelque chose de surface*). Die Winkelschenkel heiſsen *„costez“*. Die Verbindungslinie derselben in zwei Punkten heiſst *„la base“* oder *„la sontenante de l'angle“*. Heiſst die Basis speziell *corde,* so versteht man darunter eine Basis, die gleiche Winkelschenkel abgrenzt. Ist die Basis $\perp$ auf dem einen Winkelschenkel, so ist sie Sinus des Winkels.

Der Bogen, der den Winkel miſst, führt die Bezeichnung *„l'arc que comprend l'angle“*. Der Fundamentalsatz über das Maſs des Winkels lautet: Alle Bogen zwischen den Schenkeln, deren Centrum mit dem Scheitel (*sommet*) zusammenfällt, bestimmen dieselbe Winkelgröſse (da sie proportional sind, d. h. zu den zugehörigen Peripherien sich gleich verhalten).

Der rechte Winkel wird stets durch die Hälfte des Halbkreises gemessen, also ist sein Complement ihm gleich.

Jede Senkrechte erzeugt zwei rechte Winkel, denn sie hälftet den Halbkreis, dessen Mittelpunkt ihr Fuſspunkt ist.

Es folgt die Definition des spitzen und stumpfen Winkels. Dieselben werden durch die *„obliques“* gebildet, jetzt gleichsam an ihnen entdeckt.

Scheitelwinkel (*opposés au sommet*) sind einander gleich.

Da man hier die Länge krummer Linien nicht kennt, muſs man oft zu andern Winkelmaſsen greifen, aber immer mit Bezug auf den Bogen, welcher das einzige natürliche Winkelmaſs ist.

I. Die Sehne; ein durch sie begrenzter Winkel heifst *isoscele* (heute der der Basis gegenüberliegende im gleichschenkligen Dreieck).

Zwei von den Gleichheiten:

1) Gleichheit der Schenkel (*equilateres entr'eux*)

2) Gleichheit der Sehnen (*isocordes*)

3) Gleichheit der Winkel selbst

bedingen die dritte.

Ist nur 1) erfüllt, so liegt der gröfseren Sehne der gröfsere Winkel gegenüber u. s. w.

II. Der Sinus als Winkelmafs. Wir begegnen hier den Bezeichnungen *„Sinus eines Bogens"* und *„Antisinus"* (ist die Differenz zwischen Radius und Sinus versus), d. h. der heutige Cosinus im Einheitskreis.

Gleichheit des Winkelradius (d. h. der Hypotenuse) und des Sinus bedingen die des Antisinus; überhaupt zwei der Gleichheiten:

1) *L'égalité des rayons,*

2) *L'égalité des sinus,*

3) *L'égalité des angles mêmes*

bedingen die dritte.

Ein weiterer Abschnitt handelt von den Winkeln zwischen Parallelen.

Hier wird der Sinus mit dem Lot identifiziert zwischen den Parallelen.

Hier tritt zum ersten Male der Ausdruck Parallelraum auf (*espace parallele*) für zwei Parallelen und den zwischen ihnen liegenden Streifen der Ebene.

Der Satz von der Gleichheit der inneren Wechselwinkel lautet: *Toute oblique entre deux paralleles fait les angles alternes sur ces paralleles égaux;* denn die Winkel besitzen gleichen Radius (die Transversalstrecke) und gleichen Sinus.

Hier tritt als neunter Corollar der Satz von der Winkelsumme im Dreieck auf in der Form: — *Tout angle plus les deux angles que font ses costez sur la base sont égaux à deux droits;* denn zieht man durch die Spitze eine Parallele zur Basis, so hat man nach dem Satze von den innern Wechselwinkeln die drei Dreieckswinkel an dieser Parallelen nebeneinander. Die Summe dieser Winkel aber ist zwei Rechten gleich.

Der zehnte Corollar bringt anschliefsend den Satz vom Aufsenwinkel.

Elfter Corollar: Zwei Winkel sind gleich, wenn die Winkel an der Basis des einen bezw. denen an der Basis des andern gleich sind.

III. Als drittes Winkelmafs aufser dem Bogen erscheint die Basis ohne spezielle Bedingung. Ihre Anwendung ist noch enger begrenzt als die der Sehne und des Sinus. Sie vermittelt die Gleichheit zweier Winkel nur, wenn je ein Schenkel des einen je einem des andern Winkels gleich ist.

Interessant ist das Avertissement, welches den Schlufs von Buch VIII bildet. Die zuletzt aufgeführten Winkelmafse zeigen wohl an, wenn zwei Winkel gleich sind, auch welches der gröfsere oder kleinere ist, aber das wahre Verhältnis der Gröfse der beiden Winkel stellt ihr Quotient nicht dar; dieses ergiebt nur das Bogenmafs; darauf ist die Unlösbarkeit der Trisektion des Winkels zurückzuführen. Lassen wir Arnauld selbst sprechen: *Et c'est d'où vient la difficulté de la trisection de l'angle parce qu'il ne suffit pas pour cela de couper la corde en trois: ce qui seroit facile, mais il faut couper l'arc en trois; ce qui ne se peut par la géométrie ordinaire, c'est à dire en n'y employant que des lignes droites et circulaires.*

Das folgende IX. Buch führt den Titel: *Des Angles qui ont leur sommet hors le centre du cercle, dont les arcs ne laissent pas de les mesurer.*

In der Einleitung dazu sagt unser Autor: Wenn man bisher zwei Winkel vergleichen wollte, wobei der Scheitel des einen nicht mit dem Centrum des Mafskreises zusammenfiel, mufste man lange Schlufsreihen mit Hilfe von Dreiecken anwenden und deren Vergleichung, wodurch die Vorstellungskraft durch die Masse von in Betracht kommenden Strecken aufserordentlich ermüdet würde; ein Nachteil, den man für das Studium der Geometrie möglichst zu vermeiden suchen müsse.

Das IX. Buch nun solle lehren, wie man mit wunderbarer Leichtigkeit jeden Winkel durch den Bogen eines beliebigen Kreises messen könne, sei es, dafs sein Scheitel

1) auf der Peripherie,

2) innerhalb des Kreises, doch nicht im Centrum,

3) aufserhalb des Kreises liege, wenn seine Schenkel den Kreis schnitten oder berührten.

Voraus werden einige Erklärungen und Hilfssätze geschickt.

Der und der Bogen mifst unter diesen Bedingungen den Winkel, heifst, er würde ihn messen, wenn der Winkel im Centrum des Mafskreises mit seinem Scheitel liegen würde.

III. Lemma: Wenn

$$A = a + b + c + d$$

ist, so ist

$$\frac{A}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{d}{2},$$

und wenn

$$A = b + c,$$

so ist

$$\frac{A}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{b}{2} - \frac{c}{2}.$$

Diese Beziehungen werden für die folgenden Theoreme von Arnauld mit sehr grofser Gewandtheit gehandhabt.

Im vierten Lemma werden die Sätze über die Winkelsumme im Dreieck und den Aufsenwinkel nochmals in Erinnerung gebracht.

Zunächst werden die Peripheriewinkel eingeteilt in vier Arten. Sie sind:

1) Der Sehnen-Tangentenwinkel,

2) ein Peripheriewinkel, dessen einer Schenkel Sehne, dessen anderer Verlängerung einer Sehne über den Kreis hinaus ist,

3) der eigentliche, durch zwei Sehnen gebildete Peripheriewinkel,

4) ein Peripheriewinkel, dessen beide Schenkel Verlängerungen von Sehnen sind.

Arnauld will sie in drei sehr einfachen Sätzen erledigen, wovon die beiden letzteren eigentlich nur Corollare des ersten, alle aber so fruchtbar seien, dafs daraus viele wichtige Sätze, besonders auch über Proportionen von Strecken als einfache Corollare sich ergäben, welche die frühere Elementargeometrie nur auf höchst mühsamen Umwegen habe beweisen können.

Die Winkel zweiter Art habe überhaupt vor ihm noch niemand betrachtet.

Der Sehnen-Tangentenwinkel heifst *angle du segment, angulus segmenti.*

Der eigentliche Peripheriewinkel *angle dans le segment, angulus in segmento.*

Die beiden Abschnitte, die durch eine Sehne am Kreis erzeugt werden, *petit segment* und *grand segment.*

Ein in ein Segment eingeschriebener Winkel (*„angulus in segmento“* dieses Segments) stützt sich (*est appuyé*) auf den Bogen des gegenüberliegenden Segments.

I. Theorem. Der *angulus segmenti* wird gemessen durch die Hälfte des Bogens seines Segments (d. h. desjenigen, gegen welches hin der Tangentenschenkel gerichtet ist).

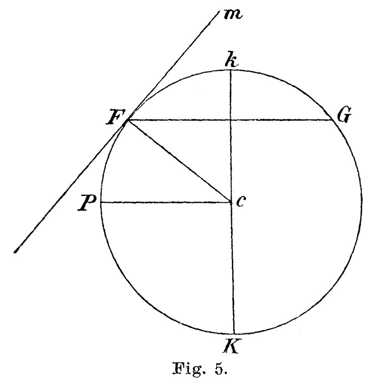


Fig. 5.

Beweis. Der *angulus segmenti* sei mFG und $kK \perp FG$; ferner $Pc \perp kK$ und deshalb $Pc \nparallel FG$. Der Durchmesser kK hälftet die Bogen der beiden Segmente FG und GF; Winkel Fck wird gemessen durch Bogen $\widehat{kF}$, Winkel FcK durch Bogen $\widehat{FK}$.

Wenn also $\sphericalangle mFG = \sphericalangle Fck$, so ist der Satz richtig.

Zunächst ist $\sphericalangle PcF = \sphericalangle cFG$ als innere Wechselwinkel (*alternes*) zwischen Parallelen. Ferner Winkel $mFc = \mathrm{R}$; ebenso $\sphericalangle kcP$. Zieht man auf beiden Seiten die gleichen inneren Wechselwinkel ab, so folgt

$$\sphericalangle mFG = \sphericalangle Fck; \quad \text{q. e. d.}$$

Ebenso führt man den Beweis für den *angulus segmenti* des gegenüberliegenden Segments, nur addiert man dort die inneren Wechselwinkel.

1. Corollar: Der *angulus semicirculi* ist ein Rechter.

2. Corollar: Wenn zwei Kreise, die ineinanderliegen, sich berühren, so stützt jede Sehne, die vom Berührungspunkt nach der Peripherie des gröſseren Kreises hingezogen wird, in beiden Kreisen proportional gleiche Bogen; denn diese messen beide denselben Winkel.

II. Theorem. Die Winkel zweiter Art werden gemessen durch die Summe der Hälften der Bogen, welche der eine Schenkel und die Sehnenverlängerung des andern Schenkels stützen.

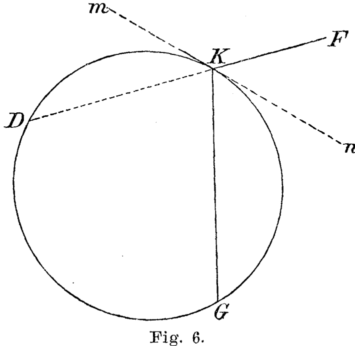


Fig. 6.

Beweis. Man zieht in K die Kreistangente mn. Dann zerfällt der betrachtete Winkel FKG in die beiden Winkel FKn und nKG. Setzt man an Stelle von FKn seinen Scheitelwinkel mKD, so hat man den gegebenen Winkel FKG in zwei *anguli segmenti* zerlegt. Diese werden gemessen: $\sphericalangle mKD$ durch $\frac{1}{2}\widehat{KD}$ und $\sphericalangle nKG$ durch $\frac{1}{2}GK$, also der gegebene $\sphericalangle FKG$ durch $\frac{1}{2}[\widehat{GK} + \widehat{KD}]$; q. e. d.

Als Corollar folgt der Satz von der Gleichheit von Peripheriewinkeln über demselben Bogen. Er wird mit Hilfe des vorhergehenden Hauptsatzes für ihre Nebenwinkel bewiesen.

III. Theorem: *Tout angle dans un segment a pour mesure la moitié de l'arc du segment opposé* (der Peripheriewinkel ist gleich der Hälfte des zugehörigen Centriwinkels).

Beweis. Man zieht wieder die Tangente im Scheitel. Die Winkel über derselben sind in Summa $= 2R$; die beiden *anguli segmenti* rechts und links werden durch die Summe der Hälften der Bogen über den Schenkeln des *angulus in segmento* gemessen. Das Maſs aller drei Winkel ist der Halbkreis, also bleibt für den dritten Winkel nach Lemma III die Hälfte des noch übrigen Bogens d. h. desjenigen, über dem er steht.

Durch Verlängerung des einen Schenkels des *angulus in segmento* könnte man den Beweis auch nach dem zweiten Hauptsatze führen.

Der dritte Hauptsatz wird in siebzehn Corollaren näher ausgeführt; wir heben folgende hervor:

5. Corollar: Berühren sich zwei Kreise innerhalb, und zieht man vom Berührungspunkt aus im gröſseren zwei Sehnen, so sind die zwischen beiden liegenden Bogen beider Kreise proportional gleich; denn ihre Hälften messen denselben Winkel. Dasselbe findet statt, wenn das Centrum des

zweiten Kreises auf der Peripherie des ersten liegt, doch gilt die Beziehung dann zwischen dem Bogen des zweiten und der Hälfte des Bogens des ersteren.

8. Corollar: Alle *anguli in segmento* eines Segments sind gleich dem *angulus segmenti* des gegenüberliegenden.

9. Corollar: Der Winkel im Halbkreis ist ein rechter.

10. Corollar: Die Summe je zweier *anguli in segmento* gegenüberliegender Segmente sind gleich 2 R.

13. Corollar: Die Hälfte der Basis eines *angulus in segmento* ist sein Sinus, wenn er spitz, der seines Complements (bei Arnauld!), wenn er stumpf ist.

14. Corollar: Man sagt, ein Segment faſst einen Winkel (*est capable d'un tel angle*), wenn alle *anguli in segmento* dieses Segments jenem Winkel gleich sind.

15. Corollar: Der Halbkreis faſst den rechten Winkel.

16. Corollar: Wenn man von der Spitze eines Winkels eine Gerade nach der Mitte der Basis zieht, und diese Verbindungsstrecke gleich der Hälfte der Basis ist, so ist der Winkel ein rechter.

17. Corollar: Wenn zwei gleiche Sehnen sich schneiden, so ist je ein Abschnitt der einen je einem Abschnitt der andern gleich.

Es folgen fünf Aufgaben, eine weitere Tangentenkonstruktion für den Kreis; die Aufgabe, ein Segment an gegebenem Kreise abzuschneiden, welches einen gegebenen Winkel faſst. Sie wird mit Hilfe einer beliebigen Tangente und der Sehne im Berührungspunkt, welche mit der Tangente den gegebenen Winkel bildet, auf Grund des 8. Corollars gelöst. Die fünfte Aufgabe heiſst: Man kennt die Abstände dreier Punkte a, b, c und von einem vierten weiſs man, nach welcher Seite er liegt; man kennt ferner die Winkel cxa und axb; der Punkt x ist zu konstruieren.

Lösung: Man konstruiere über ac den Bogen, welcher den Winkel cxa, über ab denjenigen Bogen, welcher axb faſst; der Schnittpunkt dieser Bogen ist der gesuchte Punkt.

Der zweite Abschnitt von IX behandelt die Winkel, deren Scheitel im Kreise liegt, ohne mit dem Centrum identisch zu sein.

Man verlängere die Schenkel, sodaſs man es mit zwei sich schneidenden Sehnen zu thun hat.

IV. Theorem: Ein Winkel, der durch den Durchschnitt zweier Sehnen gebildet ist, wird gemessen durch die Summe des halben Bogens, über dem er steht, und des halben gegenüberliegenden Bogens.

Beweis. Betrachten wir $\sphericalangle fKg$.

$$\sphericalangle fKg = \sphericalangle cfd + \sphericalangle fdg.$$



Diese sind aber *anguli in segmento* und werden gemessen: $\sphericalangle cfd$ durch $\frac{1}{2}\widehat{cd}$, $\sphericalangle fdg$ durch $\frac{1}{2}\widehat{fg}$, also $\sphericalangle fKg$ durch $\frac{1}{2}[\widehat{cd} + \widehat{fg}]$.

Der dritte Abschnitt dieses Buches handelt von den Winkeln, deren Scheitel aufserhalb des Mafskreises liegt.

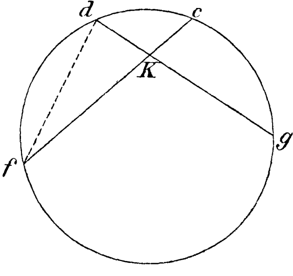


Fig. 7.

Die Schenkel eines solchen Winkels können

1) entweder beide den Kreis schneiden,

2) oder beide den Kreis berühren,

3) oder der eine ihn schneiden, der andre ihn berühren.

Der erste und zweite Fall wird durch das Theorem V zusammengefafst. Es lautet: Der Winkel unter 1) und 2) wird durch die Differenz der Hälften der (inbezug auf den Scheitel) konkaven und konvexen zwischen den Winkelschenkeln liegenden Bogen des Bezugskreises gemessen.

Beweis von 1). Der betrachtete Winkel sei fKg. Zieht man die Hilfssehne fd, so ist nach dem Aufsenwinkelsatz $\sphericalangle fKg = \sphericalangle fdg - \sphericalangle Kfd$, diese beiden Winkel sind aber *anguli in segmento*; also ist Winkel fKg zu messen durch Bogen $\frac{1}{2}[\widehat{fg} - \widehat{dc}]$.

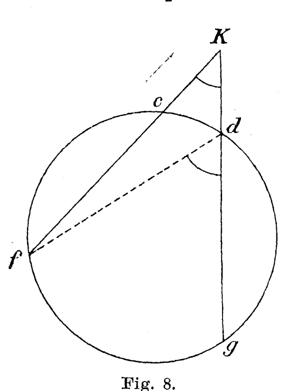


Fig. 8.

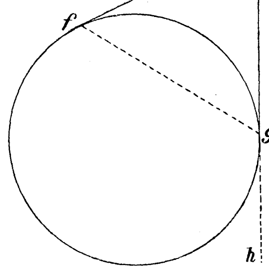


Fig. 9.

Beweis von 2). Der Winkel, dessen Schenkel Tangenten sind, sei wieder durch fKg bezeichnet; man verlängere Kg über g hinaus; dann ist $\sphericalangle fKg = \sphericalangle hgf - \sphericalangle gfK$, dann ist der gegebene Winkel in die Differenz zweier *anguli segmenti* zerlegt und wird entsprechend $\sphericalangle fKg$ durch $\frac{1}{2}[\widehat{fg} - \widehat{gf}]$ gemessen.

Nicht ohne Interesse ist das folgende VI. Theorem. Ein Winkel habe seinen Scheitel aufserhalb des Bezugskreises; wenn der eine Schenkel den Kreis schneidet und in dem Endpunkt eines Durchmessers ihn wieder verläfst, auf welchem der andere Schenkel senkrecht ist, welch letzterer den

Kreis schneiden, berühren oder ganz aufserhalb liegen kann, so wird der Winkel gemessen durch die Hälfte des Bogens, welchen der Abschnitt des ersteren Winkelschenkels stützt und zwar des kleineren Bogens. Der Satz wird auf vier Arten bewiesen, um zu zeigen, wie verschieden man die bisher abgeleiteten Resultate benützen kann.

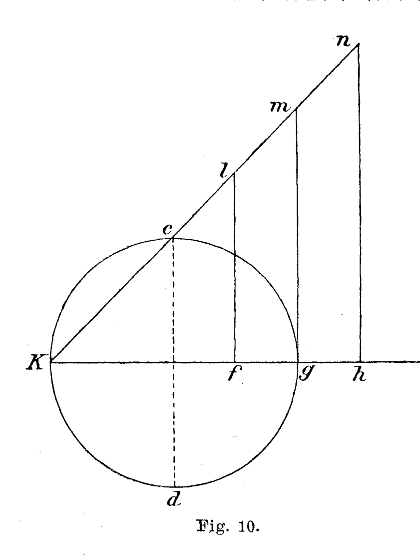


Fig. 10.

Wir geben den dritten Beweis wieder. Der betrachtete Winkel sei Winkel $\sphericalangle l$, oder die ihm gleichen Winkel $\sphericalangle m$ oder $\sphericalangle n$. Man ziehe die Hilfslinie $cd \perp Kg$, dadurch entstehen die beiden gleichen Bogen cK und Kd. Der Winkel bei c ist aber gleich den Winkeln bei l, m oder n als Scheitelwinkel ihrer *alternes* (innere Wechselwinkel zwischen Parallelen), der Winkel Kcd wird aber als *angulus in segmento* gemessen durch $\frac{1}{2}\widehat{Kd}$; also die ihm gleichen $\sphericalangle Klf$, $\sphericalangle Kmg$ und $\sphericalangle Knh$ durch die Hälfte von Bogen cK.

Die Winkel, deren Schenkel Tangenten sind, werden nochmals wieder aufgenommen. Sie werden *angles circonscripts* genannt.

Das VII. Theorem fafst ihr Mafs in andere Worte: Es ist dasselbe gleich dem halben Mafskreis minus dem konvexen Bogen zwischen den Winkelschenkeln.

Daran schliefsen sich sechs Corollare.

Der sechste heifst beispielsweise: Die demselben Kreise umschriebenen Winkel sind gleich, wenn ihre Scheitel gleichweit vom Centrum entfernt sind.

Den Schlufs des Buches IX bildet eine hübsche Tabelle der betrachteten Winkel und ihrer Mafse durch die Bogen des Bezugskreises je nach ihrer Lage zu demselben. Da wir die einzelnen Theoreme wiedergegeben haben, glauben wir von der Reproduktion der Tabelle absehen zu dürfen.

Im X. Buche ist die Rede von den Proportionen von Strecken. Da dieselbe von den Parallelen und Winkeln abhängt, kann sie erst hier in ungezwungener Weise erörtert werden.

Voran gehen zehn Hilfssätze. Die Definition des ebenen Parallelraumes, des *„Lots dieses Raumes“* werden in Erinnerung gebracht. Winkel sollen ähnlich heifsen, wenn sie gleich sind und je einer der Winkel an der Basis des einen je einem an der Basis des anderen gleich ist.

Zwei Strecken sind *„proportionelles“* zweier andern, wenn sie die Ante-

cedenten bilden und letztere die Consequenten der Proportion. Wir kürzen Parallelraum im Folgenden immer durch PR ab.

Wenn zwei Strecken in zwei PR gleichgeneigt sind, verhalten sie sich wie die Lote dieser PR und die *éloignemens du perpendicule* stehen im gleichen Verhältnis.

Den Beweis führt Arnauld wieder mit Hilfe der *aliquotes pareilles,* indem er das Lot des einen Raumes in beliebig viele gleiche x teilt und durch Parallelen zu den Grenzen des PR durch die Teilpunkte beliebig viele sehr kleine PR erhält, die unter sich gleich sind. Dadurch zerfällt die Transversalstrecke in ebensoviele kleine gleiche Teile. Denn geht er mit dem x an die Teilung des Lots des zweiten PR; nach der Definition für Proportionen finden dann die behaupteten drei Verhältnisgleichheiten statt. Arnauld ist sehr stolz auf seinen Beweis: „*dont je ne croy pas que jamais personne se soit avisé.*" Aus diesem Fundamentalsatz werden die Proportionen an Transversalstrecken und ihren Abschnitten zwischen Parallelen hergeleitet.

Das II. Theorem enthält die Proportionen bei ähnlichen Winkeln (Dreiecken).

Wir finden z. B. als dritten Corollar den Satz: Bei ähnlichen Winkeln (Dreiecken) verhalten sich die Basen wie die zugehörigen Höhen.

Statt von ähnlichen Dreiecken spricht Arnauld konsequent immer von Winkeln mit parallelen Basen.

Das III. Theorem dieses Buches lautet: Die Schenkel zweier ungleicher Winkel sind gleichwohl proportioniert, wenn je ein Winkel an der Basis gleich, im andern Paar der Winkel an den Basen einer das Complement des ihm entsprechenden ist.

Der Beweis wird mit Hilfe eines anliegenden gleichschenkligen Dreiecks geführt. Als zweiten Corollar des dritten Satzes haben wir die Behauptung, daſs die Halbierungslinie eines Winkels die Basis in zwei Abschnitte teilt, die sich verhalten wie die ihnen anliegenden Schenkel.

Den Schluſs des X. Buches bilden die Aufgaben: Zu drei Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren und eine gegebene Strecke in gleiche Teile zu teilen.

Das XI. Buch ist überschrieben: *Des lignes reciproques;* es birgt einige interessante Sätze. Arnauld selbst sagt: *Ce livre cy sera encore de la proportion des lignes et contiendra plusieurs choses nouvelles que l'on jugera peutestre plus belles et plus générales, que tout ce qu'on a trouvé jusques icy sur cette matière des proportions, en ne se servant que des lignes droites et des cercles.*



Zwei Strecken sind reziprok zu zwei andern, wenn sie die äufseren Glieder einer Proportion bilden und das zweite Paar die inneren.

Den eigentlichen Lehrsätzen geht die Definition antiparalleler Basen desselben Winkels vorher. Arnauld unterscheidet drei Anordnungen: 1) Getrennt zwischen den Winkelschenkeln verlaufende, 2) sich kreuzende, 3) antiparallele Basen, welche einen gemeinschaftlichen Endpunkt besitzen.

Zum Ausgangspunkt aller Beweise dieses Buches dient der Fundamentalsatz von X. Um sich nicht zu verwirren, hat man als ersten und dritten Term immer die im gleichen PR liegenden Transversalstrecken anzusetzen und als ersten und zweiten die gleichgeneigten in verschiedenen PR.

I. Hauptsatz. In einem Winkel mit zwei parallelen Basen ist ein ganzer Schenkel und sein durch die zweite Basis gebildeter Abschnitt (gegen den Scheitel) reziprok zum andern Schenkel und dessen entsprechendem Abschnitt.

Wir geben von den Beweisen den der zweiten Anordnung.

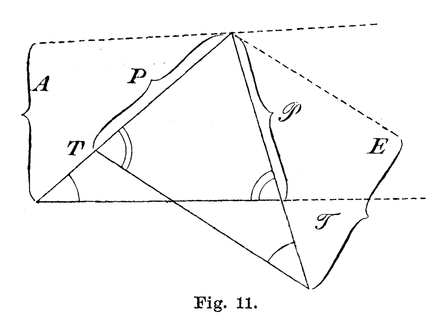


Fig. 11.

Beweis: T und $\mathcal{P}$ liegen im gleichen PR, der A heifsen möge; P und $\mathcal{T}$ im gleichen Parallelraum E, also, da T und $\mathcal{T}$ in ihren Parallelräumen gleichgeneigt sind und P und $\mathcal{P}$ ebenso in den Räumen A und E,

$$T : \mathcal{T} = \mathcal{P} : P.$$

II. Hauptsatz: Wenn zwei Scheitelwinkel antiparallele Basen besitzen, so sind die Abschnitte des einen Schenkels, die durch den andern gebildet werden, reziprok zu den Abschnitten des andern Schenkels.

Im folgenden wird der Plan des ganzen XI. Buches entwickelt. Es soll sich um die Aufstellung von Paaren reziproker Strecken handeln.

Dazu sind immer antiparallele Winkelbasen notwendig. Kennt man also einen allgemeinen Weg zur Herstellung solcher, so bereitet die Sache keine Schwierigkeiten. Dazu verwendet Arnauld einen Kreis, ohne welchen man ja auch die mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen Strecken nicht auffinden kann.

Dabei sind die Möglichkeiten, dafs der Scheitel des Winkels, welcher antiparallele Basen besitzt,

1) auf dem Kreise,
2) aufserhalb,
3) innerhalb desselben

liegt.

Notwendig sind dazu die Sätze über die *anguli segmenti, in segmento* u. s. w. des IX. Buches; dieselben werden deshalb als Lemmen nochmals hierhergestellt.

Arnauld will sich im folgenden nicht damit begnügen, dafs, wenn je ein Winkel an antiparallelen Basen gleich ist, auch nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck der andere übereinstimmen mufs, sondern er will für jeden den Nachweis positiv erbringen. Ebenso immer ohne Mittelglied direkt nachweisen, dafs zwei Paare (*binaires*) von Strecken zu einander reziprok sind, um daran speziell den Vorzug des direkten Beweises zu erkennen.

Hier schliefst sich in der Ausgabe von 1667 ein Satz an, dem Arnauld den Namen *„Theoreme anomal"* giebt.

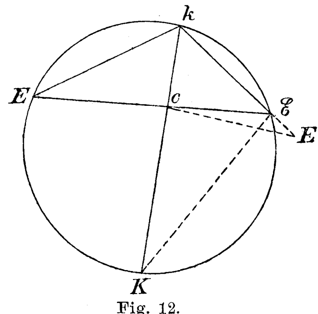


Fig. 12.

„Die Schenkel eines eingeschriebenen Winkels sind reziprok zu der Sehne auf der Halbierungslinie dieses Winkels und deren Abschnitt zwischen Scheitel und Basis des eingeschriebenen Winkels."

Beweis: $\sphericalangle KkE$ ist nicht nur gleich, sondern auch ähnlich dem $\sphericalangle Kk\mathcal{E}$; denn $\sphericalangle kE\mathcal{E} = \sphericalangle kK\mathcal{E}$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen und $\sphericalangle kcE$ wird gemessen (nach Buch IX) durch $\frac{1}{2}(kE + K\mathcal{E})$ und $\sphericalangle K\mathcal{E}k$ durch $\frac{1}{2}kK$; da aber $\widehat{kK} = \widehat{kE} + \widehat{EK}$ und $\widehat{EK} = \widehat{K\mathcal{E}}$ ist, so wird

$$\tfrac{1}{2}kK = \tfrac{1}{2}[kE + K\mathcal{E}],$$

also auch

$$\sphericalangle Eck = \sphericalangle K\mathcal{E}k,$$

also nach dem ersten Satze

$$kE : kK = kc : k\mathcal{E}.$$

[Um die antiparallelen Basen vor sich zu haben, hätte man nur um die Winkelhalbierende umzuklappen.]

Der allgemeine Fall, dafs der Scheitel auf der Peripherie liegt, erfordert die Hinzunahme einer geraden Linie. Dadurch ergiebt sich ein *allgemeiner Satz, welcher vielleicht der schönste und umfassendste über Proportionen von Strecken sei:*

„Zieht man vom Endpunkt eines Durchmessers, welcher senkrecht ist zu einer Geraden y, welche ihrerseits den Kreis schneidet, berührt oder aufserhalb liegt, Gerade nach der Geraden y hin, so sind alle diese Geraden, d. h. die Strecken, welche von der Kreisperipherie oder von y begrenzt werden, und ihre Abschnitte gegen den Endpunkt des Durchmessers hin, welche durch y bezw. die Kreisperipherie gebildet werden, reziprok zu jeder von ihnen und

und deren entsprechenden Abschnitt, und mittlere Proportionale zwischen einer solchen Strecke und jenem Abschnitt ist die Strecke des Büschels nach dem Schnittpunkte hin der Geraden y und des Kreises.“

Arnauld unterscheidet jene drei Fälle:

1) y ist Sekante,

2) y ist Tangente,

3) y verläuft ganz aufserhalb.

In 1) unterscheidet er wieder drei Unterfälle:

a) zwei Strecken werden verglichen, die beide zuerst von y getroffen werden.

b) zwei solche, die zuerst den Kreis schneiden;

c) die Kombination von zwei Strecken der beiden Arten,

sodafs man für 1) die Figuren hat:

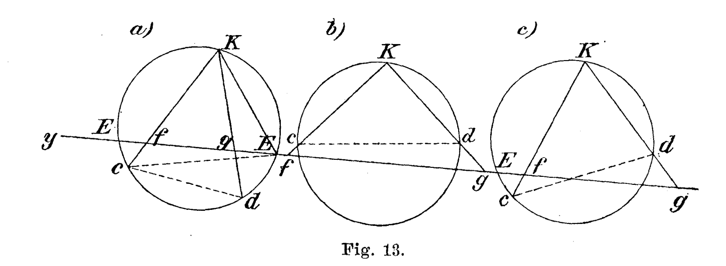


Fig. 13.

Es wird nun nachgewiesen, dafs immer die Basen cd und fg antiparallel sind; und infolgedessen:

$$Kf : Kd = Kg : Kc.$$

Im Satze $Kf : KE = KE : Kc$ sind wieder Ef und Ec antiparallele Basen. (Fig. a.)

Für 2) und 3) ergeben sich nachfolgende Figuren. In der ersteren ist der Durchmesser KE selbst mittlere Proportionale zwischen Kc und Kf oder Kd und Kg. Die Basen Ef und Ec, sowie cd und fg sind wieder antiparallel.

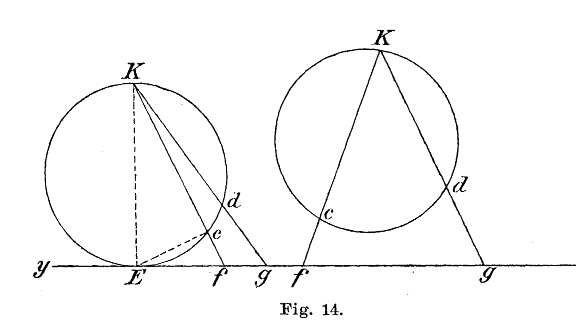


Fig. 14.

An diesem Satze hat wohl Arnauld Eigentumsrecht.

Wir gehen zum zweiten Falle über: Der Durchschnittspunkt der beiden Geraden liegt aufserhalb des Kreises.

Das V. Theorem enthält den Sekantensatz.

Beweis: cg und df sind antiparallel, denn $\sphericalangle f = \sphericalangle g$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen. $\sphericalangle kcg$ aber ist gleich kdf; denn beide werden gemessen durch $\frac{1}{2}(\widehat{gd} + \widehat{dc} + \widehat{cf})$ nach Buch IX, also sind cg und df antiparallel und $kf : kg = kd : kc$.

Auf gleiche Weise, mit Hilfe des Antiparallelseins der cE und fE, wird im VI. Theorem der Tangentensatz bewiesen.

Beweis: $\sphericalangle KfE$ wird gemessen durch $\frac{1}{2}\widehat{Ec}$; dieser Bogen bildet aber auch das Maſs des *angulus segmenti* KEc; und $\sphericalangle KEf$ besitzt als

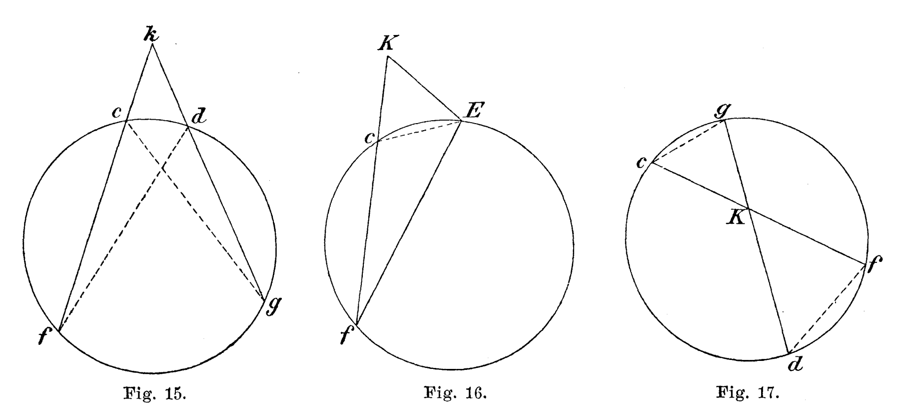


Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17.

Maſs $\frac{1}{2}[\widehat{Ec} + \widehat{cf}]$; ein Bogen, der auch Maſs des Winkels KcE ist, also fE und Ec antiparallel und $Kf : KE = KE : Kc$.

Das VII. Theorem lehrt und beweist den Sehnensatz. cg und df sind antiparallel, also $Kf : Kg = Kd : Kc$. Wir haben hier den dritten Fall, wo der Schnittpunkt innerhalb des Kreises liegt.

VIII. Theorem. Wird eine der Sehnen halbiert, so ist ihre Hälfte mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der andern.

Das IX. Theorem bringt die drei Sätze über die mittleren Proportionalen am rechtwinkligen Dreieck.

Das X. Theorem lautet: Wird die Hypotenuse eines rechten Winkels durch eine Senkrechte geschnitten, welche auch einen Schenkel schneidet, so ist die ganze Hypotenuse und ihr Abschnitt gegen jenen Schenkel hin reziprok zu diesem Schenkel und seinem Abschnitt gegen die Hypotenuse.

Das letzte Theorem dieser Art ist die Umkehrung der bisherigen und lautet: Hat ein Winkel zwei Basen und stehen die Schenkel bezüglich dieser Basen in Proportion, so sind die Basen parallel oder antiparallel. Es folgen Aufgaben über die vorhergehenden Theoreme, z. B. wenn man die drei ersten Strecken einer geometrischen Progression kennt, die übrigen

bis ins Unendliche zu konstruieren. Die gegebenen drei Glieder seien Kc, KL, Kd. Man errichtet über Kd einen Halbkreis, trage Kc von K aus auf Kd ab, errichte in c eine Senkrechte; verbinde KL durch eine unendliche Gerade x; die Verlängerung von Kd sei z; dann errichte man abwechselnd in d auf z, in m auf x, in f wieder auf z u. s. w. eine Senkrechte. Km, Kf, Kn, Kg in inf. sind die weiteren Glieder der Progression.

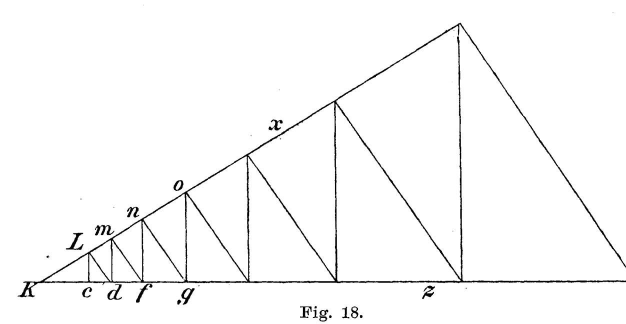


Fig. 18.

V. Aufgabe. Eine gegebene Strecke nach dem goldenen Schnitt (*en moyenne et extrême raison*) zu teilen.

$$b - x : x = x : b,$$

das x heifst *mediane*.

Man beschreibe mit $\frac{b}{2}$ als Radius einen Kreis; nachdem man im Endpunkt eines Durchmessers eine Senkrechte gleich b errichtet hat, ziehe man durch den andern Endpunkt von b eine Durchmessersekante. Ihr Abschnitt aufserhalb sei x.

Die ganze Sekante ist $x + b$, b ist Tangente, also:

$$x : b = b : x + b$$
$$b : x = x + b : b \quad (\textit{permutando})$$
$$b - x : x = x : b \quad (\textit{dividendo}).$$

Wenn man einer so geteilten Strecke ihre Mediane anfügt, erhält man wieder eine im äufsern und innern Verhältnis geteilte, deren Mediane die ursprüngliche Strecke ist

$$b - x : x = x : b$$
$$b : x = x + b : b \quad (\textit{componendo}),$$

also ist $b + x$ durch b nach dem goldenen Schnitt geteilt.

Auch teilt der kleinere Abschnitt, die Mediane (den gröfseren) einer so geteilten Strecke, wieder „*en moyenne et extrême raison*“; der kleinere Abschnitt möge y heifsen, die Mediane x, die ganze Strecke b. Zu beweisen ist:

$$x - y : y = y : x.$$

Man hatte aber

$$y : x = x : \underbrace{y + x}_{b}$$

permutando $$x : y = y + x : x$$

dividendo $$x - y : y = y : x.$$

Hat man also eine so geteilte Strecke, so kann man daraus eine ∞ Menge gröſserer und kleinerer ebenso geteilter ableiten.

Das sei ein neuer und sehr schöner Beweis für die Teilbarkeit einer Strecke ins Unendliche.

Hier hat Arnauld in schöner Weise die fünf Jahre vorher durch Pascal entdeckte Methode der vollständigen Induktion gehandhabt.[1])

Die sechste Aufgabe heiſst: Wenn man die Länge der Schenkel eines Winkels kennt, welcher die Hälfte eines jeden Winkels an der Basis sein soll, die Basis zu konstruieren.

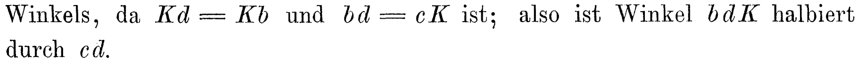
Lösung: Man beschreibe mit der gegebenen Schenkellänge als Radius einen Kreis und teile den Radius nach dem goldenen Schnitt. Die Kreissehne, welche gleich dem gröſseren Abschnitt des Radius genommen wurde, ergiebt die verlangte Basis. Also die Konstruktion der Zehneckseite.

Beweis: Es sei c der Teilpunkt des Radius; man verbinde c und d; man hat nun nachzuweisen, 1) daſs $\sphericalangle K = \sphericalangle cdb$; 2) daſs $\sphericalangle cdb = \frac{1}{2} \sphericalangle bdK$ ist.

Ex construct. ist $bc : bd = bd : bK$, also sind die beiden Basen cd und Kd des $\sphericalangle b$ antiparallel und folglich $\sphericalangle K = \sphericalangle bdc$.

Fig. 19.

2) Die Abschnitte bc und cK der Basis bK des Winkels bdK verhalten sich wie die Schenkel dieses Winkels, da $Kd = Kb$ und $bd = cK$ ist; also ist Winkel bdK halbiert durch cd.



Den Schluſs des XI. Buches bilden einige Beispiele inkommensurabler Strecken.

1) Seite und Hypotenuse im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck.

2) Wenn die Hypotenuse und eine Kathete sich wie $x : z$ (ganze Zahlen) verhalten, soll man beurteilen, wann das Verhältnis der Hypotenuse und der andern Kathete rational ist. Die Bezeichnungen entnehmen wir aus der Figur

1) Nach brieflicher Mitteilung von Prof. G. Vacca in Turin an Herrn Geh. Hofrat Cantor besaſs Maurolycus schon 1575 die vollständige Induktion als Methode und erkannte voll deren Wert.

$$∺ h . c . k \quad \text{und} \quad ∺ h . d . l,$$

$$\frac{h}{c} = \frac{x}{z},$$

also

$$\frac{h}{k} = \frac{x^2}{z^2};$$

ferner

$$l = h - k; \quad \frac{l}{h} = \frac{h - k}{h} = 1 - \frac{k}{h},$$

also

$$\frac{l}{h} = \frac{x^2 - z^2}{x^2} \quad \text{oder} \quad h : l = x^2 : (x^2 - z^2),$$

ist also $x^2 - z^2$ Quadratzahl, dann verhalten sich h und l wie zwei Quadratzahlen zu einander und dann ist h und d kommensurabel.

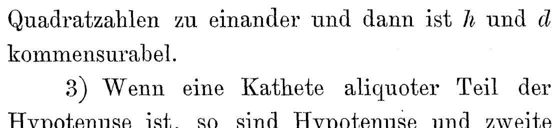
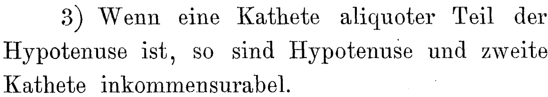



Fig. 20.

3) Wenn eine Kathete aliquoter Teil der Hypotenuse ist, so sind Hypotenuse und zweite Kathete inkommensurabel.

Den Gegenstand des XII. Buches bilden die Figuren im allgemeinen hinsichtlich ihrer Winkel und Seiten. Wir haben Arnaulds Begriff der Figur schon oben kennen gelernt, die Seiten sind ihm Begrenzung.

Inbezug auf dieselben hat man einzuteilen in

1) *rectilignes*
2) *curvilignes* (krummlinige)
3) *mixtes* (gemischtlinige).

Arnauld macht hier auf eine Art Dualität aufmerksam: ein Winkel erfordert zwei Gerade; an einer Seite der Figur liegen zwei Winkel.

Die geradlinigen Figuren unterscheidet er in solche *„qui ont quelque angle rentrant“*, das sind Vielecke mit einspringendem Winkel, und andere *„dont tous les angles sont saillants“*.

I. Theorem: Jedes n-Eck kann in $n - 2$ Dreiecke aufgelöst werden.

II. Theorem: Die Summe der Winkel im n-Eck ist $(2n - 4)$ Rechten gleich.

Die Figuren werden eingeteilt in *„equiangles“* und *„equilateres“*. Die mit beiden besonderen Eigenschaften heifsen *„regulieres“*; dazu gehört der Kreis.

Kongruente Figuren heifsen *„tout-egales“*. Dieselben sind ein spezieller Fall der *„semblables“*. Für letztere gilt der Satz: Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich wie homologe Seiten derselben.

Sind die Perimeter zweier Figuren gleich, so heifsen sie *„isoperimetres“*.

Im folgenden werden besonders ein- und umgeschriebene Polygone untersucht. Dafür gilt zunächst der Satz: *Une figure inscritte au cercle*

ne sçauroit être equiangle qu'elle ne soit equilaterale ou absolument ou alternativement; et en ce dernier cas, il faut que le nombre des costez soit pair.

Bemerkenswert ist im Beweise die Wendung: *Car afin que . . . il faut et il suffit* (ist notwendig und hinreichend). Für die umgeschriebenen Figuren gilt der Satz: Eine umgeschriebene Figur kann nur gleichseitig sein, wenn sie zugleich gleichwinklig ist, sei es absolut oder alternativ.

Als vierten Satz finden wir: Jedes reguläre Polygon kann einem Kreise ein- oder umgeschrieben werden. Zum Beweise wird durch drei Ecken der Figur ein Kreis gelegt und nachgewiesen, dafs successive die Verbindungsstrecke jeder folgenden Ecke mit dem Centrum dieses Kreises dem Radius desselben gleich sein mufs.

Es wird sodann gelehrt, wie man den Polygonwinkel einer regulären eingeschriebenen Figur bestimmt.

Die Geometer betrachten den Kreis als reguläres Polygon unendlich grofser Seitenzahl. Der Bogen über einer Seite ist demnach unendlich klein, *infiniment petit*. Der Polygonwinkel ist demnach 180^0.

Bemerkenswert für die Frage des Contingenzwinkels ist hier die Stelle: *Aussy il est vray que l'angle du raion sur la circonference d'un cercle est droit en sa maniere, puisque le raion coupe perpendiculairement sa circonference; et que si cet angle est plus petit qu'un droit ce n'est que l'espace qui est entre la tangente et la circonference qui est plus petit que tout angle aigu quoiqu'il n'y ait point d'angle aigu qui ne puisse estre divisé en une infinité de plus petits.*

Der nächste Satz heifst: In zwei regulären n-Ecken stehen die Radien der ein- und umgeschriebenen Kreise, die Perimeter und Seiten (also *raion, raion droit, circuit* und *costé*) im gleichen Verhältnis. Als zweiter Corollar: Kreisumfänge verhalten sich wie die betreffenden Durchmesser.

Hübsch sind hier wieder die Grenzbetrachtungen: *Car plus ces polygones ont de costez, moins il y a de difference entre la circonference du cercle et leur circuit. Et ainsy quelque petite que soit une ligne donnée, quand ce ne seroit que la centmilliême partie de l'épaisseur d'une feuille de papier, on peut concevoir un polygone de tant de costez inscrit dans l'un et dans l'autre cercle, que la difference de son circuit d'avec la circonference de ces cercles sera moindre que cette ligne donnée.*

Or de quelque grand nombre de costez que soient ces polygones, leurs circuits sont toûjours en même raison que les diametres.

Donc on doit conclure par une analogie très certaine, que les circonferences sont aussy en même raison que les diametres.

Für die Konstruktion der regulären n-Ecke giebt Arnauld die Regeln:

1) Kann man die n-Eckseite konstruieren, so kann man es auch für die νn-Eckseite; wo die ν von $\nu = 2$ an in geometrischer Progression des Quotienten 2 aufeinander folgen.

2) Kennt man die Konstruktion des eingeschriebenen n-Ecks (*une certaine espece d'une figure reguliere*), so kennt man das umgeschriebene n-Eck.

Zum Schlusse wird die Konstruktion der Quadrat-, der Sechseck-, Dreieck-, Zehneck-, Fünfeckseite, endlich der Fünfzehneckseite als Differenz der Zehneck- und Fünfeckseite gelehrt.

Im XIII. Buch werden speziell Vierecke und Dreiecke behandelt.

Da die Seite eines jeden Dreiecks Basis des gegenüberliegenden Winkels ist, so können die für Winkel und deren Basis abgeleiteten Sätze unmittelbar auf das Dreieck angewandt werden.

Zunächst wird der Satz über die Winkelsumme rekapituliert.[1]

Jedem Dreieck läfst sich ein Kreis umschreiben. Daraus ersieht man unmittelbar, dafs der gröfsten Seite der gröfste Winkel gegenüberliegt; denn diese stützt den gröfsten Bogen des umgeschriebenen Kreises, welcher eben jenen gröfsten Winkel mifst.

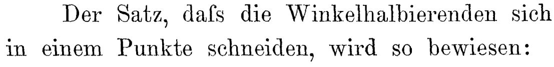


Fig. 21.

Der Satz, dafs die Winkelhalbierenden sich in einem Punkte schneiden, wird so bewiesen:

Die Halbierungslinien der Winkel bei c und d cp und dq mögen sich in r schneiden; ich behaupte, dafs br den Winkel b halbiert. Da Winkel d halbiert ist durch dq, so verhält sich

$$db : bq = dc : cq,$$

betrachtet man dq als Basis des Winkels bei c, der durch cr halbiert ist, so gilt ebenso:

$$cd : cq = dr : qr,$$

also

$$db : bq = dr : qr,$$

und demnach halbiert br den Winkel bei b. Dabei ergeben sich noch die weiteren Proportionen für Winkel b:

$$br : rs = bd : ds$$

$$br : rs = bc : cs$$

---

1) Der Beweis Arnaulds ist im neunzehnten Jahrhundert von M. A. Transon in den *Comptes rendus hebdomaires* Tom. 73, 1871 gegen die Nicht-Euklidische Geometrie ins Feld geführt worden. Wir haben die Stelle eingesehen.

Transons Verweis auf Arnauld wird von Paul Stäckel in seinem Buche: *Die Theorie der Parallellinien* Leipzig 1895 p. 231 erwähnt.

für Winkel c:

$$cr : rp = cd : dp$$

$$cr : rp = cb : bp,$$

für Winkel d:

$$dr : rq = db : bq$$

$$dr : rq = dc : cq.$$

Einige Konstruktionsaufgaben folgen.

Unter der Überschrift: „*Triangles comparez*“ erscheinen die vier Kongruenzsätze. Sie werden mit Hilfe des umgeschriebenen Kreises und Parallelräumen bewiesen. Die nächsten Sätze betreffen ähnliche Dreiecke; sie werden möglichst eingeschränkt und hierfür auf die beiden Bücher über proportionale Strecken verwiesen. Arnaulds Einteilung der Dreiecke haben wir bei Besprechung der Logik wiedergegeben.

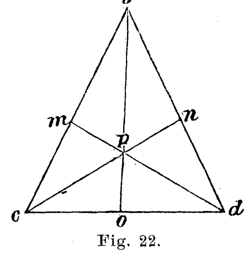


Fig. 22.

Das nächste Theorem ist das vom gemeinsamen Schnittpunkt der Perpendikel aus den Ecken auf die gegenüberliegenden Seiten (Höhenpunkt). Zwei der Perpendikel dm und cn mögen sich in p schneiden; ich behaupte, dafs auch bo, die Gerade durch den Schnittpunkt p jener, $\perp$ zu dc ist. Die Dreiecke cbn und dbm haben einen Winkel gemein; aufserdem sind sie rechtwinklig; also $\sphericalangle\, bcn$ und $\sphericalangle\, bdm$ gleich, folglich sind auch die Dreiecke bdm und cpm ähnlich (weil *equiangles*), also

$$dm : mc = mb : mp,$$

alternando

$$dm : mb = mc : mp,$$

also sind die Dreiecke bmp und dmc ähnlich, weil zwei Seiten in Proportion stehen und der eingeschlossene Winkel ein rechter ist, also $\sphericalangle\, mbp = \sphericalangle\, mdc$; ferner sind die Winkel mpb und opd als Scheitelwinkel gleich; also Dreieck mpb ähnlich dem Dreieck opd; aber $\sphericalangle\, pmb$ ex const. $=$ R also auch $\sphericalangle\, pod$; q. e. d.

Durch die Perpendikel entstehen zwölf Dreiecke, sechs grofse, die zu Hypotenusen die Seiten des ursprünglichen besitzen, die sich gegenseitig teilweise überdecken, und sechs ganz getrennt liegende, deren Hypotenusen die Abschnitte der Transversalen gegen die Ecken hin sind. Diese zwölf Dreiecke sind zu vier und vier ähnlich.

Dabei ergeben sich einige bemerkenswerte Proportionen.

1) Ein Schenkel eines Winkels und sein Abschnitt gegen den Scheitel sind reziprok zum andern Winkelschenkel und dessen entsprechendem Abschnitt.



2) Die Abschnitte einer Seite, welche durch das zugehörige Perpendikel gebildet werden, sind reziprok zum ganzen Perpendikel und dessen Abschnitt gegen die Seite hin.

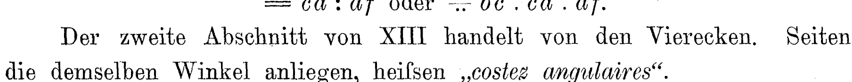
Der nächste Passus lautet: *Des triangles rectangles.* Wir finden hier den Satz: Im rechtwinkligen Dreieck, wo einer der spitzen Winkel $= 30^0$ ist, ist die ihm gegenüberliegende Kathete die Hälfte der Hypotenuse, und diese Kathete ist der Sinus von 30^0.

Der Beweis wird durch Verdoppelung des Dreiecks geführt, sodafs ein gleichseitiges entsteht.

Konstruktionsaufgaben über rechtwinklige Dreiecke aus gegebenen Stücken folgen.

Für gleichschenklige Dreiecke erwähnen wir den Satz: Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind und die Basis des einen Seite des andern ist, so ist diese Strecke mittlere Proportionale zwischen der Seite des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis sie ist, und der Basis der zweiten, wovon sie Seite ist. Denn, da die Dreiecke ähnlich sind, so verhält sich $bc : cd = cd : df$ oder $\div\!: bc \,.\, cd \,.\, df$.

Fig. 23.



Der zweite Abschnitt von XIII handelt von den Vierecken. Seiten, die demselben Winkel anliegen, heifsen *„costez angulaires"*.

1) Satz: Jedes Viereck, dessen Summe gegenüberliegender Winkel $= 2R$ ist, kann einem Kreise eingeschrieben werden, aber auch nur ein solches.

Ein Viereck dieser Eigenschaft sei $fbcd$; ich behaupte, dafs der Kreis, welcher durch cbf geht, auch den Punkt d treffen mufs. Denn jeder Winkel g mit der Basis fc, der dem Kreise in dem Segmente, in welchem d liegt, eingeschrieben ist, ergiebt mit $\sphericalangle b$ zusammen $2R$. Also Winkel $fgc = \sphericalangle d$, weil nach Voraussetzung $\sphericalangle d$ mit Winkel b zwei Rechte beträgt. Also ist $\sphericalangle d$ dem Kreise eingeschrieben.

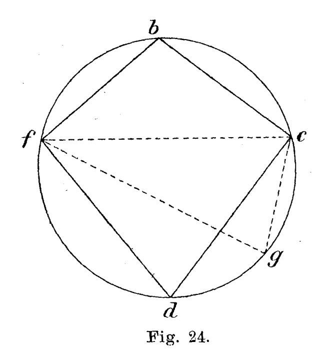


Fig. 24.

Die weiteren Sätze behandeln Parallelogramme. Den Schlufs bildet die Klassifizierung der Parallelogramme in einer Tabelle.

Den Schlufs des ganzen XIII. Buches bildet der Satz über das *„Pentagone"*: Zwei Diagonalen des regulären Fünfecks teilen sich gegenseitig nach dem goldenen Schnitt, und der gröfsere Abschnitt ist gleich der Fünfeckseite.

Beweis: Jede Fünfeckseite stützt einen Bogen von 72^0. Also ist

der Peripheriewinkel, wie z. B. bdc, der sich auf einen solchen Bogen stützt, $= 36^0$. Und der Peripheriewinkel, der sich auf zwei solche Bogen stützt, z. B. bcf, ist 72^0. Ebenso ist $\sphericalangle\, bgc$ nach einem im IX. Buche bewiesenen Satze und ebenso sein Scheitelwinkel $= 72^0$; also $bg = bc$.

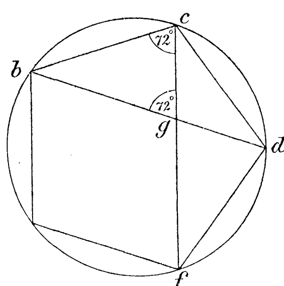


Fig. 25.

Also ist der Winkel cbg nach einem früher bewiesenem Satze ein solcher, daſs die Basis an die Seiten (den Winkelschenkel) angefügt eine nach dem goldenen Schnitt geteilte Strecke ergiebt, d. h.

$$bd : bg = bg : gd.$$

Das XIV. Buch lehrt die Inhaltsberechnung ebener Figuren (*Des figures planes considerées selon leur aire*). Voraus geht in einer *„Idee generale de la mesure des surfaces“* die Begriffsbestimmung des Inhalts. Wir heben daraus die Sätze hervor: Längen werden gemessen durch eine Strecke, die den Abstand zweier Punkte liefert; daher können krumme Linien nur durch Beziehung auf geradlinige Strecken gemessen werden. Ebenso können krumme Oberflächen nur durch Zuhilfenahme von Ebenen ausgemessen werden. Der Inhaltsberechnung kann man das Parallelogramm zugrunde legen, da dieses seine Länge und Breite direkt liefere; noch besser das Rechteck; oder endlich das Quadrat; *„comme la mesure est d'autant plus parfaite qu'elle est plus simple“*. Als Axiome werden ferner vorangeschickt: Quadrate über gleichen Strecken sind inhaltsgleich: *„car il ne peut y avoir de difference que de situation“*; ebenso Rechtecke gleicher Basis und gleicher Höhe. Das Quadrat über einer Strecke heiſst: *„puissance de cette ligne“*; auf diese Axiome wird die Anwendung der Regeln über die Multiplikation der *grandeurs complexes* gestützt bei Inhaltsberechnungen. Alle Sätze in Euklids zweitem Buche seien Anwendungen des Satzes: Das Produkt zweier Gröſsen ist gleich dem Produkt der einen in die Summe der Teile des andern.

Arnauld verifiziert diese und ähnliche Sätze in geometrischer Weise, z. B.:

$$\begin{aligned}(b + c + d + f + g)^2 = b^2 &+ c^2 + d^2 + f^2 + g^2 \\ &+ 2bc + 2bd + 2bf + 2bg \\ &+ 2cd + 2cf + 2cg \\ &+ 2df + 2dg \\ &+ 2fg\end{aligned}$$

ferner

$$(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b)$$

und

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$



Rechtecke gleicher Basis (Höhe) verhalten sich ihrem Inhalte nach wie ihre Höhen (Basen). „*Ähnliche Rechtecke stehen inbezug auf ihre Inhalte im (zusammengesetzten) doppelten Verhältnis entsprechender Seiten*“ heiſst: Ihre Inhalte verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

In einer „*Application de cette doctrine generale à quelques lignes particulieres qu'on a fait voir cy devant estre proportionelles*“ werden der Sehnen-, Sekanten-, Tangentensatz und die Sätze über das rechtwinklige Dreieck in Form von Produktensätzen ausgesprochen.

Der *pythagoräische Satz* wird so bewiesen: Die Hypotenuse sei h, ihre Abschnitte m und n, die Katheten b und d, also

$$\div h \,.\, b \,.\, m \quad \text{und} \quad \div h \,.\, d \,.\, n,$$

also, da

$$hm = bb \quad \text{und} \quad hn = dd,$$

ferner

$$hm + hn = hh,$$

so ist

$$hh = bb + dd$$

und ausgesprochen:

La diagonale d'un rectangle peut (!) *autant que les quarrez des deux costez.*

Als vierter Corollar erscheint der Satz: Im gleichseitigen Dreieck verhält sich das Quadrat über der Seite zum Quadrat der Höhe wie 4 : 3.

Als sechstes Theorem: Das Quadrat über der Basis eines spitzen Winkels ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Schenkeln vermindert um das doppelte Rechteck aus dem einen der Schenkel, auf welchen man vom andern Endpunkt der Basis ein Lot fällt, und dem dadurch entstandenen Abschnitt auf dem Schenkel gegen den Scheitel des spitzen Winkels hin.

Beim Beweis unterscheidet Arnauld zwei Fälle: Jener Schenkel, auf welchen das Lot gefällt wurde, macht mit der Basis einen spitzen oder stumpfen Winkel.

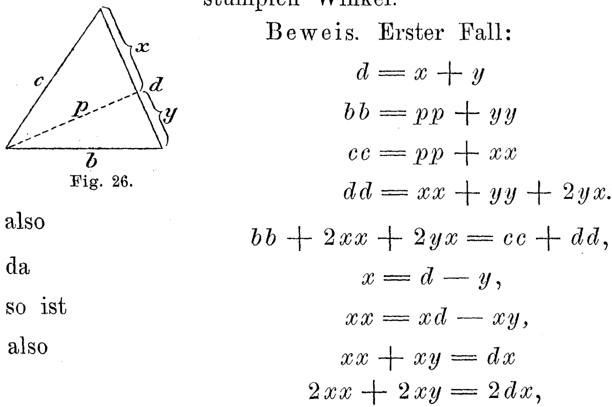


Fig. 26.

Beweis. Erster Fall:

$$d = x + y$$

$$bb = pp + yy$$

$$cc = pp + xx$$

$$dd = xx + yy + 2yx.$$

also

$$bb + 2xx + 2yx = cc + dd,$$

da

$$x = d - y,$$

so ist

$$xx = xd - xy,$$

also

$$xx + xy = dx$$

$$2xx + 2xy = 2dx,$$

also
$$bb = cc + dd - 2dx.$$

Zweiter Fall:
$$x = d + y$$
$$pp = cc - xx$$
$$pp = cc - dd - yy - 2dy$$
$$bb = pp + yy,$$

also:
$$bb = cc - dd - 2dy$$
$$bb = cc + dd - 2dd - 2dy,$$

Fig. 27.

da
$$x = d + y$$
$$dd + dy = dx \quad \text{und} \quad 2dd + 2dy = 2dx,$$

also:
$$bb = cc + dd - 2dx.$$

Das VII. Theorem enthält den entsprechenden Satz für den stumpfen Winkel.

Die beiden folgenden Theoreme sind die Corollare der beiden vorhergehenden für einen stumpfen Winkel von 120^0 und einen spitzen von 60^0.

Das X. Theorem heifst: Das Quadrat über der Fünfeckseite ist gleich der Summe der Quadrate über der Zehneckseite und der Sechseckseite.

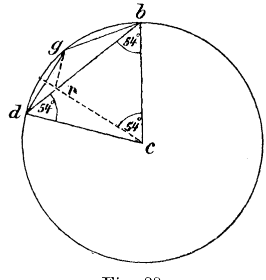


Fig. 28.

Zum Beweise weist Arnauld nach: 1) dafs die Sechseckseite bc mittlere Proportionale zwischen der Fünfeckseite bd und deren Abschnitt br ist. (Denn $\sphericalangle rcb = 54^0$; also Dreieck bdc und brc gleichschenklig und ähnlich.)

2) Die Zehneckseite dg ist mittlere Proportionale zwischen der Fünfeckseite bd und deren kleinerem Abschnitt dr. (Da r ein Punkt der Mittelsenkrechten von gd ist, so ist $rg = dr$, also die Dreiecke dgb und drg gleichschenklig und ähnlich; daraus nach einem im früheren bewiesenen Satze
$$db : dg = dg : dr,$$

also
$$db \cdot dr = dg^2 \quad \text{und nach 1)} \quad db \cdot br = bc^2;$$

da $db = dr + rb$ ist, so wird [nach der Formel
$$(dr + rb)^2 = \underbrace{[dr + rb]}_{db} dr + \underbrace{[dr + rb]}_{db} rb = db^2]$$
$$db^2 = dg^2 + bc^2 \quad \text{q. e. d.})$$

Das XI. Theorem lautet: Ist eine Strecke nach dem goldenen Schnitt geteilt, so ist das Quadrat über einer Strecke, welche die Summe der Hälfte der ursprünglichen und deren gröfserem Abschnitt ist, fünfmal dem Quadrat über der Hälfte der ursprünglichen gleich.

Es sei eine gegebene Strecke d[1]), der gröfsere Abschnitt b, die Hälfte von d gleich m, der kleinere Abschnitt c, dann ist

$$dc = bb \quad \text{und} \quad dd = bd + cd = bd + bb,$$

$$dd = 4mm \quad \text{und} \quad 2mb = bd,$$

aber

$$\begin{aligned}(m+b)^2 &= mm + bb + 2mb \\ &= mm + bb + db \\ &= mm + dd \\ &= mm + 4mm \\ &= 5mm \qquad \text{q. e. d.}\end{aligned}$$

XII. Theorem: *Une ligne estant divisée en moyenne et extrême raison, la ligne composée de la petite portion et de la moitié de la plus grande peut 5 fois le quarrée de la moitié de la plus grande.*

Der dreizehnte Satz endlich ist: In einer nach dem goldenen Schnitt geteilten Strecke ist das Quadrat über der ganzen Strecke vermehrt um das Quadrat des kleineren Abschnitts dreimal dem Quadrat über dem gröfseren Abschnitt gleich.

Beweis:

$$d = b + c \quad \text{und} \quad \div d \,.\, b \,.\, c,$$

$$dd = bb + cc + 2cb$$

$$dd + cc = bb + 2cc + 2cb$$

$$2cc + 2cb = 2bb$$

da

$$cc + cb = bb \quad (\text{da } bb = cd),$$

also

$$dd + cc = 3bb \qquad \text{q. e. d.}$$

Den Schlufs des Buches bilden Aufgaben: Quadrate zu vereinigen, d. h. ihre Summe zu bilden; Rechtecke in Quadrate zu verwandeln; eine Strecke so zu teilen, dafs das Quadrat über dem gröfseren Abschnitt zum Rechteck aus der ganzen Strecke und dem kleineren Abschnitt in gegebenem Verhältnis steht $(m : n)$.

Man hat

1) eine Strecke zu konstruieren, welche sich zu d wie m zu n verhält; sie sei c;

2) die mittlere Proportionale zwischen c und d zu konstruieren, sodafs $cd = p^2$;

3) einen Kreis zu konstruieren mit c als Durchmesser und p als Tangente; die Sekante an denselben vom Endpunkt von p aus liefert durch ihren äufseren Abschnitt x den gesuchten Abschnitt x der gegebenen

1) Man hat zu beachten, dafs bei Arnauld z. B. dc bald eine Strecke dc bedeutet, bald das Rechteck $d \cdot c$; hier ist das letztere gemeint.

Strecke d. Es ist leicht zu beweisen, dafs

$$x^2 : dy = m : n,$$

denn

$$d - x = y, \quad \text{also} \quad cd - cx = cy,$$

ferner

$$cd = p^2 \quad \text{und} \quad p^2 = x^2 + cx,$$

also auch

$$x^2 + cx = cd$$

$$x^2 = cd - cx = cy$$

und

$$cy : dy = c : d$$

$$c : d = m : n,$$

also

$$x^2 : dy = m : n. \qquad \text{q. e. d.}$$

Im siebenten Probleme wird die Wurzel der Gleichungen:

1) $y^2 = b^2 + yd$,
2) $x^2 = b^2 - xd$,
3) $y^2 = yd - b^2$ oder $x^2 = xd - b^2$

konstruiert.

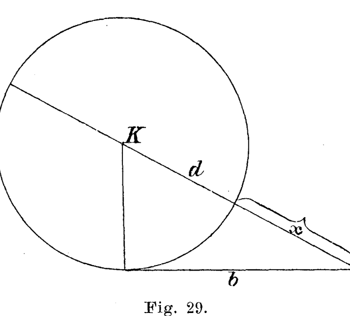
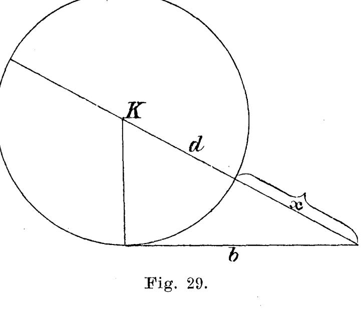



Fig. 29.

Beweis für $y^2 = b^2 + yd$. In diesem Falle ist die ganze Sekante die verlangte Strecke y;

denn

$$y = x + d$$

$$y^2 = yx + yd$$

$$b^2 = xy$$

also

$$y^2 = b^2 + yd.$$

Beweis für $x^2 = b^2 - xd$. Die gesuchte Strecke x ist hier der äufsere Abschnitt der Sekante;

denn

$$x : b = b : x + d,$$

also

$$x^2 + xd = b^2 \quad \text{oder} \quad x^2 = b^2 - xd.$$

Für $y^2 = yd - b^2$ zeichnet Arnauld die nachstehende Figur.

Für $b \geqq \frac{d}{2}$ ist die Konstruktion unmöglich.

x und y genügen beide der Aufgabe;

denn

$$d = x + y \quad \text{und} \quad xy = b^2$$

$$xx + xy = xd \quad \text{und} \quad yy + xy = yd,$$

also

$$xx = xd - xy \quad \text{oder} \quad xx = xd - b^2$$

und

$$yy = yd - xy \quad \text{oder} \quad yy = yd - b^2.$$

Fig. 30.

Der Titel des XV. und letzten Buches heifst: „*De la mesure de l'aire des parallelogrammes, des triangles et d'autres polygones*“.

Hier interessiert uns besonders, was Arnauld von der neuen *„Geometrie der Indivisibilien“* sagt.

„Obwohl die Geometer einig darin sind, dafs die Gerade nicht aus Punkten, die Fläche nicht aus Linien, noch der Körper aus Flächen besteht, so hat man doch seit kurzer Zeit einen Kunstgriff aufgefunden, um eine Unmasse von Dingen zu beweisen, indem man die Oberflächen als aus Linien, den Körper aus Flächen zusammengesetzt betrachtet. Ich habe nichts darüber Geschriebenes zu Gesicht bekommen, hier aber setze ich auseinander, wie ich mir die Sache zusammenreime, indem ich mich auf Flächen beschränke.

Die Grundlage dieser neuen geometrischen Methode ist, den Inhalt eines Flächenstücks als die Summe der Linien anzusehen, welche es erfüllen; sodafs zwei Flächenstücke als gleich angesehen werden, wenn beide von der gleichen Summe gleichartiger Linien erfüllt sind; sei es, dafs eine jede der einen Summe gleich ist einer jeden der andern Summe, oder dafs ein Ausgleich stattfindet, sodafs zwei derselben Summe, welche untereinander ungleich sein können, zusammengenommen zweien aus der zweiten Summe gleich sein können, die wieder unter sich gleich sein mögen.

Um aber nicht zu vielen Widersprüchen Anlafs zu geben, in welche man leicht verfällt, wenn man sich dieser Methode bedient, hat man zu bemerken:

1) Damit Linien als einen Raum erfüllend angesehen werden dürfen, müssen sie alle untereinander parallel sein, sei es, dafs sie Gerade sind, welche einen geradlinigen Raum erfüllen, sei es, dafs sie als Kreise Kreisflächen oder Teile von solchen einnehmen. Der Grund davon ist leicht einzusehen. Man mufs sich also sehr hüten, andere als solche Gerade in Anwendung zu bringen, welche in der einen oder andern Art parallel sind.

2) Damit man sagen kann, dafs eine Summe von Linien einer andern gleich sei, darf man nicht annehmen, dafs man die Zahl der Linien angeben kann, welche den Raum erfüllen; denn es giebt keinen noch so kleinen ebenen Raum, der nicht von einer unendlichen Anzahl erfüllt ist; sondern darin liegt das Wesen der Sache, wenn man sagt, dafs zwei Liniensummen gleich seien, dafs die eine Gesamtheit sowohl als die andere zwei gleiche Strecken lotrecht schneiden; denn es liegt kein Grund vor, anzunehmen, dafs man durch eine der gleichen Strecken mehr Gerade senkrecht hindurchgehen lassen könne als durch die andere. Denn aliquote Teile der einen werden bis ins Unendliche immer gleich sein denselben Aliquoten der andern, und man wird durch die Teilpunkte hüben und drüben gleich viele unter sich parallele Geraden ziehen können, welche hüben und drüben einen gleichen Parallelraum begrenzen werden. Hiervon hängt die Wahrheit dieser Methode ab (sie besteht nicht darin, dafs das Continuum aus Indivisibilien zusammengesetzt

sei, wie einige behaupten); und dies hat Veranlassung gegeben, diese Methode 'Geometrie des Unendlichen' zu heifsen.“

Wörtlich aus den *Nouveaux Elemens.*

In fünf Theoremen setzt Arnauld nach der neuen Methode die Gleichheit von Parallelogrammen gleicher Basis und Höhe, von Dreiecken, ihr Inhaltsverhältnis bei gleicher Basis (Höhe) auseinander. Wir geben nur das fünfte, als das interessanteste, wieder: Der Kreis ist an Inhalt gleich einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete dem Radius, dessen andere dem Kreisumfang gleich ist.

Beweis. Der Kreis sei um d mit Radius db beschrieben. Die Tangente in b sei dem Kreisumfang gleich. Zieht man durch alle Punkte des

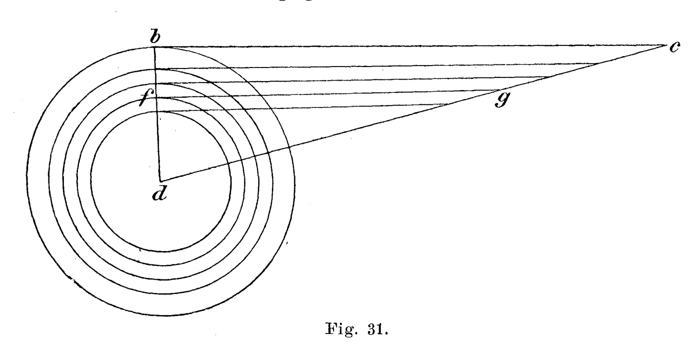


Fig. 31.

Radius konzentrische Kreise, so werden sie die Kreisfläche erfüllen; sie sind alle parallel und werden durch den Radius lotrecht geschnitten. Zieht man durch die Durchschnittspunkte des Radius Parallelen zu bc, so werden diese das rechtwinklige Dreieck erfüllen. Die Summe der konzentrischen Kreise und dieser Parallelen ist aber dieselbe, denn durch jeden Punkt des Radius, durch welchen einer der konzentrischen Kreise geht, kann man eine Parallele ziehen und umgekehrt. Der durch einen und denselben Punkt gehende Kreis und die zugehörige Parallele sind aber an Länge gleich, wie man sieht, wenn man einen ganz beliebigen prüft, z. B. den durch f; denn

$$bd \,.\, df :: \begin{cases} \text{Kreis durch } b \,.\, \text{Kreis(umfang) durch } f \\ bc \,.\, fg \end{cases}$$

(in ähnlichen Dreiecken aber auch: $bc \,.\, fg$)

also
$$\text{Kreis(länge) durch } b : \text{Kreis(länge) durch } f = bc : fg.$$

alternando:
$$\text{Kreis durch } b : bc = \text{Kreis durch } f : fg,$$

nach Voraussetzung ist aber Kreis durch $b = bc$, also mufs Kreis durch f auch $= fg$ sein.

Auf den letzten Seiten (S. 311—323) des ganzen Werkes wird die

Inhaltsberechnung in der herkömmlichen Weise gelehrt („*Methode commune*"). Wir finden die bekannten Sätze über den Inhalt der Parallelogramme, Dreiecke und ähnlichen Figuren. Z. B. ähnliche Figuren verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate homologer Seiten. Wir heben die Verallgemeinerung des pythagoräischen Satzes (*proposition des quarrez*) hervor. Konstruiert man über den Katheten und der Hypotenuse ähnliche Figuren, so ist die Summe der ersteren gleich dem Inhalte der Figur über der Hypotenuse. Der Inhalt einer regulären Figur ist dem Rechteck aus dem halben Perimeter und dem Radius des eingeschriebenen Kreises (*raion droit*) gleich. Die Quadratur des Kreises wird nach Archimeds Verfahren mit Hilfe der ein- und umgeschriebenen regulären Polygone nochmals entwickelt.

Reguläre Figuren derselben Art verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen Kreise. Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Ähnliche eingeschriebene Figuren verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Quadrate der Kreisradien.

Den Schlufs macht die Verwandlung einer Figur von n Ecken in eine inhaltsgleiche von $n - 1$ Ecken.

Am Schlufs des ganzen Werkes heifst es: „*Outre que n'ayant entrepris ces Elemens que pour donner un essay de la vraie methode qui doit traitter les choses simples avant les composées et les generales avant les particulieres, je pense avoir satisfait à ce dessin et avoir montré que les Geometres ont eu tort d'avoir negligé cet ordre de la nature en s'imaginant qu'ils n'avoient autre chose à observer, sinon que les propositions precedentes servissent à la preuve des suivantes; au lieu qu'il est clair, ce me semble par cet essay que les Elemens de Geometrie estant reduits selon l'ordre naturel, peuvent etre aussy solidement demonstrez et sont sans comparaison plus aisez à concevoir et à retenir.*"

Diese zuversichtlichen Worte konnte nur der sprechen, dem ein Pascal rückhaltslose Bewunderung gezollt hatte.

Die Quadrati magico-magici angeregt durch Pascal.

Mit der *Geometrie* Arnaulds vereinigt erschien eine Abhandlung über magische Quadrate. Wir geben hier zunächst einen kurzen Rückblick über die Geschichte dieses zahlentheoretischen Problems.

Ein magisches Quadrat heifst eine Anordnung von n^2 Zahlen einer arithmetischen Progression in die n^2 Zellen eines Quadrats derart, dafs die Summe jeder Zeile, jeder Kolonne, sowie jeder der Diagonalen ein und dieselbe konstante Gröfse ist.

Die magischen Quadrate sollen ihren Ursprung in Indien besitzen. Sicher ist, dafs das erste im Abendland auftretende magische Quadrat sich auf dem *„Melencolia“* genannten Kupferstich Albrecht Dürers befindet. Es bildet hier ein Symbol der grübelnden Vernunft, speziell auch der Wissenschaft der Zahl. Jener Kupferstich wird nach Angabe des bekannten Kunstschriftstellers Nagler in das Jahr 1514 verlegt. In den nächsten Jahrzehnten bedienten sich Männer wie Agrippa von Nettesheim und Theophrastus Paracelsus von Hohenheim der magischen Quadrate zu astrologischen und medizinisch-mystischen Zwecken auf Amuletten und sorgten so zur Verbreitung der Kenntnis dieser Gebilde. Das mathematische Interesse daran tritt uns bei Adam Riese und in Michael Stiefels 1544 erschienener *„Arithmetica integra“* entgegen. Auf letzteren Schriftsteller werden wir noch zurückkommen. In Deutschland sind von bekannteren Namen der Mathematiker, die sich mit dem Gegenstande beschäftigten, noch Dan. Schwenter in seinen *„Deliciae physico-mathematicae“* Nürnberg 1626 und Johann Faulhaber zu nennen. In Frankreich wandte *„der grofse Reformator der unbestimmten Analytik“*, Gaspard Bachet de Méziriac den magischen Quadraten sein Interesse zu. In seinen *„Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres“* á Lyon MDCXXIV lehrte er eine von ihm geschaffene bezw. erweiterte Methode zur praktischen Konstruktion magischer Quadrate, welche in der Litteratur unter der Bezeichnung *„Terrassenmethode“* bekannt ist.

Wir sind in dieser kurzen Skizze der Darstellung gefolgt, welche Siegmund Günther in seinem Aufsatze *„Historische Studien über die magischen Quadrate“* Kap. IV seiner *„Vermischten Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften“* gegeben hat. Dieser Aufsatz ist grundlegend geworden und an ihn werden wohl immer Untersuchungen und gerade historische Erörterungen über magische Quadrate anzuknüpfen haben.

Nach der Würdigung von Bachets Verdiensten fährt Günther fort:

„An Bachet scheint sich auch Arnauld in seiner Geometrie angelehnt zu haben; sicherlich ist er nicht weit über sein Vorbild hinausgegangen. Wegen Mangels der Quelle können wir jedoch den eigentlichen Wert seiner Bemühungen nicht übersehen.“

Günther hat also Arnaulds Arbeit nicht vor sich gehabt. Daraus wird es erklärlich, wenn die wahre Sachlage sich im Widerspruch zu Günthers Bemerkung befindet; daher wird es erklärlich, wenn Günther in einer Fufsnote beifügt: *„Arnaud, Nouveaux élémens de géométrie, Paris MDCCLXVII“*, während wir früher in unserer Bibliographie von Arnaulds *Géométrie* sahen, dafs wohl 1667 die editio princeps, weitere Ausgaben 1683, 1680 und 1711 erschienen, dagegen 1767 keine; die zuletzt er-

schienene in den gesammelten Werken ist von 1783. Die Erwähnung von Arnaulds Arbeit über magische Quadrate bei Günther ist die einzige, welche sich in der modernen Litteratur findet, und dies veranlaſst uns, da auch in Frankreich in den letzten Jahrzehnten das Interesse für magische Quadrate sich wieder neu belebt zu haben scheint, hier in einem Abdruck nebst Übersetzung die Methode unseres Autors weiteren Kreisen zugänglich zu machen.

Rechtfertigt schon die Seltenheit und schwere Zugänglichkeit des Originals diesen Plan, so läſst eine interessante Bemerkung, welche wir beim Studium des Verhältnisses von Arnauld zu Pascal machten, die Herausgabe sogar zum dringenden Wunsche werden.

In Pascals *Gesammelten Werken* (Paris 1880 bei Hachette) findet sich Bd. III S. 219 in jenem Programme, welches Pascal 1654 der entstehenden Pariser Akademie über seine mathematischen Arbeiten vorlegte, folgende Stelle:

„Deinceps autem, si juvat Deus, prodibunt et alii tractatus quos omnino paratos habemus, et quorum sequuntur tituli: De numeris magico magicis; seu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato numero contentos, ita ut non solum quadratus totus sit magicus; sed quod difficilius sane est, ut ablatis singulis ambitibus reliquum semper magicum remaneat, idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso.[1])

Diese bisher nicht beachtete Stelle ist ein neuer Beweis des Zusammenarbeitens von Pascal und Arnauld auf mathematischem Gebiete; denn will man nicht geradezu annehmen, in der in Rede stehenden Arbeit Pascals verlorenen Traktat vor sich zu haben, so kann man nur an eine Parallelarbeit Arnaulds denken, welche wieder durch Pascal angeregt war. Sind durch Edmund Lucas' Aufsatz im *Journal de mathem. élém.* 1887 *„Les carrés magiques de Fermat"* die Arbeiten Fermats auf diesem Gebiete aufgehellt worden, so hoffen wir durch unsere Publikation das Bild der Leistungen des französischen Dreigestirns Fermat—Pascal—Arnauld über magische Quadrate zu vervollständigen.

---

1) In dem *Privilege du Roy*, welches nur die erste Ausgabe von 1667 enthält, finden sich an Stelle des Autors die Initialen *par M. D. M. G. B.* Sollten sie sich auf Pascals Anteil an den magischen Quadraten beziehen und etwa zu deuten sein: *par M. de Montalte, Géomètre béni, brillant,* oder dergleichen? Herr Paul Tannery, einer der besten Kenner der Geschichte des XVII. Jahrh., ist der Ansicht, daſs jene Initialen nur die Mittelspersonen bedeuten, welche das Privilege auswirkten. Wir haben also etwa an den Freund und Bekannten Pascals: M. de Montigny, Gentilhomme Bretonnois, zu denken.

SOLVTION
D'UN DES PLUS CELEBRES
ET DES PLUS DIFFICILES
PROBLEMES
D'ARITHMETIQUE,
APPELLE' COMMUNEMENT
LES QVARREZ
MAGIQUES.

Solution d'un des plus celebres et des plus difficiles Problemes d'Arithmetique, appellé communement Les Quarrez magiques.

§ 1. Ce que c'est que ce probleme.

I. Ayant un quarré de cellules pair ou impair. Et l'ayant remply de chiffres ou selon l'ordre naturel des nombres 1 . 2 . 3 . 4 *etc. Ou de quelqu'autre progression arithmetique que ce soit, comme* 2 . 5 . 8 . 11 . 14 *etc.*

Disposer tous ces chiffres dans un autre quarré de cellules sèmblables à celuy là, en sorte que tous les chiffres de chaque bande soit de gauche à droit, soit de haut en bas, soit mesme les deux diagonales, fassent toujours la mesme somme.

Soient pris pour exemples les quarrez d'onze pour les impairs et de douze pour les pairs, comme on les peut voir dans les figures qui sont à la fin de ce Traitté.

§ 2. Considerations sur les Quarrez naturels.

II. J'appelle quarrez naturels ceux où les chiffres sont disposez en progression arithmetique en commençant par les plus petits.

Sur les Quarrez impairs.

III. Dans le milieu du quarré impair il y a une cellule qui en est le centre. Le chiffre qui est dans cette cellule soit nommé centre et marqué par c.

IV. De tous les autres chiffres la moitié sont plus petits et les autres plus grands que le centre. Les uns soient appellez simplement petits et les autres grands.

V. Les cellules autour du centre soient appellées 1re enceinte.
Autour de la premiere enceinte, *2e enceinte.*
Autour de la seconde enceinte, *3e enceinte.*
Et ainsy de suite.

VI. Les enceintes 1 · 3 · 5 · 7 · 9 *etc. soient appellées enceintes impaires.*

Les 2 · 4 · 6 · 8 · 10 *etc. enceintes paires.*

VII. Il est important de considerer dans chaque enceinte où sont les petits chiffres, et où sont les grands. Les petits sont premierement dans toute la bande d'enhaut, qui est de 3 dans la 1re enceinte, de 5 dans la 2e, de 7 dans la 3e etc.

Secondement dans la bande à gauche les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre inclusive.

Troisiêmement dans la bande à droit les plus hauts jusques à celuy qui est vis à vis le centre exclusive.

Sur les Quarrez pairs.

VIII. Il n'y a point de cellule qui soit au centre. Mais on doit prendre pour centre la moitié de la somme que font le premier et le dernier chiffre.

Et cette somme entiere s'appellera 2*c.*

IX. La moitié des bandes, sçavoir celles qui sont les plus hautes contiennent les petits chiffres, et les plus basses les grands.

X. Les quatre cellules du milieu font la 1re enceinte.
Les cellules autour de ces quatre, la 2e enceinte.
Celles autour de la seconde, la 3e enceinte.
Et ainsy de suitte.

XI. Les enceintes 1 · 3 · 5 · 7 · 9 *etc. soient aussy appellées les enceintes impaires.*

Et les 2 · 4 · 6 *etc. les paires.*

XII. Les petits chiffres sont,

1. *Dans la bande d'enhaut de chaque enceinte.*
2. *Au costé gauche depuis la bande d'enhaut jusqu'à la bande où commencent les grands chiffres.*
3. *Et de même au costé droit.*

§ 3. Preparation.

XIII. Le plus grand mystere de la solution de ce Probleme consiste à marquer par lettres quelques uns des petits chiffres de chaque bande.

Quarrez impairs.

XIV. Dans toutes les enceintes generalement marquer le coin à gauche de la bande d'enhaut par *e.*
Le coin à droit de la même bande par *o.*
Le milieu de cette bande par *m.*
La cellule à gauche qui est vis à vis le centre par α.

XV. Marquer de plus dans les enceintes paires

Deux cellules dans la bande d'enhaut également distantes, l'une d'e, l'autre d'o, par les mêmes lettres accentüées.
L'une par *è.*
L'autre par *ò.*
Et la cellule à gauche au dessous d'e par ω.
Et au costé droit celle qui est au dessus de la cellule qui est vis à vis le centre par β.

Dans les Quarrez pairs.

XVI. Ne rien marquer dans les premieres et secondes enceintes.

XVII. Dans toutes les autres generalement marquer

Le coin à gauche d'enhaut par e.

A droit par o.

Le plus bas des petits nombres à droit par α.

Les plus bas des petits nombres à gauche par β.

XVIII. Marquer de plus dans les enceintes impaires à commencer par la 3[e] (qui est celle qui a 6 cellules dans la bande d'enhaut)

4 cellules dans la bande d'enhaut, deux par $\left\{\begin{array}{l}\acute{e}.\\ \acute{o}.\end{array}\right.$

et deux par $\left\{\begin{array}{l}\hat{e}.\\ \hat{o}.\end{array}\right.$

selon ce qui a esté dit supra 15.

A gauche marquer la cellule au dessous d'e par ω.

Et à droit celle au dessus d'α par γ.

§. 4. Maximes pour la demonstration de l'operation.

XIX. Deux chiffres, l'un petit, l'autre grand, également distans du centre, et qui se joignent par une ligne passant par le centre font une somme égale à deux fois le centre.

XX. Quand un petit chiffre est marqué par une lettre, son grand soit nommé (quand on le voudra exprimer) par la majuscule de la même lettre, quoiqu'elle ne soit pas marquée.

Ainsy $e \cdot E$ *font deux fois le centre.*

Et de même $\alpha . A$, *ou* $\beta . B$ *ou* $o \cdot O$.

Seconde Maxime.

XXI. Quatre chiffres dans la même bande, dont le premier est autant distant du 2, que le 3 du 4 sont en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

Exemples.

XXII. $e \cdot \grave{e} :: \grave{o} \cdot o.$ *Donc* $e \cdot o = \grave{e} \cdot \grave{o}$.

D'où il s'ensuit que par tout où sont ensemble $\grave{e} \cdot \grave{o}$, *ou bien* $\hat{e} \cdot \hat{o}$, *ou leurs majuscules* $\grave{E}\ \grave{O}$, *on peut supposer, lorsqu'il s'agit de trouver des égalitez avec d'autres chiffres, que c'est comme si c'estoit* $e \cdot o$, $E \cdot O$, *parceque si l'égalité s'y trouve en supposant que c'est* $e . o$, *elle ne sera pas troublée en remettant* $\grave{e} \cdot \grave{o}$, *en leur place, qui valent autant que* $e \cdot o$.

XXIII. $e \cdot m :: m \cdot o.$ *Donc* $e \cdot o = m \cdot m$.

Dans les Quarrez pairs.

XXIV. $e \cdot \omega :: \beta \cdot A.$ *Donc* $e \cdot A = \omega \cdot \beta$.

Pour trouver A. voyez supra 20.

Troisieme. Maxime.

XXV. Lorsque 4 cellules font un parallelogramme, rectangle ou non rectangle, leurs 4 chiffres sont en proportion arithmetique. Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme de ceux du milieu.

Exemples.

Dans les Quarrez impairs.

XXVI.	$e \cdot m :: \alpha \cdot c.$	*Donc* $e \cdot c = m \cdot \alpha.$
XXVII.	$m \cdot o :: \alpha \cdot c.$	*Donc* $m \cdot c = o \cdot \alpha.$
XXVIII.	$\omega \cdot m :: c \cdot \beta.$	*Donc* $\omega \cdot \beta = m \cdot c.$

Dans les pairs.

XXIX.	$e \cdot o :: \beta \cdot \alpha.$	*Donc* $e \cdot \alpha = o \cdot \beta.$
XXX.	$\omega \cdot \beta :: o \cdot \gamma.$	*Donc* $\omega \cdot \gamma = \beta \cdot o.$

§ 5. Methode pour disposer magiquement le Quarré naturel.

XXXI. Cette methode consiste en fort peu de regles; les unes generales, les autres particulieres, selon lesquelles il faut transposer les chiffres du quarré naturel dans le magique.

Premiere regle generale.

XXXII. Il faut disposer les chiffres par enceintes, ceux d'une enceinte en l'enceinte semblable, et tout le soin qu'on doit avoir d'abord, est de sçavoir où l'on doit mettre les petits nombres de l'enceinte, parceque la situation des petits donne celle des grands selon les deux regles suivantes.

Seconde regle generale.

XXXIII. Quand on a placé un petit chiffre dans un coin, il faut placer son grand dans le coin diagonalement opposé. Ainsi α estant placé dans le coin gauche de la bande d'enhaut, il faudra mettre A dans le coin droit de la bande d'embas.

Troisieme regle generale.

XXXIV. Hors les coins il faut placer les grands vis à vis des petits de la bande opposée.

C'est pourquoy il faut observer de ne mettre jamais deux petits en des bandes opposées vis à vis l'un de l'autre.

Corollaire de ces regles.

Les chiffres estant disposez selon ces regles,

XXXV. Il s'ensuit 1. Que les chiffres de deux bandes opposées pris ensemble, valent autant de fois c qu'il y a de chiffres dans les deux bandes.

Car un petit et un grand valent deux fois c. Or il y a autant de petits, que de grands. Donc

XXXVI. Il s'ensuit 2. Que lorsqu'on a prouvé que les chiffres d'une bande après cette disposition valent autant de fois le centre qu'il y a de chiffres, cette bande est égale à son opposée.

XXXVII. Il s'ensuit 3. Que quand il y a autant de petits chiffres dans une bande que dans l'opposée, et que la somme des uns est égale à la somme des autres, c'est une marque assurée que la bande est égale à la bande.

La preuve en est facile sans que je m'arreste à l'expliquer.

Quatrieme regle generale.

XXXVIII. Il ne faut se mettre en peine d'abord que de placer les petits chiffres qui sont marquez par des lettres: car cela fait, le reste se trouve sans peine par cette raison.

Dans la bande d'enhaut, dans quelques quarrez et quelques enceintes que ce soit, outre les cellules marquées par des lettres:

Ou il ne reste rien,

Ou il reste toûjours des cellules non marquées en nombre pairement pair; c'est à dire 4 · 8 · 12 · 16 *etc.*

Et de plus, ils sont toûjours 4 *à* 4 *en proportion arithmetique.*

Donc prenant les extrêmes et les mettant dans une bande, et ceux du milieu dans l'opposée, ils ne troubleront point l'égalité qui y estoit déjà par les chiffres marquez de lettres.

XXXIX. Il en est de même des deux costez droit et gauche. Car les petits chiffres qui restent (s'il en reste outre les marquez) sont toûjours en nombre pairement pair 4 · 8 · 12 · 16 *etc. et de* 4 *en* 4 *en proportion arithmetique.*

Donc comme cy dessus.

Il n'y a donc plus à se mettre en peine que de disposer les lettres. Ce qui se fait par les regles particulieres.

§ 6. Regles Particulieres pour les Quarrez impairs.

XL. Il y a deux regles pour ces quarrez, l'une pour les enceintes impaires, et l'autre pour les paires.

α m o e

Fig. 32.

Pour les enceintes impaires.

Au coin gauche de la bande d'enhaut mettre	α
Au coin droit de la même bande,	m
A la bande d'embas en quelque cellule hors les coins,	e
A la bande de costé du costé d'α.	o

Demonstration.

XLI. Il est requis premierement à demonstrer que dans la bande d'enhaut $\alpha \cdot E \cdot m$ *valent trois fois le centre. D'où il s'ensuivra qu'elle sera égale à la bande d'embas par 36.*

Or par (26) $e \cdot c = \alpha \cdot m$

Donc $e \cdot c \cdot E = \alpha \cdot E \cdot m$

Or $e \cdot c \cdot E = 3c$ *par 20.*

Donc $\alpha \cdot E \cdot m = 3c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

Fig. 33.

XLII. Requis secondement à demonstrer que $\alpha \cdot o \cdot M$ *valent* $3c$. *D'où il s'ensuivra que cette bande sera égale à l'opposée par 36.*

Or par (27) $\alpha \cdot o = m \,.\, c.$

Donc $m \cdot c \cdot M = \alpha \cdot o \,.\, M.$

Or $m \cdot c \cdot M = 3c$ *par 20.*

Donc $\alpha \cdot o \cdot M = 3c.$

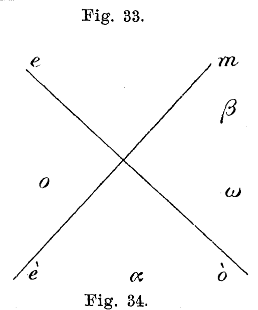


Fig. 34.

Pour les enceintes paires.

XLIII. Il suffira de les figurer tout d'un coup.

Demonstration.

XLIV. Requis premièrement à demonstrer que la bande d'embas $M \cdot \grave{e} \cdot \alpha \cdot \grave{o} \cdot E = 5c$. *C'est à dire qu'elle vaut ensemble cinq fois le centre.*

Ce qui se prouve ainsy

Par (27) $\alpha \cdot o = m \cdot c.$

Donc $e \cdot \alpha \cdot o = e \cdot m \cdot c.$

Donc $e \cdot m \cdot c \cdot M \cdot E = \grave{e} \cdot \alpha \cdot \grave{o} \cdot M \cdot E$ *par (22)*

Or $e \cdot m \cdot c \cdot M \cdot E = 5c$ *par 20*

Donc $M \cdot \grave{e} \cdot \alpha \cdot \grave{o} \cdot E = 5c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

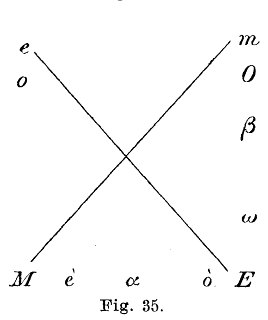


Fig. 35.

XLV. Requis secondement à demonstrer que dans la bande droitte $m \cdot O \cdot \beta \cdot \omega \cdot E = 5c$. *Ce qui se prouve ainsy:* $e \cdot o = m \cdot m$ *par (23)*

Donc $e \cdot o \cdot c = m \cdot m \cdot c.$

Or $m \cdot m \cdot c = m \cdot \omega \cdot \beta.$

Parceque $m \cdot c = \omega \cdot \beta$ *par 28.*

Donc $e \cdot o \cdot c = m \cdot \omega \cdot \beta.$

Donc $e \cdot o \cdot c \cdot E \cdot O = m \cdot \omega \cdot \beta \cdot E \cdot O.$

Or $e \cdot o \cdot c \cdot E \cdot O = 5c$ *par 20.*

Donc $m \cdot O \cdot \omega \cdot \beta \cdot E = 5c.$

Ce qu'il falloit demonstrer.

§ 7. Pour les Quarrez pairs.

XLVI. On laisse à part les deux premieres enceintes, qui ont leur regle particuliere.

Pour les autres enceintes impaires.

XLVII. La disposition s'en figure ainsy.

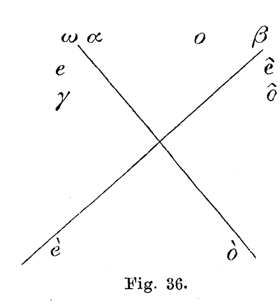


Fig. 36.

Demonstration.

XLVIII. Requis 1. à demonstrer que les six chiffres de la bande d'enhaut dont quatre sont petits, et deux grands qui viennent de è et ò qu'on a mis embas, valent six fois le centre. Ce qui se prouve ainsy.

$\alpha \cdot A \cdot o \cdot O \cdot e \cdot E = 6c$ *par (20)*

Or ces six lettres sont égales aux six

$\omega \cdot E \cdot \alpha \cdot o \cdot O \quad \beta.$

Car ostant les mêmes qui se trouvent de part et d'autre, sçavoir $\alpha \cdot o \cdot O \cdot E$ *il ne restera d'un costé que* $A \cdot e$ *et de l'autre que* $\omega \cdot \beta$.

Or par (24) $A \cdot e = \omega \cdot \beta$.

Donc les six lettres $\omega \cdot E \cdot \alpha \cdot o \cdot O \cdot \beta = 6c$.

Fig. 37.

XLIX. Requis 2. à demonstrer que

$\omega \cdot e \cdot \gamma = \beta \cdot \hat{e} \cdot \hat{o}.$

Car si cela est, les grandes seront aussy égales aux grandes, et le tout au tout par (37).

Supposant donc que $\hat{e} \cdot \hat{o}$ *soient* $e \cdot o$ *(supra 22) et ostant e et e de part et d'autre, reste d'une part* $\omega \cdot \gamma$ *et de l'autre* $\beta \cdot o$ *qui font des sommes égales par (30).*

Donc $\omega \cdot e \cdot \gamma = \beta \,.\, \hat{e} \,.\, \hat{o}$.

Donc la bande égale à la bande par (37).

Pour les enceintes paires.

L. La disposition en est tres facile, et se figure ainsy.

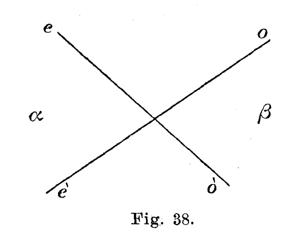


Fig. 38.

Demonstration.

LI. Elle est si facile par 22, 29 et 37 que je ne m'amuse pas à l'expliquer.

Cette enceinte se peut encore faire en transposant les coins etc.

§ 8. Regle particuliere pour la premiere et seconde enceinte des Quarrez pairs.

LII. Ces deux enceintes ne sont autre chose que le quarré de 4 qui fait 16, dans lequel il y a deux sortes de bandes.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Quatre qui font la seconde enceinte, et qu'on peut appeller les bandes exterieures. Et quatre autres qui coupent le quarré, et qu'on peut appeller transversales: sçavoir la 2e et la 3e de haut en bas.

Et la 2e et la 3e de gauche à droit.

LIII. Ce qui est cause que ces deux enceintes ne se peuvent pas disposer par les regles des autres, c'est que les 4 chiffres du milieu faisant en divers sens quatre bandes de deux chacune en ligne droitte, et deux en diagonale, les bandes droittes ne sçauroient faire des sommes égales, mais seulement les diagonales.

LIV. Or ces 16 chiffres se pouvant disposer en tant de manieres que cela est presque incroyable; sçavoir en plus de 20 millions de millions.

20 : 922 : 789 : 872 : 000.

Il n'y en a proprement que 16 qui soient magiques, c'est à dire où toutes les bandes fassent des sommes égales (car je ne compte pas pour differentes dispositions celles qui ne viennent que de la differente situation du même quarré).

Et voicy comme on les trouve.

LV. Il faut prendre toujours les chiffres 4 à 4 en cet ordre.

1. *Les quatre du dedans ou interieurs.*
2. *Les quatre coins exterieurs.*
3. *Les deux du milieu de la bande d'enhaut, avec les deux du milieu de celle d'embas.*
4. *Les deux du milieu de la bande à gauche, avec les deux du milieu de celle à droit.*

Or chacun de ces chiffres pris ainsy 4 à 4 (et qu'on nommera dans la suite par $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$*) peuvent.*

Ou estre laissez en leur même place, ce qui se marquera par *o.*
Ou estre transportez en croix S. André, ce qui se marquera par *c.*
Ou directement de gauche à droit; ce qui se marquera par *g.*
Ou directement de haut en bas; ce qui se marquera par *h.*

LVI. Suivant ces remarques, et se souvenant de ce que signifient les 4 nombres $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$ *et les 4 lettres* $(o \cdot c \cdot g \cdot h)$ *les deux tables suivantes feront trouver sans peine les 16 dispositions magiques du quarré de 4: ou ce qui est la même chose des deux premieres enceintes de tous les quarrez pairs.*

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*	*X*	*XI*	*XII*	*XIII*	*XIV*	*XV*	*XVI*
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

LVII. De ces 16 dispositions magiques du quarré de 4. il y en a deux, sçavoir la 1e et la 6e, où on ne change que 8 chiffres.

Deux, sçavoir la 11e et la 16e, où on les change tous 16.

Et 12 où on en change 12.

LVIII. Voicy un exemple de la 6e disposition, et un autre de la 16e. On laisse à trouver les autres.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

13	3	2	16
8	10	11	5
12	6	7	9
1	15	14	4

Demonstration.

LIX. Chaque bande tant exterieure que transversale du quarré de quatre (ou du quarré composé des 2 premieres enceintes de tous les quarrez pairs) est de 4 chiffres en proportion arithmetique.

Et par consequent la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Soit donc par exemple, la somme des extrêmes de la bande d'enhaut appellée b, la somme des moyens qui luy est égale pourra estre aussy appellée b, et ainsy tout la bande sera $b + b$.

Et par la même raison la bande d'embas pourra estre $f + f$.

Cela estant on peut faire ces bandes égales par deux voies.

La 1re en transposant les extrêmes de l'une à l'autre sans changer les moyens. Car alors l'une deviendra $f + b$.

Et l'autre $b + f$ *et ainsy seront égales.*

La 2e en transposant les moyens sans changer les extrêmes. Car alors l'une deviendra $b + f$ *et l'autre* $f + b$ *et ainsy seront encore égales.*

Il ne faut qu'appliquer cecy a chacune de ces 16 dispositions, et l'on verra que les transpositions que l'on y fait les doivent rendre magiques.

§. 9. Divers Moyens de varier les Quarrez magiques.

De ces moyens j'omets ceux qui sont trop faciles à trouver et je n'en marqueray que deux qui sont plus importans, et qu'on a pratiquez dans les deux exemples qu'on a donnez de quarrez magiques.

Premier Moyen.

LX. Nous avons supposé qu'on transporteroit les chiffres de la premiere enceinte du quarré naturel dans la 1re enceinte du quarré magique; et ceux de la 2e dans la 2e, et de la 3e dans la 3e etc. Mais cela n'est pas necessaire. Car pour les chiffres marquez de lettres, il suffit de ne les transporter que d'une enceinte impaire à une autre quelconque qui soit impaire, comme de la 5e à la 1re; et d'une enceinte paire à une paire, comme de la 6e à la 4e.

Second Moyen.

LXI. Et pour tous les autres chiffres non marquez de lettres, on les peut transporter de quelque enceinte que ce soit à quelque autre enceinte que l'on voudra; pourvu qu'on en prenne quatre ensemble qui soient en proportion arithmetique, et qu'on ait soin de mettre les extrêmes dans une bande, et les moyens dans la bande opposée.

Conclusion.

LXII. Je pense pouvoir conclure de tout cecy, qu'il n'est pas possible de trouver une methode plus facile, plus abregée et plus parfaitte pour faire les quarrez magiques, qui est un des plus beaux Problemes d'Arithmetique.

Ce qu'elle a de singulier, c'est

1. qu'on n'écrit les chiffres que deux fois.

2. Qu'on ne tâtonne point, mais qu'on est toujours assuré de ce que l'on fait.

3. Que les plus grands quarrez ne sont pas plus difficiles à faire que les plus petits.

4. Qu'on les varie autant que l'on veut.

5. Qu'on ne fait rien dont on n'ait demonstration.

6. A quoy on peut ajoûter, que cette methode est si generale que sans y rien changer on pourroit resoudre sans aucune peine par la même voie cet autre Problême qui paroist encore plus merveilleux.

Ayant mis dans un quarré naturel tous les nombres que l'on voudra en progression geometrique, comme $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$ *etc. les disposer de telle sorte dans un quarré semblable, que tous les nombres de chaque bande multipliez les uns par les autres fassent une somme égale à celle que font les nombres de tout autre bande multipliez aussy les uns par les autres. En voicy un exemple dans le quarré de trois.*

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Fin de l'explication des Quarrez magiques.

QVARRÉ NATVREL DE XI.

1 $_{e}$	2	3	4	5	6 $_{m}$	7	8	9	10	11 $_{o}$
12	13 $_{e}$	14 $_{e}$	15	16	17 $_{m}$	18	19	20 $_{ò}$	21 $_{o}$	22
23	24 $_{\omega}$	25 $_{e}$	26	27	28 $_{m}$	29	30	31 $_{o}$	32	33
34	35	36	37 $_{e}$	38 $_{è}$	39 $_{m}$	40 $_{ò}$	41 $_{o}$	42	43	44
45	46	47	48 $_{\omega}$	49 $_{e}$	50 $_{m}$	51 $_{o}$	52 $_{\beta}$	53	54 $_{\beta}$	55
56 $_{\alpha}$	57 $_{\alpha}$	58 $_{\alpha}$	59 $_{\alpha}$	60 $_{\alpha}$	61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

QVARRÉ MAGIQVE DE XI.

58	26	30	95	93	97	47	42	86	69	28
35	37	12	45	84	63	82	99	88	39	87
43	100	60	119	118	73	5	2	50	22	79
90	67	7	13	102	65	108	17	115	55	32
76	74	10	98	56	121	6	24	112	48	46
31	41	51	21	11	61	111	101	71	81	91
107	70	114	68	116	1	66	54	8	52	15
103	33	113	105	20	57	14	109	9	89	19
18	44	72	3	4	49	117	120	62	78	104
16	83	110	77	38	59	40	23	34	85	106
94	96	92	27	29	25	75	80	36	53	64

QVARRÉ NATVREL DE XII.

e 1	è 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ò	12 o
13	e 14	è 15	ê 16	17	18	19	20	21 ô	22 ò	23 o	24
25	ω 26	e 27	è 28	29	30	31	32	33 ò	34 o	35	36
37	38	39	e 40	è 41	ê 42	43 ô	44 ò	45 o	46	47	48
49	50	51	ω 52	53	54	55	56	57 γ	58	59 γ	60
β 61	β 62	β 63	β 64	65	66	67	68	69 α	70 α	71 α	72 α
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

QVARRÉ MAGIQVE DE XII.

118	28	116	39	94	30	31	99	58	113	33	111
17	52	24	109	104	69	45	101	97	60	64	128
127	57	92	8	11	54	55	136	135	89	88	18
126	40	2	26	130	23	71	123	62	143	105	19
20	13	5	59	144	6	7	133	86	140	132	125
63	120	65	14	61	79	78	72	131	80	25	82
75	108	77	129	73	67	66	84	16	68	37	70
38	49	142	124	12	138	139	1	21	3	96	107
95	103	141	83	15	122	74	22	119	4	42	50
47	102	56	137	134	91	90	9	10	53	43	98
110	81	121	36	41	76	100	44	48	85	93	35
34	117	29	106	51	115	114	46	87	32	112	27

Diskussion von Arnaulds Methode zur Bildung der Quadrati magico-magici.

Der vorstehend gegebene Abdruck von Arnaulds Abhandlung zeigt, daſs Arnauld nicht wie Bachet einfach magische Quadrate bildet, sondern eben die, von denen Pascal an der zitierten Stelle spricht: magisch-magische. Jene Stelle aus Pascals Programm von 1654, das beiläufig bemerkt auch Leibniz handschriftlich vorgelegen hat, er schreibt darüber unterm 12. Juni 1675 an Oldenburg in jenem Briefe, welchen wir oben schon zu erwähnen hatten: *Repertum est inter scripta eius (Pascalii) quoddam dedicationis genus, quo opera sua Geometrica et Numerica Academiae nescio cui Parisinae (id est conventui Geometricarum privato, illo tempore celebri) inscribit, et scripta sua in eo genere absoluta aut affecta memorat, quod credo non illubenter leges, inde enim destinata viri liquidius disces. Mittam descriptum, si tibi non ingratum fore significabis. Mitterem statim si e vestigio describi posset),* zeigt zugleich, daſs Pascal derjenige ist, welchem diese Quadrate ihren Namen verdanken. Zur Bildung magisch-magischer Quadrate war 1544 schon Michael Stiefel gelangt, doch ist seine Methode vollständig verschieden von der Arnaulds. Neuere Schriftsteller, z. B. Ahrens in seinen *„Mathematischen Unterhaltungen und Spielen“,* Leipzig 1901, ein Buch, das diese Dinge wissenschaftlich beleuchtet, nennt Stiefels Methode durch Originalität ausgezeichnet. Natürlich konnte Stiefel seine Methode nur an einzelnen Zahlenbeispielen darlegen; in neuerer Zeit hat man in der allgemeinen Sprache der Buchstabenrechnung eine Darstellung gegeben (Fontès, *Assoc. franc. Congrès de Bordeaux* XXIV 1895 t. II pag. 248—256). Stiefel fand eine Methode, um den „Umlauf“ (bei Günther, *„ambitus“* bei Pascal, und *„enceinte“* bei Arnauld) eines magischen Quadrats *„independent“,* d. h. ohne Zuhilfenahme der übrigen zu bilden. Günther hat sich die Frage vorgelegt, wie ist wohl Stiefel zu seinem höchst komplizierten Bildungsgesetz gelangt, und findet im Verlaufe seiner Untersuchung, daſs Stiefels Verfahren, d. h. das von ihm gelehrte nicht das primäre ist, sondern daſs

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Stiefel von einer der Formen des magischen Quadrats von 3^2 ausging (s. nebenstehend); dann hieraus das fünfundzwanzigzellige ableitete, indem er jede Ziffer des obigen magischen Quadrats um 8 erhöhte, um die voraus berechnete Mittelzahl 13 zu erhalten; dann setzte er in die leeren Felder Zahlen, zuerst empirisch, die ihm ein neues magisches Quadrat ergaben, und fuhr in dieser Weise fort, bis sich ihm das solchergestalt unschwer zu erkennende Bildungsgesetz offenbarte (Günther). Für die eingehende Darstellung von Stiefels Methode können wir auf Fontès,

Günther und Ahrens verweisen. Wir wollten nur zeigen, dafs auch Arnauld diesen Ausgangspunkt, nämlich das magische Quadrat (s. nebenstehend) mit Stiefel gemein hat.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Dann aber entfernt sich seine Methode von der Stiefels vollständig und gelangt zu anderen Resultaten, wie wir im folgenden zeigen werden. In Arnaulds Darstellung zeigt sich so recht der feine geometrische Geist der Herren von Port royal, sie wäre eines Pascal würdig:

§ 1 giebt die genaue Definition des Problems, § 2 erörtert die Eigenschaften der natürlichen Quadrate. Es giebt in einem ungeraden natürlichen Quadrat eine Mittelzelle, die er Centrum (*centre*) nennt; dann wird festgesetzt, dafs der Umlauf um diese Mittelzelle erster Umlauf, der nächste Zellengürtel um den ersten zweiter Umlauf (*enceinte*), der nächste dritter Umlauf oder Gürtel genannt werden soll und so weiter.

Es wird sodann unzweideutig bestimmt, dafs der erste, dritte, fünfte Gürtel u. s. w. ungerade Gürtel genannt werden sollen (*enceintes impaires*).

Der zweite, vierte, sechste u. s. w. dagegen gerade Umläufe oder Gürtel (*enceintes paires*). Sodann wird genau die Stellung der Ziffern in jedem Gürtel, welche kleiner sind als das Centrum, angemerkt: mit solchen ist nämlich die obere Zeile, ferner die linke Kolonne bis mit der Zelle, welche mit der Mittelzelle in einer Zeile liegt, sowie die rechte Kolonne mit Ausschlufs der mit der Mittelzelle in einer Zeile liegenden (*cellule qui est vis à vis le centre*) erfüllt.

Auf die geraden Quadrate wird die Definition des Centrums (der Ziffer in der Mittelzelle bei den ungeraden) folgerichtig ausgedehnt. Die Bildung des Centrums geschah dort zu $(2n^2 + 2n + 1)$, d. h. es ist die Hälfte der Summe der ersten und der letzten Ziffer des natürlichen Quadrats. Heifst die letztere $(2n + 1)^2$, so ist das Centrum $= \frac{(4n^2 + 4n + 1) + 1}{2}$. Im geraden Quadrat giebt es keine Mittelzelle, also eigentlich auch kein Centrum, aber es soll als solches der analoge Ausdruck $\frac{4n^2 + 1}{2}$ gelten, wenn $4n^2$ die gerade Zellenzahl, d. h. die Ziffer der letzten Zelle ist.

Hier sollen die vier Zellen in der Mitte erster Gürtel, die um diese vier Zellen liegenden nächsten zwölf Zellen zweiter Umlauf oder Gürtel, die um den zweiten Gürtel in Zellenbreite ringsum liegenden Zellen dritter Gürtel heifsen u. s. f.

Die Gürtel 1, 3, 5, 7 u. s. w. sollen wie oben ungerade Gürtel, die Gürtel 2, 4, 6 u. s. w. gerade genannt werden. Hier erfüllen die Zellen, welche kleiner sind als das Centrum, die ganze obere Hälfte des natürlichen Quadrats.

§ 3 bringt eine Vorbereitung der Lösung der Aufgabe.

Arnauld enthüllt hier das Geheimnis seiner Methode; es besteht darin, gewisse Zellen, d. h. die sie enthaltenden Ziffern in jedem Gürtel durch Buchstaben zu kennzeichnen, und zwar solle:

In den Quadraten ungerader Zellenzahl, in den geraden sowohl als in den ungeraden Gürteln

die linke obere Eckzelle durch e
die rechte obere Eckzelle durch o
die mittlere Zelle der oberen Zeile durch m
die Zelle vis à vis der Mittelzelle (Centrum) (wir wissen bereits, was Arnauld unter vis à vis dem Centrum versteht) in der linken Kolonne jeden Gürtels durch α

überdies aber in den geraden Gürteln:

Zwei Zellen der oberen Zeile, welche gleichweit abstehen, die eine von *e*, die andere von *o*,

durch accentuierte Buchstaben

durch *è*
bezw. durch *ò*

ferner in denselben Gürteln noch weiter die Zelle der linken Kolonne, welche sich direkt unter *e* befindet durch ω

und die Zelle der rechten Kolonne, welche direkt über der vis à vis dem Centrum gelegenen sich befindet, durch β

bezeichnet werden.

Die Bezeichnung und Hervorhebung gewisser Zellen in den geraden Quadraten ist die folgende:

Im ersten und zweiten Gürtel wird überhaupt nichts bezeichnet.

In allen übrigen Gürteln (ob gerader oder ungerader Index)

die linke obere Eckzelle durch e
die entsprechende rechte durch o
die niedrigsten unter den Zahlen, welche kleiner als das Centrum sind, rechts vom Centrum durch α
dieselben Ziffern links vom Centrum durch β

Aufserdem sind vier Ziffern in der oberen Zeile dieser Quadrate, aber nur in den ungeraden Gürteln (also erstmals im dritten, welcher eine sechszellige Zeile oder Kolonne besitzt)

durch *é*
und *ó*
durch *ê*
und *ô*

herauszuheben.

Des weiteren wird die Zelle unter e
durch ω
die rechts über α
durch γ
bezeichnet.

§ 4. Grundsätze bei der Lösung.

1) *Die Summe zweier Ziffern im natürlichen Quadrat, welche auf einer durch das Centrum gehenden Geraden und gleichweit vom Centrum abliegen, ist gleich dem Doppelten des Centrums.*

Das so definierte Supplement einer durch einen Buchstaben charakterisierten Ziffer soll in der Folge immer durch den entsprechenden grofsen bezeichnet werden (*la majuscule de la même lettre*), also

$$e + E = 2c,$$

ebenso

$$\alpha + A = \beta + B = o + O = 2c.$$

2) *Im natürlichen Quadrat stehen vier Ziffern, deren erste ebensoweit entfernt liegt von der zweiten, wie die dritte von der vierten, die aber alle derselben Zeile bezw. Kolonne angehören, in arithmetischer Proportion.*

Also ist die Summe der äufseren der Summe der inneren Glieder gleich.

Z. B. ex definitione $e + o = \grave{e} + \grave{o}$.

(Arnauld schreibt $e \cdot o = \grave{e} \cdot \grave{o}$, versteht aber unsere obige Gleichheit darunter.)

Man kann also überall für $(\grave{e} + \grave{o})$, $(e + o)$, bezw. für $(\grave{E} + \grave{O})$, $(E + O)$ substituieren; speziell ist $e + o = m + m$.

3) *Wenn im natürlichen Quadrat vier Ziffern durch ihre Lage ein Parallelogramm oder speziell ein Rechteck bilden, so stehen die vier Ziffern in arithmetischer Proportion.* (Das heifst die Summen gegenüberliegender Ecken sind gleich.)

§ 5 entwickelt nun das Verfahren, um das natürliche Quadrat in das magisch-magische überzuführen; er enthält die vier allgemeinen Regeln, welche sowohl für gerade wie für ungerade Quadrate gelten.

1) Die Ziffern sind gürtelweise zu übertragen, d. h. die eines Gürtels von geradem bezw. ungeradem Index in einen ähnlichen, d. h. wieder in den entsprechenden geraden bezw. ungeraden.

Vorerst kommt nur die Stellung der kleinen Ziffern eines Gürtels in Betracht, d. h. derjenigen, welche kleiner sind als das Centrum; denn die Stellung einer kleinen Ziffer involviert das Placement ihrer Supplementziffer (oben definiert!) nach den beiden folgenden Regeln:

2) Hat man eine kleine Ziffer in eine Eckzelle postiert, so ist ihr Supplement in die diagonal gegenüberliegende Eckzelle zu stellen.

3) Abgesehen von den Eckzellen, wird jede Supplementziffer in die der zugehörigen kleinen Ziffer entsprechende Zelle der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne gestellt.

Zusatz: Wenn die Ziffern nach dieser Regel angeordnet sind, so läſst sich eine wichtige Folgerung ziehen.

a) Die Summe zweier gegenüberliegender Zeilen bezw. Kolonnen ergiebt soviel mal das Centrum als in beiden Zeilen bezw. Kolonnen Zellen vorhanden sind; denn die Summe einer kleinen Ziffer und ihres Supplements ergiebt $2c$ (zweimal das Centrum) und es sind ebensoviel Supplemente vorhanden wie kleine Ziffern, also z. B.

$$\alpha + A + e + E + \beta + B + \gamma + G + \zeta + Z = 10c$$

b) Hat man den Beweis erbracht, daſs die Summe einer Zeile oder Kolonne, die nach der dritten Regel mit Rücksicht auf die gegenüberliegende besetzt wurde, soviel mal das Centrum ergiebt, als Zellen vorhanden sind, so folgt daraus unmittelbar, daſs diese Summe der Summe in der gegenüberliegenden Zeile resp. Kolonne gleich ist.

Es sei
$$\alpha + E + \beta + G + \zeta + F = 6c$$
so wird, da
$$\underbrace{\alpha + A} + \underbrace{e + E} + \underbrace{\beta + B} + \underbrace{\gamma + G} + \underbrace{\zeta + Z} + \underbrace{f + F} = 12c$$
ist, auch
$$f + e + B + \gamma + Z + A = 6c$$
und also
$$\alpha + E + \beta + G + \zeta + F = f + e + B + \gamma + Z + A.$$

c) Wenn in einer Zeile oder Kolonne sich soviel kleine Ziffern befinden, wie in der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne, und noch die Summe der ersteren (der kleinen Ziffern) gleich ist der Summe der letzteren, so ist dies ein untrügliches Zeichen dafür, daſs die Gesamtsumme in jener Zeile bezw. Kolonne gleich ist der Gesamtsumme in der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne. Denn es besteht dann auch Gleichheit zwischen den beiden Summen der Supplemente.

Ist z. B.
$$\alpha + e + \zeta + \beta = S$$
und
$$\delta + \gamma + \varphi + \mu = S$$
so ist auch
$$A + E + Z + B = \varDelta + G + \varPhi + M$$
und da
$$\alpha + A + e + E + \zeta + Z + \beta + B = 8c = S + A + E + Z + B$$
und
$$\delta + \varDelta + \gamma + G + \varphi + \varPhi + \mu + M = 8c = S + \varDelta + G + \varPhi + M,$$
ist also die Gesamtsumme in beiden Zeilen gleich:

$\alpha + e + \zeta + \beta + \varDelta + G + \varPhi + M = \mu + E + Z + B + \delta + \gamma + \varphi + A.$
(Die Stellung der Supplemente der Eckzellen ist nach der zweiten Regel Arnaulds bei der Anordnung der Summanden mit berücksichtigt.)

Vierte allgemeine Regel: Zuerst hat man nur die kleinen durch Buchstaben hervorgehobenen Ziffern des natürlichen Quadrats richtig in den Feldern des magischen zu placieren, denn alles andere ergiebt sich durch folgende Überlegungen. Aufser den durch Buchstaben charakterisierten Ziffern bleibt in einer Zeile oder Kolonne irgend eines Gürtels eines sei es geraden, sei es ungeraden Quadrats, entweder gar keine Ziffer übrig oder es bleiben Ziffern verfügbar in einer durch 4 teilbaren Zahl, also 4, 8, 12, 16 u. s. w.

Diese verfügbar bleibenden Ziffern des natürlichen Quadrats in einer Zeile oder Kolonne — betrachten wir speziell die obere Zeile eines Gürtels, welche ex def. nur kleine Ziffern enthält (d. h. solche, welche kleiner sind als das Centrum) — stehen zu vier und vier in arithmetischer Proportion. Wenn man also die äufseren Glieder einer solchen nimmt und sie in eine Zeile stellt, die inneren Glieder der Proportion aber immer in die gegenüberliegende, wobei jedoch stets die Zellen für die Supplemente nach der zweiten Regel verfügbar bleiben müssen für diese Supplemente, so werden diese Paare äufserer und innerer Glieder der Proportion nicht störend auf die schon vorhandene Gleichheit der Summen in den beiden gegenüberliegenden Zeilen einwirken.

Bezüglich der Kolonnen ist es ebenso. Denn die kleinen Ziffern im oberen Teile eines Gürtels des natürlichen Quadrats, welche, nicht charakterisiert, übrig bleiben, stehen in den beiden gegenüberliegenden Kolonnen nach dem dritten Grundsatz, weil sie Rechtecke bilden, zu vier und vier in arithmetischer Proportion. Für die Übertragung in das magische Quadrat hat man also dieselbe Überlegung wie für die Zeilen. Man hat also nur die Übertragung der charakterisierten Ziffern zu kennen und diese wird im folgenden Paragraphen in speziellen Regeln gelehrt.

§ 6. Wir wollen hier nicht die eleganten Beweise Arnaulds, welche auf analysis situs gegründet sind, wiederholen, sondern verweisen auf den französischen Text. Die Versetzungen selbst ergeben sich aus den beiden nachstehenden Figuren (s. S. 323).

Die Beweise Arnaulds wollen wir vielmehr in allgemeine Zeichen übersetzen, indem wir die Ziffern mit Hilfe des Centrums und dem Index, d. h. der Ordnungszahl k des von innen nach aufsen im Einklang mit Arnaulds Definition gezählten Gürtels darstellen und Arnaulds Beweise arithmetisch nachprüfen.

Für Quadrate ungerader Zellenzahl. Fig. 1. Das natürliche Quadrat.

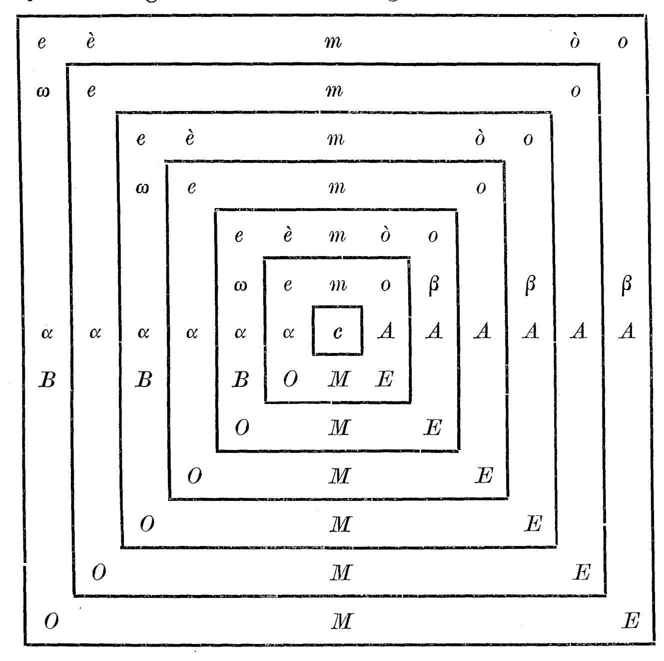
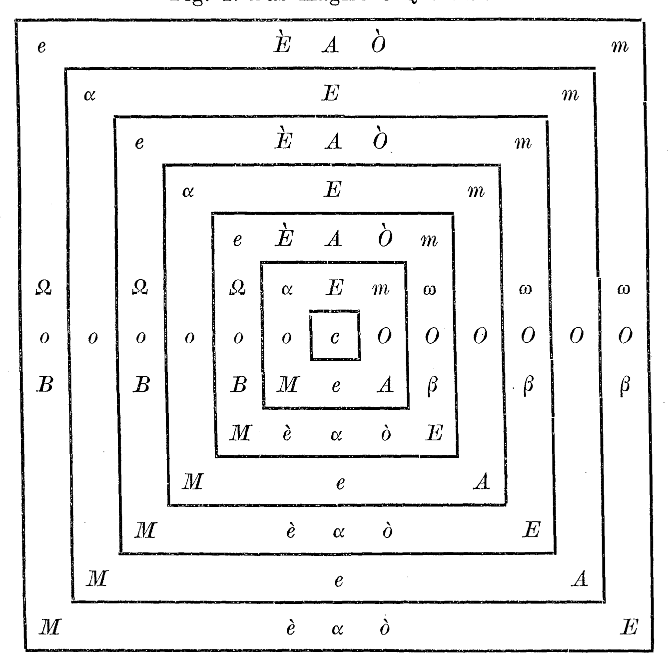


Fig. 2. Das magische Quadrat.



Ist die Grundzahl, d. h. die Wurzel des natürlichen Quadrats von ungerader Zellenzahl $2n + 1$, so ist die Ziffer der Mittelzelle, das Centrum, gegeben durch

$$(2n^2 + 2n + 1).$$

Die durch Arnaulds Buchstaben charakterisierten Ziffern stellen sich wie folgt dar:

I. Für Quadrate ungerader Zellenzahl

$$\overset{\alpha}{A} = (2n^2 + 2n + 1) \mp k$$

$$\overset{e}{E} = (2n^2 + 2n + 1) \mp (k(2n + 1) + k)$$

$$\overset{m}{M} = (2n^2 + 2n + 1) \mp (k(2n + 1))$$

$$\overset{o}{O} = (2n^2 + 2n + 1) \mp (k(2n + 1) - k)$$

$$\begin{aligned} \omega &= e + 2n + 1 \\ &= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) + k) + (2n + 1) \\ \beta &= A - (2n + 1) \\ &= (2n^2 + 2n + 1) + (k - (2n + 1)) \\ \grave{e} &= e + 1 \\ &= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) + k) + 1 \\ \grave{o} &= o - 1 \\ &= (2n^2 + 2n + 1) - (k(2n + 1) - k) - 1 \end{aligned}$$

(Wir vereinfachen die Ausdrücke absichtlich nicht weiter, um ihre Bildungsweise hervortreten zu lassen.)

Es müssen nun folgende Beziehungen gelten (wir setzen hier $2n^2 + 2n + 1$ wieder $= c$). Für unsere Zwecke hat k die ganzzahligen Werte 1, 2, 3 ... n zu durchlaufen.

a) in den ungeraden Gürteln

$$1)\ \alpha + o + M = [c - k] + [c - k(2n + 1) + k)] + [c + k(2n + 1)]$$

$$2)\ \alpha + E + m = [c - k] + [c + k(2n + 1) + k] + [c - k(2n + 1)]$$
$$= 3c$$

Wir sehen, dafs in beiden Summen alle Glieder mit k sich zerstören; der Ausdruck der Summen ist also unabhängig von k, d. h. er gilt für jedes k.

Da diese Zusammenstellungen aber nur in den ungeraden Gürteln Verwendung finden, so können wir hier k auf die Reihe der ungeraden Zahlen beschränken.

$k = 1, 3, 5, 7 \ldots n$ bez. $n - 1$ je nachdem n ungerade bez. gerade ist.

Setzt man in diesen Formeln $k = 1$ und $n = 1$, so erhält man



$$\begin{aligned} \alpha &= 4; & A &= 6 \\ e &= 1; & E &= 9 \\ m &= 2; & M &= 8 \\ o &= 3; & O &= 7 \\ c &= 5 \end{aligned}$$

und wenn man diese Ziffern nach Arnaulds Schablone ordnet, so erhält man jene bestimmte Form des magischen Quadrats von 3^2, von der auch Stiefel ausgegangen war.

b) für die geraden Gürtel.

Hier hat man k die geraden Zahlen $2, 4, 6 \ldots n$ bez. $n - 1$ durchlaufen zu lassen, je nachdem n gerade bez. ungerade ist.

In den geraden Gürteln müssen die Beziehungen gelten:

1) $M + \grave{e} + \alpha + \eth + E =$
$$[c + k(2n+1)] + [c - k(2n+1) - k + 1] + [c - k] + [c - k(2n+1) + k - 1] + [c + k(2n+1) + k] = 5c$$

2) $E + \beta + O + \omega + m =$
$$[c + k(2n+1) + k] + [c + k - (2n+1)] + [c + k(2n+1) - k] + [c - k(2n+1) - k + (2n+1)] + [c - k(2n+1)] = 5c.$$

Auch diese beiden Summen sind unabhängig von k und besitzen den gemeinsamen Wert $5c$.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal zusammenfassend, wie Arnauld für die ungeraden Quadrate bei der Bildung des magischen Quadrats vorgeht.

Der erste (immer von innen nach aufsen gezählte) Gürtel besitzt im Quadrat ungerader Zellenzahl 3 Zellen; über diese verfügt Arnauld so, dafs die Summe der darin placierten Ziffern gleich $3c$ ist; der nächste, der zweite Gürtel, enthält wieder in einer Zeile bez. Kolonne 5 Zellen; über diese wird so verfügt, dafs die Summe ihrer Ziffern $5c$ ergiebt. Es bleiben also in diesen beiden Gürteln keine weiteren Zellen leer, d. h. verfügbar; der nächste dritte Gürtel enthält in der Zeile bez. Kolonne 7 Zellen, in diesem wird als Gürtel ungeraden Index' über 3 Zellen in der Zeile bez. Kolonne verfügt genau so wie im ersten; es bleiben hier also 4 Zellen leer, verfügbar. Der nächste Gürtel mit 9 Zellen in der Zeile oder Kolonne ist wieder ein gerader, wie der zweite; es wird demnach, wie im zweiten, über 5 bestimmte Zellen so verfügt, dafs deren Summe, d. h. die ihrer Ziffern, $5c$ gleich ist. Es bleiben hier also auch 4 Zellen verfügbar in der Zeile bez. Kolonne. Im nächsten Gürtel von der Zellenzahl 11 pro Zeile bez. Kolonne, der wieder seinem Index nach ein ungerader Gürtel ist (er

ist der fünfte), wird wie im ersten und dritten über 3 Zellen, so verfügt, dafs deren Summe gleich $3c$ ist; es bleiben 8 Zellen verfügbar. Über fünf Zellen einer Zeile oder Kolonne des nächsten, sechsten Gürtels, die aus 13 Zellen besteht, wird, wie im zweiten und vierten Gürtel, die Zahl der in analoger Weise besetzten Zellen wieder 5 sein; es restieren 8 leere Zellen. Allgemein: Die Anzahl der übrig bleibenden Zellen wiederholt sich nacheinander immer einmal und ist eine durch 4 teilbare Zahl. Da die leeren Zellen aber später so besetzt werden, dafs ihre Summe der Summe der entsprechenden bei der Besetzung mit den charakterisierten Ziffern leer gebliebenen Zellen der gegenüberliegenden Zeile bez. Kolonne gleich ist, so mufs, da die dritte allgemeine Regel, welche die Stellung der Supplemente betrifft, eingehalten wurde, die Summe dieser Zellen einer Zeile so vielmal das Centrum ergeben als bei der ersten Besetzung durch die charakterisierten Ziffern Zellen übrig geblieben waren. Die Ziffern dieser letzteren ergänzen also mit ihrer Summe die Summe der charakterisierten Ziffern zu sovielmal c, als überhaupt in der Zeile oder Kolonne Zellen im ganzen vorhanden sind; dann ist aber nach unseren früheren Angaben, nämlich den Folgerungen aus der dritten allgemeinen Regel, eine Zeilen- bez. Kolonnensumme der gegenüberliegenden gleich; sie ist aber auch der diagonalen Summe gleich, da die Eckzellen ja nach der zweiten allgemeinen Regel immer so besetzt werden, dafs die Diagonalsumme des nächsten inneren Quadrats um $2c$ zunimmt; die Diagonalsumme des ersten solchen Quadrats, nämlich des aus 3^2 Zellen bestehenden, ist aber als Summe der Mittelzellenziffer (c) und zweier Supplementziffern $3c$ gleich. Z. B. im sechsten (von innen gezählten) Gürtel, der aus 13 Zellen pro Zeile oder Kolonne besteht, wird zunächst über 5 Zellen verfügt, deren Summe $5c$ gleich ist, die 8 übrig bleibenden Zellen der Zeile bezw. Kolonne werden aber nach dem Gesagten so besetzt, dafs ihre Ziffernsumme $8c$ gleich ist. Die Diagonalsumme ist von c pro Gürtel immer um $2c$ wachsend bis zum sechsten auf $13c$ angewachsen. Es sind also die magischen Eigenschaften des Gürtels erfüllt. Wenn alle Gürtel magisch sind, so ist das aus ihnen bestehende Quadrat magisch-magisch. Solche Quadrate sind also die von Arnauld gebildeten.

§ 7 giebt die Spezialregeln für die Überführung eines natürlichen Quadrats gerader Zellenzahl in das magische.

Man läfst zunächst die beiden ersten (wiederum von innen gezählten) Gürtel ganz beiseite, da diese ihre eigenen Regeln besitzen. Die Versetzungsregeln ergeben sich aus den beiden nebenstehenden Schablonen für alle anderen Gürtel.

Für Quadrate gerader Zellenzahl. Fig. 1. Das natürliche Quadrat.

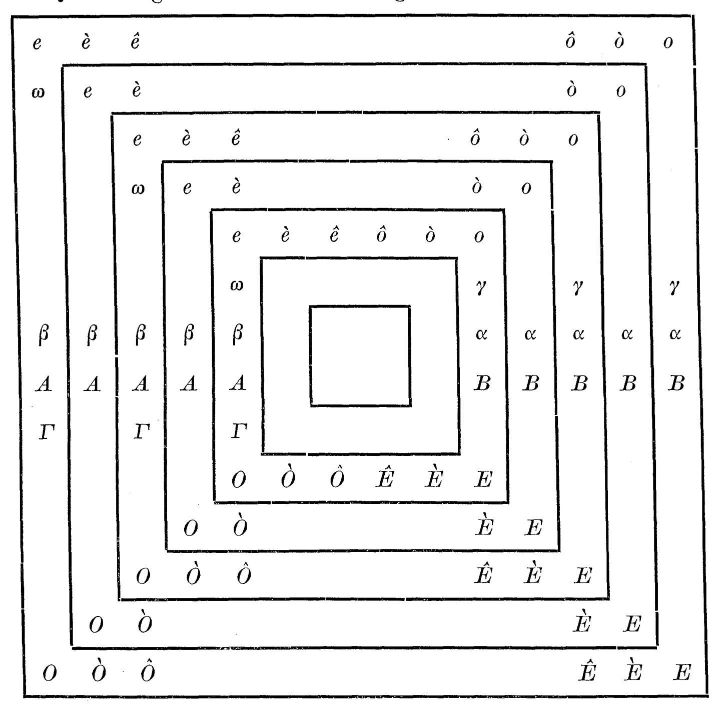
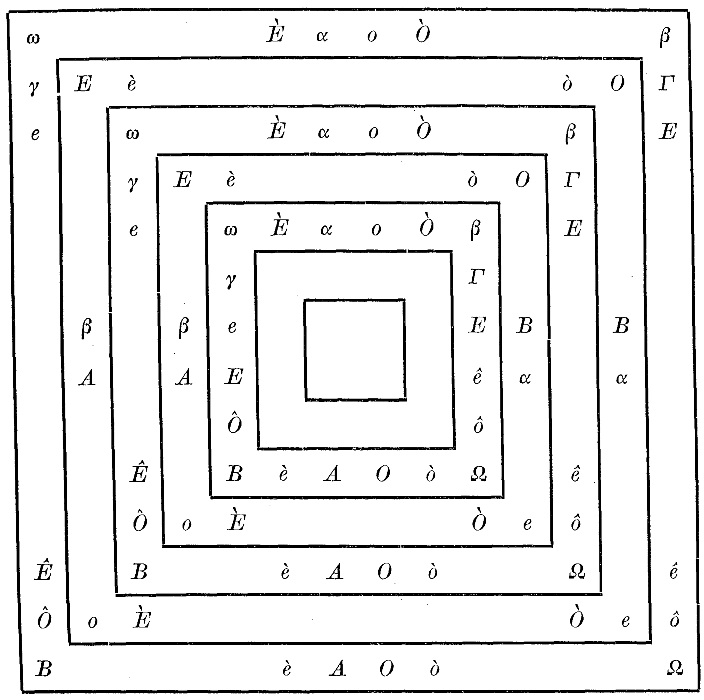


Fig. 2. Das magisch-magische Quadrat.



Wir wollen auch hier wieder die Beziehungen, die in den einzelnen Gürteln gelten müssen, in allgemeine Zeichen übersetzen, indem wir wieder Arnaulds durch Buchstaben charakterisierte Ziffern mit Hilfe des auch für diesen Fall durch eingangs erläuterte Definitionserweiterung vorhandenen Centrums und der Gürtelordnungszahl k darstellen.

Ist $2n$ die Wurzel und zugleich Zellenzahl der Zeile des natürlichen Quadrats, so ist nach Analogie des ungeraden Quadrats

$$4n^2 + 1 = 2c$$

d. h. die Summe der ersten und letzten Zahl des natürlichen Quadrats bildet das (angenommene) doppelte Centrum. Das Centrum im Quadrate von gerader Zellenzahl $2n$ wäre also eigentlich $2n^2 + \frac{1}{2}$; da dieser Ausdruck aber nicht ganzzahlig ist und deshalb zum Ausgangspunkt der Darstellung sich nicht eignet, so nehmen wir für diesen Ausdruck $2n^2 + 1$ (nach Analogie des ungeraden), wobei wir natürlich dieser Veränderung beim Resultat eingedenk bleiben müssen. Es ergiebt sich dann für die durch Arnaulds Buchstaben charakterisierten Zahlen in allgemeiner Form folgende Tabelle:

II. Für gerade Quadrate:

$$\begin{aligned}
\alpha &= [2n^2 + 1] - (n - k) - 1\\
A &= [2n^2 + 1] + (n - k)\\
e &= [2n^2 + 1] - [k\,(2n + 1) - n]\\
E &= [2n^2 + 1] + [k\,(2n + 1) - n] - 1\\
o &= [2n^2 + 1] - [k\,(2n - 1) - n] - 1\\
O &= [2n^2 + 1] + [k\,(2n - 1) - n]\\
\omega &= e + 2n\\
&= [2n^2 + 1] - [k\,(2n + 1) - n] + 2n\\
\Omega &= [2n^2 + 1] + [k\,(2n + 1) - n] - 2n - 1\\
\beta &= [2n^2 + 1] - (n + k)\\
B &= [2n^2 + 1] + (n + k) - 1\\
\gamma &= \alpha - 2n\\
&= [2n^2 + 1] - (n - k) - 2n - 1\\
\Gamma &= [2n^2 + 1] + (n - k) + 2n
\end{aligned}$$

endlich

$$\grave{e} = e + 1; \quad \grave{o} = o - 1$$
$$\hat{e} = e + 2; \quad \hat{o} = o - 2$$

Wir sehen, daſs immer ein Buchstabe, z. B. α, und sein Supplement das Arnauldsche $2c = 2(2n^2 + 1) - 1$ ergiebt. Wir sehen ferner, daſs alle in der rechten Hälfte des natürlichen Quadrats stehenden Buchstaben Arnaulds in unserer Darstellung mit -1 versehen sein müssen.

Es bestehen nun folgende Gleichheiten:

a) Für die ungeraden Gürtel ist:

$$\begin{aligned} \omega &= [2n^2 + 1] - [k(2n+1) - n] + 2n \\ E &= [2n^2 + 1] + [k(2n+1) - n] - 1 \\ \alpha &= [2n^2 + 1] - [n - k] - 1 \\ o &= [2n^2 + 1] - [k(2n-1) - n] - 1 \\ O &= [2n^2 + 1] + [k(2n-1) - n] \\ \beta &= [2n^2 + 1] - [n + k] \end{aligned}$$

$$\omega + E + \alpha + o + O + \beta = 12n^2 + 6 - 3.$$

Es zerstören sich oben alle Glieder bis auf

$$12n^2 + 3 = 3(4n^2 + 1) = 3 \cdot 2c$$

also

1) $$\omega + E + \alpha + o + O + \beta = 6c$$

wie Arnauld bewiesen hat (s. den französischen Text) (für jeden Gürtel, da die Summe von k nicht abhängt).

2) wollen wir die Beziehung verificieren

$$\omega + e + \gamma = \beta + \grave{e} + \grave{o}$$
$$\omega + e + \gamma = 3[2n^2 + 1] - 2[k(2n+1) - n] - (n - k) - 1$$
$$\beta + \grave{e} + \grave{o} = 3[2n^2 + 1] - [k(2n+1) - n] - (n+k) - [k(2n-1) - n] - 1$$

oder vereinfacht:

$$\omega + e + \gamma = \beta + \grave{e} + \grave{o} = 3[2n^2 + 1] - 1 - 4kn - k + n$$

Diese Gleichheit bedingt aber die Gleichheit der Supplementensummen $\Omega + E + \Gamma$ und $B + \hat{E} + \hat{O}$ nach der dritten allgemeinen Regel; nach den Folgerungen aus dieser sind dann aber auch die beiden Summen der gegenüberliegenden Kolonnen gleich, nämlich:

$$\omega + e + \gamma + \hat{E} + \hat{O} + B = \beta + E + \Gamma + \grave{e} + \grave{o} + \Omega,$$

wenn diese aber gleich sind, so folgt, da sie nach der dritten Regel angeordnet sind, dafs der ihnen gemeinsame Wert $6c$ beträgt, nämlich soviel mal c als Zellen besetzt sind.

k hat in diesen Summen der Arnauldschen durch Buchstaben charakterisierten Ziffern die Werte 3, 5, 7 ... bis n bez. $n - 1$ zu durchlaufen, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

b) Für die geraden Gürtel: hier hätte k die Werte 4, 6, 8 bis $n - 1$ bez. n zu durchlaufen, je nachdem n ungerade bez. gerade ist [doch gilt unsere Darstellung der Ziffern des natürlichen Quadrats selbst noch, wenn $k = 1$ oder $= 2$ ist].

Für $k = 1$ geht $\grave{e}$, wie es sein mufs, in o über und $\grave{o}$ in e. [Für die Übertragung in das magische Quadrat folgen aber die Arnauldschen durch

Buchstaben charakterisierten Zahlen anderen Stellungsregeln als in den übrigen Gürteln, wie im nächsten Paragraph erläutert wird.] Die Summenbeziehungen, die hier gelten müssen, sind für die Zeilen an sich klar, indem $E + \grave{e} + \eth + O$, da ja $\grave{e} + \eth = e + o$ ist, Summe zweier Zahlen und deren Supplemente ist, also

$$E + \grave{e} + \eth + O = 4c,$$

ferner

$$E + \beta + A + o = 4c,$$

denn

$$\begin{aligned} E &= [2n^2 + 1] + [k(2n + 1) - n] - 1 \\ \beta &= [2n^2 + 1] - [n + k] \\ A &= [2n^2 + 1] + [n - k] \\ o &= [2n^2 + 1] - [k(2n - 1) - n] - 1 \end{aligned}$$

jeder einzelne der Summanden ist mit k variabel; aus der Summe aber hebt sich k heraus; dieselbe ist also konstant, d. h. für jeden Gürtel gleich

$$(8n^2 + 4) - 2 = 2(4n^2 + 1) = 4c$$

Wir wollen kurz rekapitulieren:

Das Verfahren zur Herstellung magischer Quadrate gerader Zellenzahl hält genau denselben Gang ein, wie das für solche ungerader Zellenzahl.

Es wird in den Gürteln von ungeradem Index zunächst durch Placement von 6 bestimmten der durch Buchstaben charakterisierten Ziffern in der oben angegebenen Stellung pro Zeile oder Kolonne über 6 Zellen verfügt, ebenso in den Gürteln geraden Index' über 4 Zellen nach den gegebenen Spezialregeln, die aus den Figuren ersichtlich sind. Es bleiben dann zunächst im vierten und fünften Gürtel je 4, im sechsten und siebenten je 8, im neunten und zehnten je 12 Zellen pro Zeile oder Kolonne verfügbar; die Anzahl der zunächst leer bleibenden Zellen ist also immer eine durch vier teilbare Zahl; nun werden die nicht herausgehobenen Zahlen des natürlichen Quadrats, welche kleiner sind als das Centrum, zu Quadrupeln zusammengefaſst, so, daſs jedes Quadrupel eine arithmetische Proportion bildet; werden dann die äuſseren beiden Zahlen der arithmetischen Proportion in zwei solche Zellen einer Zeile oder Kolonne eingesetzt, welche vorhin verfügbar geblieben waren, und die beiden inneren Glieder der Proportion in zwei noch nicht besetzte Zellen der gegenüberliegenden Zeile bezw. Kolonne des magischen Quadrats, wobei aber immer die Stellung der Supplemente nach der dritten allgemeinen Regel zu berücksichtigen ist, so folgt aus jener Regel, sowie den im Zusatz daraus gezogenen Folgerungen, daſs die Summe in einer Zeile oder Kolonne gleich ist der Summe in der gegenüberliegenden Zeile oder Kolonne; zugleich sind aber die Kolonnen- und Zeilensumme desselben Gürtels einander gleich, da sie beide sovielmal

c (das Centrum) betragen als Zellen in der Zeile oder Kolonne dieses Gürtels vorhanden sind; dafs auch die Diagonalensumme damit übereinstimmt, ergiebt sich aus der Bildungsweise bezw. Zuwachs pro Gürtel.

§ 8 erklärt die Regeln der Besetzung der beiden innersten Gürtel ($k = 1, 2$) der Quadrate gerader Zellenzahl; dieselben sind genau die der Bildung der magischen Quadrate von 4^2. In diesen giebt es nach Arnauld zwei Arten von Zeilen bezw. Kolonnen, die vier äufseren, und vier, welche das Quadrat durchsetzen, Transversalen: Die zweite und dritte von links nach rechts, und die zweite und dritte Zeile. Dafs dieses Quadrat sich nicht nach den allgemeineren Regeln behandeln läfst, ergiebt sich, wie Arnauld richtig bemerkt, daraus, dafs die vier Zellen in der Mitte vier Streifen bilden, zwei Diagonalen und eine Zeile und Kolonne; es können daher nur die Diagonalen in ihren Summen übereinstimmen (denn, würde auch eine Zeilen- bezw. Kolonnensumme damit übereinstimmen, so käme dieselbe Ziffer zweimal vor, was ex def. ausgeschlossen ist). Die 16 Ziffern von 4^2 lassen sich nach Arnauld auf

$$20\,922\,789\,872\,000,$$

also auf mehr als zwanzig Millionen millionenmal verschiedene Weise anordnen, wobei aber nur sechzehn magische Formen vorhanden sind; Arnauld schliefst die durch Lagenänderung eines dieser magischen erzeugten von der Zählung aus.

Sodann giebt er eine Tabelle zur Bildung der sechzehn Formen; darin heifst:

1^0): Die vier inneren Zahlen.

2^0): Die Zahlen der vier Eckzellen.

3^0): Die beiden mittleren Zahlen der oberen Zeile und die beiden entsprechenden der unteren Zeile.

4^0): Die beiden mittleren der linken Kolonne sowie dieselben der rechten.

Ferner bedeutet:

o) man solle ein solches Quadrupel (1^0, 2^0, 3^0 oder 4^0) an seinem Platze lassen;

c) man solle es übers Kreuz vertauschen;

g) direkt von rechts nach links vertauschen;

h) direkt von oben nach unten die Vertauschung vornehmen.

Wir glauben Arnaulds instruktive Tabelle hier nochmals folgen lassen zu sollen, da im nächsten Paragraphen darauf Bezug genommen werden mufs.

Nr.	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*	*X*	*XI*	*XII*	*XIII*	*XIV*	*XV*	*XVI*
1.	*o*	*o*	*o*	*o*	*c*	*c*	*c*	*c*	*g*	*g*	*g*	*g*	*h*	*h*	*h*	*h*
2.	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*	*o*	*c*	*g*	*h*
3.	*c*	*g*	*c*	*g*	*h*	*o*	*h*	*o*	*h*	*o*	*h*	*o*	*c*	*g*	*c*	*g*
4.	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*	*c*	*h*	*h*	*c*	*g*	*o*	*o*	*g*

Von diesen sechzehn Formen sind zwei, nämlich die I. und VI., so gebildet, daſs nur acht Zahlen des natürlichen Quadrats ihre Stellung geändert haben, während in XI und XVI alle sechzehn anders placiert wurden. Es folgen die Formen VI und XVI, gebildet mit den Zahlen von 4^2 als Beispiele. Den Beweis führt Arnauld endlich so: Jede Zeile oder Kolonne, gleichviel ob äuſsere oder transversale des Quadrats von vier, oder des Quadrats, welches aus den beiden innersten Gürteln eines Quadrats gerader Zellenzahl besteht, enthält vier Zahlen (im natürlichen Quadrat), welche eine arithmetische Proportion bilden. Es sei die Summe der äuſseren Glieder der oberen Zeile b, die Summe der inneren Glieder, welche ja jener gleich ist, ebenfalls b, sodaſs die Gesamtsumme der Zeile $b + b$ ist, und ebenso in der untersten Zeile $f + f$. Man kann in beiden Zeilen Summengleichheit erzielen, 1) wenn man die äuſseren Glieder der einen tauscht mit den äuſseren Gliedern der anderen, ohne an den inneren Gliedern zu rühren oder 2) indem man die inneren vertauscht und die äuſseren an ihrer Stelle läſst. In beiden Fällen wird die gemeinsame Summe in einem jeden Bande $(f + b)$. Dies hat man nur auf jede der sechzehn Formen der Tabelle anzuwenden, um einzusehen, daſs die vorgenommenen Versetzungen wirklich magische Formen ergaben.

§ 9 ist interessanten Inhalts; er giebt Mittel zur Variation eines nach Arnaulds Methode gebildeten magisch-magischen Quadrats; höchst auffallend ist wieder die Übereinstimmung mit den Worten in der eingangs erwähnten Ankündigung Pascals *„idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso“*.

Wir lassen Arnaulds Worte folgen:

1) *Es wurde vorausgesetzt, daſs man die Zahlen des ersten Gürtels des natürlichen Quadrats in den ersten Gürtel des magischen überträgt, die des zweiten Gürtels in den zweiten, die des dritten Gürtels in den dritten u. s. w.; dies ist aber nicht in dieser Strenge notwendig, sondern für die durch Buchstaben charakterisierten Zahlen genügt die Übertragung in einen ähnlichen Gürtel, d. h. aus einem ungeraden Gürtel in einen beliebigen anderen von*



ebenfalls ungeradem Index, wie z. B. vom fünften in den ersten, und aus einem Gürtel von gerader Ordnungszahl ebenfalls wieder in einen geraden.

2) *Für die nicht durch Buchstaben herausgehobenen Zahlen genügt die Übertragung aus irgend einem Gürtel in einen ganz beliebigen Gürtel* (ob von ähnlichem Index oder nicht), *vorausgesetzt, dafs man sie wieder zu Proportionen* (nach unserer obigen Bezeichnung zu Quadrupeln) *zusammenfafst und* (in der schon mehrmals erörterten Weise) *die beiden äufseren Glieder in eine Zeile bezw. Kolonne, die inneren in die gegenüberliegende Zeile bezw. Kolonne immer mit Berücksichtigung der Stellung des Supplements jeder einzelnen nach der dritten allgemeinen Regel einsetzt.*

Arnauld hat diese Variationsweisen bei seinen beiden Beispielen (s. die Tafeln des französischen Textes) in Anwendung gebracht. Etwas überraschend ist, dafs er im Quadrate von zwölf die Zahlen des sechsten Gürtels in den zweiten überträgt; hier mufs dann aber $\grave{e}$ nicht gleich $e + 1$ gewählt werden, sondern $e + x$ wird gleich $\grave{o} = o - x$; denn ursprünglich sollen ja auch $\grave{e}$ und $\grave{o}$ nur zwei von e bezw. o gleichweit abstehende Zahlen sein (im übrigen setzt Arnauld immer $x = 1$; der einfachste Fall); hier aber in den Quadraten gerader Zellenzahl bei Übertragung aus einem geraden Gürtel in den zweiten mufs das x immer der Bedingung genügen:

$$(o - x) - (e + x) = 1 \text{ oder } x = \frac{(o - e) - 1}{2}$$

also

$$\grave{e} = e + \frac{o - e - 1}{2} \text{ und } \grave{o} = o - \frac{o - e - 1}{2}$$

In der genannten Tafel hat Arnauld zur Bildung der beiden innersten Gürtel die Form VI seiner oben reproduzierten Tabelle benützt. Aufserdem ist bei der Betrachtung der Tafel noch auf einige Abweichungen von den im Text gegebenen Regeln aufmerksam zu machen, welche unwesentlich sind, aber den Anschein erwecken könnten, als ob Arnauld seine Regeln nicht eingehalten hätte. Wir haben diese Abweichungen in unseren beiden Orientierungstäfelchen beibehalten. Nämlich bei der Bildung der geraden Gürtel sind die Eckzahlen übers Kreuz vertauscht; sodann ist α mit β vertauscht gegen die im französischen Text gegebenen Anordnungen. In Arnaulds Tafel des Quadrats von zwölf steht (beibehalten in unseren beigefügten Täfelchen) γ über e in den ungeraden Gürteln, während in der Vorschrift des Textes γ unter e steht; doch diese Abweichungen sind nur unwesentlich und gehören wohl zu den Variationsmitteln, von denen Arnauld sagt, dafs er sie wegen ihrer Leichtigkeit und Unwichtigkeit nicht besonders aufzählen wolle.

Zum Schlufs giebt Arnauld eine Aufzählung der Vorzüge seiner Methode; wir können nur beipflichtend als beste Würdigung dieselben hier wiederholen:

Arnaulds Methode zur Bildung magisch-magischer Quadrate ist die leichteste, kürzeste und vollendetste, denn

1) Man hat die Zahlen nur zweimal anzuschreiben (oder nach den von uns für das natürliche Quadrat gegebenen Formeln mit Hilfe vom Centrum und dem Index des Gürtels zu berechnen).

2) Es giebt nirgends Tâtonnement (Probieren), sondern man ist sich immer dessen bewufst, was man macht.

3) Die gröfsten Quadrate sind nicht schwieriger zu bilden als die kleinsten.

4) Man kann die magischen Quadrate beliebig variieren.

5) Man nimmt nur streng bewiesene Operationen vor.

6) Die Methode ist so allgemein, dafs man ohne jede Änderung mit ihr auch das schwierigere Problem lösen kann:

Hat man die Zahlen einer beliebigen geometrischen Proportion wie 1, 2, 4, 8, 16 u. s. w. in einem natürlichen Quadrat angeschrieben, sie so in ein Quadrat gleicher Zellenzahl zu übertragen, dafs das Produkt aller Zahlen einer Zeile gleich wird dem Produkt jeder anderen Zeile, Kolonne oder Diagonale, d. h. mit anderen Worten: ein magisches Quadrat multiplikativer Eigenschaft zu bilden, wie z. B.

1	2	4
8	16	32
64	128	256

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Schlufs.

Wir haben Arnaulds mathematische Arbeiten, seine Thesen, seine Logik, die *Nouveaux Elemens de Géométrie* inhaltlich genau kennen gelernt. Wir haben seine Bedeutung für die Philosophie der Mathematik, seine zahlentheoretischen Arbeiten ausführlich entwickelt; wir haben erfahren, welch klare Vorstellungen Arnauld über den Begriff der Grenze und die *„Geometrie der Indivisibilien“* sich gebildet hatte; wie er die Berechnung des Kreisinhaltes durch ein Verfahren bewies, welches mit dem heute bei Integrationen, z. B. in der Potentialtheorie angewendeten, der Zerlegung in Elemente grofse Ähnlichkeit besitzt. Aber der Schwerpunkt seines Schaffens liegt in seiner Reformation der Elementargeometrie. Viele seiner Sätze, seiner originalen Beweise sind dem heutigen Leser besser bekannt als die entsprechen Euklids. Gerade das ist „das sicherste Zeichen der enormen Gröfse des Mannes, dafs viele seiner Gedankengänge heutzutage trivial erscheinen“. Die grofsen antiken Geometer sind im XVII. Jahrhundert in einer vervollkommneten Individualität wieder auferstanden: Galileis Me-



daille trägt auf dem Revers als einzige Bezeichnung das Wort „Archimedes“, Fermat hat man wohl einen zweiten Diophant genannt, Desargues und Pascal haben des Apollonius' Spezialität, die Kegelschnitte, in neuer, überraschender Weise in Angriff genommen. Die Bedeutung des grofsen Arnauld, dem Descartes, Pascal und Leibniz ihre Freundschaft und Bewunderung schenkten, für die Mathematik können wir entsprechend als Resultat unserer Arbeit in dem Satze zusammenfassen: Arnauld ist der Euklid des XVII. Jahrhunderts.

Litteraturangabe.

Aufser den schon früher angegebenen biographischen Schriften für Arnaulds Leben, sowie Bd. I, II, III, IV, ferner XXXVIII—XLII inclus. der *Oeuvres de Messire Antoine Arnauld,* Paris 1774—1781 fol. und den editiones principes rarissimae: *„Nouveaux Elemens de Géométrie,* Paris 1667 in 4° und *La Logique ou l'art de penser,* Paris 1662 in 12° (im Besitze des Verfassers vorliegender Arbeit) haben wir folgende Werke benutzt:

Ahrens, Dr. W., Mathematische Unterhaltungen und Spiele. Leipzig 1901.

Barthelmy, Les Amis de la marquise de Sablé. Paris 1865.

Bertrand, Blaise Pascal. Paris 1891.

(*Besoigne*) *Histoire de l'abbage de Port-Royal,* Tom. VI. A Cologne MDCCLII.

Beughem, La France sçavante, i. e. Gallia erudita critica et experiment. noviss. Amsterdam (Wolfgang) 1683 in 12° (Generalregister der Jahrgänge 1665—1687 des Journal des Sçavans).

Bossut, Essai sur l'Histoire générale des Mathématiques. A Paris MDCCCII.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. I. 2. Aufl. 1894. Bd. II und Bd. III. 2. Aufl. 1900 und 1901.

Cantor, Moritz, Blaise Pascal. Preufsische Jahrbücher XXXII S. 212—237.

Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. A Paris II. edit. 1875.

Comptes rendus hebdomaires des séances de l'Academie des sciences. Tom. 73. 1871.

Cousin, Etudes sur Pascal. Paris 1857.

Cousin, Madame de Sablé. Paris 1859.

Descartes, Les lettres. 3 vols. Paris 1667.

Fischer, Kuno, Geschichte der neueren Philosophie. (Jubiläumsausgabe.) Bd. I. Descartes' Leben, Werke und Lehre. Bd. II. Spinozas Leben, Werke und Lehre. Bd. III. Gottfried Wilhelm Leibniz.

Gerhardt, C. J., Leibnizens (Gesammelte Werke) mathematische Schriften. 7 Bde. (8 Teile) und Supplem. Berlin und Halle 1849—1863.

Gerhardt, C. J., Leibniz' Briefwechsel mit Mathematikern. Berlin 1899. Bd. I.

Gerhardt, C. J., Sitzungsberichte der Berliner Akademie. Berlin 1892 (S. 183—204) „Desargues und Pascal über die Kegelschnitte“. Ebenda 1891 „Leibniz und Pascal“ S. 1053—1068.

Grotefend, Briefwechsel zwischen Leibniz, Arnauld und dem Landgrafen Ernst von Hessen-Rheinfels. Hannover 1846.

Guhrauer, G. E., Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz. (Jubelausgabe.) Breslau 1846.

Günther, S., Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig 1876.

Heis, Dr. E., Lehrbuch der Geometrie. I. *Planimetrie.* Köln 1881.

Huygens, Chr., Oeuvres complètes publ. p. l. societé holland. des sciences. 4°. La Haye 1888.

Histoire et Mémoires de l'Académie des Sciences année MDCCXXVII. à Paris MDCCXXIX.

Journal des Sçavans, Le, .. Par le S^r. G. P. à Paris, chez Jean Cvsson ... MDCLXVII. (pag. 195—196).

Lamy, B., Les Elemens de Géométrie et de la mesure de l'étendue. 7. ed. 12°. Paris 1758.

Malézieu, Nicolas de, Elémens de Géométrie pour Monseigneur le Duc de Bourgogne. 2 ed. Paris 1722.

Maury, A., L'ancienne Academie des Sciences. Paris 1864.

Matanasiana ou Mémoires littéraires, historiques et critiques du docteur Matanasius, à la Haye 1740 in 12°.

Montucla, M., Histoire des Mathématiques à Paris MDCCLVIII.

Nourrisson, Pascal physicien et philosophe. Paris 1888.

Pascal Blaise, Oeuvres complètes. Paris (Hachette) 1880.

Philosophical-Transactions in der lateinischen Ausgabe *Acta philosophica societatis regiae in Anglia anni MDCLXV, VI, VII, VIII, und MDCLXIX Auctore Henrico Oldenburgico ...... in Latinum versa interprete C. S.* Lipsiae anno MDCLXXV.

Poggendorff, Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Bd. I und II. 1863.

Reiff, Dr. R., Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.

Stäckel, Paul, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauſs. Leipzig 1895.

Schotten, Dr. *H., Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts.* Bd. I und II. Leipzig 1890 und 1893.

Varignon, Pierre, Elemens de Mathematiques. Paris 1731 in 4°.

Veronese, Grundzüge der Geometrie. Leipzig 1894.

Windelband, W., Die Geschichte der neueren Philosophie. 2 Bde. Leipzig 1899.

Druckfehlerverzeichnis.

S. 197 Z. 1 von oben füge nach *Cartesianae* hinzu: erschien,
S. 208 Z. 6 von oben lies *infiniment* statt *infinement* (zweimal).
S. 209 Z. 5 von unten lies *ont* statt *on*.
S. 215 Z. 7 von oben lies *n'avoit* statt *n'avait*. — Z. 12 von oben lies *ne* statt *nec*.
S. 233 Z. 6 von unten lies *particulieres* statt *particuliers*.
S. 238 Z. 4 von unten lies *demonstrandi* statt *domonstrandi*.
S. 241 Z. 2 von oben lies *jours* statt *jour*.
S. 243 Z. 5 von oben lies *suppléer* statt *supléer*.
S. 247 Z. 14 von unten lies *quand* statt *quant*.
S. 248 Z. 1 von oben lies *Analyse* statt *Analise*. — Z. 2 von oben und Z. 4 von oben lies *s'égarer* statt *égarer*
S. 283 Z. 10 von oben lies Dann statt Denn.
S. 284 Z. 11 von oben lies antiparallelen statt parallelen.
S. 285 Z. 20 von oben ist das Semikolon vor = zu streichen.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XV. HEFT.

EINLEITUNG
IN DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE
DER HÖHEREN ALGEBRAISCHEN KURVEN
NACH DEN METHODEN VON JEAN PAUL DE GUA DE MALVES.

EIN BEITRAG ZUR KURVENDISKUSSION VON

DR. PAUL SAUERBECK,
PROFESSOR AM GYMNASIUM REUTLINGEN.

MIT 76 ABBILDUNGEN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

Vorwort.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit gab der Aufsatz der Herren von Brill-Tübingen und Nöther-Erlangen „Über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit", Band III der Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Mit ihr will dem im Vorwort zu jenem Aufsatz ausgesprochenen Wunsche, „das Bild bedeutender Männer und ihrer Thätigkeit in dem Gedächtnis der jüngeren Generation frisch zu erhalten", Rechnung getragen werden, ein Wunsch, der in Bezug auf De Gua um so berechtigter erscheint, als seine Untersuchungen sich noch mit einem beträchtlichen Teil des analytisch-geometrischen Unterrichtsstoffes der Mittelschulen befassen und daher sowohl für diese Stufe als bei einleitenden Vorlesungen an der Hochschule mit Vorteil zu verwerten sind.

Die Arbeit folgt in ihren Methoden den in den „Usages de l'analyse de Descartes" niedergelegten Ausführungen De Gua's, weicht aber durch die moderne Art der Darstellung ab und führt zum Teil die Entwicklungen De Gua's weiter unter Hinweisen auf den Zusammenhang mit dem späteren Stand der Kenntnisse.

Reutlingen, im Juli 1902.

Der Verfasser.



Inhalt.

I. Abschnitt.

Geschichtlicher Überblick über die Entwicklung der Kurvendiskussion von Descartes bis De Gua 1637—1740.

Einleitung.

1. In dem gemeinsam mit Herrn Nöther-Erlangen erstatteten Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit, Band III der Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung, Jahrgang 1892/93, würdigt pg. 132—134 Herr von Brill-Tübingen, von welchem die Bearbeitung des älteren Zeitabschnitts herrührt, erstmals eingehender die Verdienste eines Mannes, der auf dem Gebiete der analytischen Geometrie als der hervorragendste unter den im Gefolge von Newtons epochemachender Enumeratio auftretenden Nacheiferern dieses grofsen Geometers betrachtet werden mufs: des Abbé Jean Paul de Gua de Malves. Das streng im Geiste des Descartes verfafste kleine Werk De Gua's, betitelt „Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres", Paris 1740. 12^0, 457 pp., dessen Format und Ausstattung, vielleicht nicht unabsichtlich, eher ein Gebetbuch denn eine Schrift mathematischen Inhalts vermuten läfst, repräsentiert in äufserst knapper und für die damalige Zeit schwer verständlicher Darstellung ein vollständiges Lehrbuch der analytischen Geometrie der ebenen algebraischen Kurven und ist ein Meisterstück des Scharfsinns, voll origineller Gedanken und feiner Bemerkungen. In einem Punkt dagegen läfst sich De Gua eine verhältnismäfsig geringfügige Übereilung zu Schulden kommen: er bestreitet die Existenz der von De l'Hospital aufgefundenen Spitze II. Art, der sog. Schnabelspitze (point de rebroussement de la 2e espèce), und dies scheint ihm den Tadel der Nachfolger in dem Mafse zugezogen zu haben, dafs darüber seine nicht geringen Verdienste um die Anwendung der Algebra auf Geometrie bis auf die neueste Zeit fast gänzlich in Vergessenheit geraten sind, noch Chasles streift in seinem Aperçu historique sur l'origine et le développement

des méthodes en géometrie, Paris 1875, die analytischen Leistungen De Guas nur flüchtig und unvollständig. Zu dieser Verdrängung De Guas hat vor allem Gabriel Cramers zehn Jahre später erschienene Introduction à l'analyse des courbes lignes algébriques, Genève 1750, beigetragen. Im Hinblick auf dieses umfangreiche, den damaligen Stand der Kenntnisse zu einem gewissen Abschlufs führende Kompendium einer Theorie der algebraischen Kurven, das zu einem grofsen Teil seines Inhaltes an die Usages de l'analyse erinnert, aber im Gegensatz zu diesen, wenn auch von einer gewissen Breite und Ängstlichkeit der Darstellung, doch leicht fafslich geschrieben ist und zudem in dem berühmten Abschnitt über die Méthodes des séries (Chap. VII) die Untersuchungen Eulers: Sur le point de rebroussement de la 2e espèce, Mém. de Berlin 1748, schon berücksichtigt, wird wohl De Gua von einer verbesserten Neuausgabe seines Buches abgesehen haben. An die Stelle der Usages tritt die vielgelesene Introduction, die lange Zeit hindurch die Führerschaft behält, obwohl bezüglich ihrer neuen Methoden und Sätze Gabriel Cramer vielfach nicht das Recht der Priorität zuerkannt werden kann.

Bestrebungen De Guas.

2. Die Ziele, welche De Gua mit seiner Arbeit verfolgt, sind im wesentlichen von zwei Gesichtspunkten aus zu betrachten: In erster Linie sucht er die Analysis des Descartes, die zur damaligen Zeit in ihrem eigensten Gebiet, dem der Untersuchung der geometrischen Eigenschaften auf Grund der algebraischen Gestalt der Kurvengleichung, durch die obwohl ein halbes Jahrhundert jüngere Differentialrechnung verdrängt wurde, als die natürlichste und ursprüngliche Methode in ihre alten Rechte wieder einzusetzen, indem er, ein Meister in der Beherrschung derselben zeigt, wie sie in allen einschlägigen Fragen ein nicht weniger mächtiges Hilfsmittel darstellt denn die Differentialmethode, ja, dafs sie letzterer sogar überlegen ist, insofern sie dieselben Ergebnisse nicht nur durchaus elementar, sondern auch mit weit schärferer Begründung abzuleiten gestattet; in zweiter Linie sucht er, angeregt durch Newtons Enumeratio, erstmals eine allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven zu entwickeln. In diesem Sinn, sagt De Gua selbst in seiner Vorrede, möge sein Werk gleichsam als eine Extension des idées de deux grands hommes betrachtet werden.

Descartes Géométrie. Newtons Enumeratio.

3. Die Anfänge einer Theorie der algebraischen Kurven reichen nicht früher zurück als bis Descartes. Obwohl nach den Untersuchungen Zeuthens: Über die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886, schon Apollonius über den Begriff der Koordinaten verfügt und mit ihnen

in einer gewissen geometrischen Ausdrucksweise, die ihm die heutige Zeichensprache der Algebra ersetzt, operiert, so hat doch Descartes in seiner Schrift: La Géométrie, Leyden 1637, zuerst die Kurven höherer Ordnung durch Gleichungen ausgedrückt und damit überhaupt den Begriff der algebraischen Kurven geschaffen. Aber trotz der Universalität der neuen Lehre Descartes' gehen die Untersuchungen der nächst folgenden Zeit kaum über die Betrachtung der Kurven zweiter Ordnung hinaus und beschränken sich auch für höhere Kurven nur auf Einzelheiten, vgl. Chasles: Aperçu historique pg. 94—118. Die Grundlage zu einer allgemeinen Theorie der algebraischen Kurven schafft erst beinahe siebzig Jahre später Newtons: Enumeratio linearum tertii ordinis, London 1704. Zwar war der Hauptzweck dieser Schrift, welche auf die Entwicklung der Geometrie einen so weittragenden Einfluſs ausgeübt hat, die Aufzählung und Klassifizierung der Kurven dritter Ordnung, von welchen bis dahin nur wenige Arten bekannt waren, allein indem Newton seine überraschend einfachen Sätze, welche in die erstaunliche Mannigfaltigkeit der Gestalten dieser Kurven Ordnung bringen, als Verallgemeinerungen der bekannten Durchmesser-, Sekanten-, Asymptoten- und projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte ohne Beweis veröffentlichte, gab er die erste mächtige Anregung zu einer Reihe ganz hervorragender Leistungen, welche, zunächst auf die Begründung jener Sätze gerichtet, eine allgemeine Theorie der algebraischen Kurven anstrebten. Die namhaftesten Vertreter dieser durch die Enumeratio auf ein halbes Jahrhundert hinaus bestimmten Richtung der Geometrie sind nach der Zeitfolge, in welcher sie ihre Schriften geometrischen Inhalts veröffentlichten: Jacob Stirling, Colin Mac Laurin, Nicole, Saurin, Maupertuis, De Bragelongne, De Gua und Gabriel Cramer.

De Guas Werk ist die erste allgemeine Kurvendiskussion in rein analytischer Behandlung. Welch bedeutende Fortschritte auf diesem Gebiet seit dem Erscheinen der Enumeratio diese Schrift nach Inhalt wie nach Methode aufweist, zeigt eine kurze Betrachtung der diesbezüglichen Litteratur der Vorgänger.

Jacob Stirlings Lineae Newtonianae.

4. Sieht man von der im Supplément du Journal des Sçavans, Septembre 1708 veröffentlichten kleinen Abhandlung des siebzehnjährigen De Bragelongne, des späteren Abbé, ab, die sich mit der Begründung des VI. Abschnitts der Enumeratio, der Descriptio organica curvarum mittels steter Bewegung zweier unveränderlicher Winkelgröſsen längs gegebener Leitlinien, befaſst, jedoch nur insoweit, als für die entstehenden geometrischen Örter dritten Grades die Gleichungen aufgestellt werden, ohne eine analytische

Diskussion anzuschliefsen, so ist die erste kurventheoretisch bedeutende Arbeit diejenige Jacob Stirlings, betitelt: Illustratio tractatus D. Newtoni de Enumeratione linearum tertii ordinis, Oxon. 1717. Hier zeigt Stirling zuerst, indem er die gerad- und krummlinigen Asymptoten, die in Newtons Enumeratio das Einteilungsprincip der Kurven dritter Ordnung abgeben, mit dem Approximationsverfahren der Reihen in Zusammenhang bringt, dafs Newton nur durch seine Fluxionsrechnung (Methodus fluxionum et serierum infinitarum, nach den Angaben von Newtons Biograph Brewster 1670 abgefafst) zu den glänzenden Ergebnissen seiner Enumeratio gelangt sein konnte. Stirling bestimmt die Asymptoten (Prop. VI) aus den Anfangsgliedern mit positiven Exponenten der nach fallenden Potenzen der Abscisse geordneten Reihe für die Ordinate des betreffenden Kurvenzweigs, zeigt (Prop. V), dafs, wenn die Abscissenaxe selbst Asymptote wird, die Ordinate nicht bis zum höchsten Grad der Kurvengleichung ansteigt, auch weifs er (Prop. I), dafs die unendlichen Zweige stets in gerader Anzahl auftreten und parallele Gerade eine Kurve in ebensoviel Punkten treffen, die imaginären eingerechnet, als der Grad der Gleichung angiebt, aber alle seine Untersuchungen über die Gestalt der Kurven beruhen auf Reihenentwicklungen, die Form der Gleichung selbst diskutiert er nicht analytisch, nur in Probl. IX zieht er die Anzahl der Koeffizienten in Betracht, um die Zahl $\frac{n(n+3)}{2}$ der die Kurve $n$ter Ordnung bestimmenden Punkte zu ermitteln. Auffallend ist, dafs Stirling mehrfache und singuläre Punkte nicht in den Kreis seiner Betrachtungen zieht, obwohl er in den Reihen ein vorzügliches Mittel zu ihrer Untersuchung besessen hätte und zudem in Prop. II Ex. IV. V die Entwicklungen für die Ordinate mehrdeutig werden, also auf eine Kurvenverzweigung hinweisen. Bezüglich der verschiedenen Methoden der Reihenentwicklungen, die z. T. auf Angaben Newtons, wie z. B. dessen Diagramm beruhen, z. T. selbst erfunden sind, ist u. a. bemerkenswert, dafs schon Stirling den nach Mac Laurin benannten Satz, allerdings unter Beschränkung auf algebraische Funktionen, ausspricht (Prop. III) und ihn durch Beispiele erläutert.

Mac Laurin's Geometria.

5. Die nächste bedeutende Arbeit geometrischen Inhalts, die Geometria organica des damals neunzehnjährigen Mac Laurin, London 1720, kommt für die analytische Kurvendiskussion kaum in Betracht. Sie befafst sich, wie die eingangs erwähnte Abhandlung De Bragelongnes von der Descriptio organica curvarum Newtons ausgehend, mit der geometrischen Erzeugung höherer Kurven aus niederen, aber in einer Vielseitigkeit der Methoden, mit

welchen er zugleich Betrachtungen über algebraische Schnittpunktsätze verbindet, dafs sie für die heutige synthetische Geometrie der ebenen Kurven grundlegend geworden ist. Nur die singulären Punkte, die sich meist bei den nächstliegenden Erzeugungsarten einstellen, erfahren eine flüchtige analytische Behandlung, die zudem methodisch ungenau ist, so pg. 13 und pg. 59, wenn Mac Laurin aus dem Ausscheiden des Faktors x^2 bezw. x^3 aus der Kurvengleichung für $y = 0$ auf die Existenz eines Doppel- bezw. dreifachen Punkts im Ursprung schliefst, oder pg. 47, wenn er für eine Kurve vierter Ordnung aufser dem Doppelpunkt im Ursprung einen zweiten auf der Abscissenaxe im Abstand $x = a$ folgert, weil für $y = 0$ die Gleichung die Form annimmt $Ax^2(x - a)^2 = 0$. Noch weniger interessiert ihn die analytische Bestimmung der Asymptoten, seine einzige Kenntnis ist die schon von Stirling erwähnte, dafs die Ordinate Asymptote ist, wenn sie nicht bis zum höchsten Grad der Gleichung ansteigt pg. 21.

Einflufs auf De Gua.

6. Mit der Geometria Mac Laurin's erreichen die analytischen Leistungen der englischen Geometer, soweit sie in die Zeit vor dem Erscheinen der Usages de l'analyse fallen, ihren Abschlufs. Leider ist die analytisch so bedeutende Schrift Stirlings in ihrem wichtigsten Teil, der Theorie der Reihen, von De Gua gänzlich unbeachtet geblieben, eine charakterische Erscheinung der damaligen mathematischen Richtung des Festlandes, wo, im Gegensatz zur englischen Schule, unter dem allbeherrschenden Einflufs der Differentialrechnung das Interesse an Reihenentwicklungen gänzlich geschwunden war. Ihn interessiert einzig dasjenige Kapitel, das die Abzählung der 76 Kurvenarten dritter Ordnung behandelt, während gerade die Reihen, denen nach ihm Leonhard Euler und Gabriel Cramer ihre Erfolge verdanken, für seine Untersuchungen singulärer Stellen wichtige Anhaltspunkte geliefert, ihm vielleicht geradezu in dem strittigen Fall der Schnabelspitze Aufklärung gegeben hätten. Handelte es sich doch hier um eine innere Selbstberührung zweier Parabelbögen $(y^2 - ax)^2 = 0$, die sich in ihrem weiteren Verlauf einerseits reell, andererseits imaginär trennen, weshalb die für den Selbstberührungspunkt, die Schnabelspitze, bestehenden, im ersten Glied übereinstimmenden zwei Entwicklungen $y^2 = ax$ bis zum zweiten Glied weitergeführt werden müssen, wofür in der Stirling'schen Doppelreihe Prop. II, Ex. V ein geradezu typisches Beispiel vorgelegen hätte.

Die Differentialmethode.

7. Die analytischen Arbeiten der Vorgänger De Gua's auf dem Festlande tragen sämtlich den Charakter der Differentialrechnung. Die vielseitigen An-



wendungen, welche der von Newton und Leibniz geschaffene, überaus fruchtbare Begriff des Unendlichkleinen auf die Geometrie, insbesondere die Tangentenprobleme, zuliefs, schaffen hier neue analytisch-geometrische Begriffe und legen den Grund zu einer Theorie der singulären Punkte. Aufser von den beiden Bernoulli und Leibniz selbst, der bei seinen Untersuchungen über die Krümmungsverhältnisse einer Kurve für den Wendepunkt, ibi concavitas atque convexitas inter se permutantur, die Bedingung $d^2y=0$ aufstellt unter der Annahme, dafs y und dy von Null verschieden sind (Nova method. pro max. et min. Acta erud. Lips. 1684, Math. Werke, Bd. V, pg. 221), geht die Hauptanregung hierzu aus von dem vielgelesenen umfassenden Werk des Marquis de l'Hospital, dem ersten systematischen Lehrbuch der Differentialrechnung: Analyse des Infiniment Petits, Paris 1696, insbesondere von den daselbst enthaltenen Betrachtungen über die Subtangente, den Krümmungshalbmesser und die Ermittlung unbestimmter Werte. Indem De l'Hospital die gleichzeitigen Änderungen der Abscisse und der Subtangente eines Kurvenpunkts studiert, wobei er unter letzterer den durch die Tangente bestimmten Abschnitt der Abscissenaxe versteht, ergiebt sich ihm zwischen Wendepunkt und Rückkehrpunkt oder Spitze I. Art (point de rebroussement de la 1e espèce) ein gewisser Gegensatz insofern, als für ersteren die Subtangente, für letzteren die Abscisse ein Extrem wird, woraus er nach Anwendung des üblichen Verfahrens der einmaligen Differentiation zur Ermittlung gröfster bezw. kleinster Werte die Kriterien $d^2y=0$ für den Wendepunkt und $d^2y=\infty$ für den Rückkehrpunkt ableitet. Aus den Krümmungsverhältnissen zieht De l'Hospital keine Schlufsfolgerung auf den Rückkehr- bezw. Wendepunkt (art. 81); er bemerkt, dafs beide Punkte diesbezüglich genau dasselbe Verhalten beobachten, nämlich sowohl den Krümmungshalbmesser 0 als ∞ haben können (art. 82); dagegen giebt ihm die Evolvente der Spitze II. Art, die selbst wieder eine Schnabelspitze ist, deren Krümmungshalbmesser ein Extrem wird, Veranlassung, aus dem Ausdruck für letzteren die Existenzbedingung der Spitze II. Art

$$3\,\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{d^3y}{dx^3}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)=0 \quad \text{oder } \infty$$

aufzustellen (art. 109). Diese auf den damals noch nicht so streng begründeten Begriff des Unendlichkleinen sich stützenden, nicht gänzlich einwandfreien Methoden der Beweisführung, die mehr durch die praktische Anwendung ihre Richtigkeit dokumentierten, und die Mehrdeutigkeit, die nicht nur dem letzten Kriterium, sondern ebenso den Kriterien für Rückkehr- und Wendepunkt anhaftet, insofern dieser z. B. im Falle die Ordinate Tangente wird, sich durch das Kriterium des Rückkehrpunkts bestimmt, bieten in der Folge De Gua eine der schönsten Gelegenheiten, die Überlegenheit der rein

algebraischen Analysis des Descartes in derartigen geometrischen Fragen über die Methoden der Differentialrechnung, was Schärfe und Klarheit anbelangt, darzuthun, indem er die Differentialkriterien aller ihm bekannten Singularitäten erstmals nach der Methode Descartes' streng analytisch begründet.

Saurin.

8. Den natürlichsten Zusammenhang zwischen der Differentialrechnung und der Theorie der mehrfachen bez. singulären Punkte, denjenigen, welchen die Berechnung unbestimmter Werte vermittelt, haben weder Joh. Bernoulli, der für die Methode der Differentiation des Zählers und Nenners das Recht der Priorität beansprucht (Acta erud. Lips. 1704), noch De l'Hospital erkannt (art. 169). Hier knüpfen die Arbeiten Saurins an, die für De Gua von unverkennbarem Einfluſs geworden sind. Saurin faſst erstmals die Spitze als Sonderfall des Doppelpunkts auf. Er bemerkt, daſs für diesen $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ wird, d. h. die Tangentenrichtungen scheinbar unbestimmt sind, und ermittelt die wahren Werte derselben unter Ausdehnung des Verfahrens von De l'Hospital in art. 163 auf den Fall, daſs Zähler und Nenner Funktionen beider Koordinaten sind, durch nochmalige Differentiation dieser Funktionen nach x und y aus einer in $\frac{dy}{dx}$ quadratischen Gleichung, deren Wurzeln für den Doppelpunkt reell und verschieden, für die Spitze reell und gleich und für den isolierten Punkt imaginär konjugiert sich ergeben (Journal des Sçavans, Janvier 1703). Die Ursache dieser Unbestimmtheit des ersten Differentialquotienten erblickt er darin, daſs für jeden Doppelpunkt Ordinate sowohl als Abscisse Doppelwurzeln der Kurvengleichung sind, folglich in unserer heutigen Ausdrucksweise noch einfache Wurzeln der ersten partiellen Differentialquotienten, d. h. des Zählers und Nenners des unbestimmten Bruchs sein müssen (vgl. später die Huddesche Regel). Diese Überlegungen veranlassen ihn zur Aufstellung des vollständigen Differentials der Kurvengleichung, die er zu diesem Zweck durch die Substitution $x + dx$, $y + dy$ an Stelle von x und y in eine nach steigenden Potenzen von dx und dy geordnete Reihe transformiert (Sur un cas singulier du problème des tangentes, Acad. de Paris 1706). Er erkennt, daſs das Aggregat der Glieder $k$ter Dimension in dx und dy durch $k$fache Differentiation nach x und y erhalten wird, wobei dx und dy wegen des Verschwindens der mit ihnen behafteten Terme als konstant zu betrachten sind und daſs dieses $k$te Differential, falls die sämtlichen vorhergehenden $k-1$ Differentiale 1., 2. bis $(k-1)$ter Ordnung identisch verschwinden, die Gleichung $k$ten Grads darstellt zur Berechnung der k Tangenten des $k$fachen Punkts, die je nach den



Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend oder imaginär konjugiert sein können. Seine Angaben bezüglich des Bildungsgesetzes der transformierten Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ sind jedoch insofern ungenau, als er die schon von Bernoulli Newton gegenüber gemachte Berichtigung, daſs das $(k+1)$te Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$ nicht das $k$te Differential von x selbst, sondern nur den $k!$ten Teil desselben darstellt (Acad. de Paris 1711, pg. 51), nicht scharf zum Ausdruck bringt (pg. 280); auch unterläſst er, die einzelnen Differentiale selbst nach Potenzen von dx und dy zu ordnen, ein Beweis, daſs Saurin in das Wesen der transformierten Gleichung lange nicht den Einblick thut wie De Gua, der sie, allerdings ohne Kenntnis der partiellen Differentialquotienten, unbewuſst erstmals scharf in der Form der Taylorschen Reihe für zwei Variable darstellt, die vielseitigsten Schluſsfolgerungen aus ihr zieht und mit ihr zum Zweck der linearen Transformation mit überraschender Gewandtheit operiert.

Moreau de Maupertuis.

9. Eine ungeahnte Erweiterung erfährt das Gebiet der singulären Punkte durch die kleine geometrische Abhandlung von Maupertuis: Sur quelques affections des courbes (Acad. de Paris 1729). Hier zeigt Maupertuis, daſs Wendepunkt und Spitze I. Art als Grundelemente durch Kombination neue höhere Singularitäten zu bilden vermögen, die jedoch zuweilen äuſserlich von gewöhnlichen Punkten sich nicht unterscheiden, falls nämlich die durch den einen Punkt erzeugte Änderung der Krümmung durch den anderen Punkt wieder aufgehoben wird. Die Abhandlung selbst enthält als Beispiele nur eine kurze geometrische Betrachtung der durch Vereinigung zweier Wendepunkte bezw. zweier Spitzen oder einer Spitze und eines Wendepunkts entstehenden drei Möglichkeiten: Flachpunkt (point de serpentement), Spitzpunkt (point de double pointe) und Schnabelspitze von De l'Hospital, die hier somit erstmals richtig als zusammengesetzte Singularität erkannt wird. Aber erst De Gua weist, indem er die Näherungskurve $y^m = Ax^n$ eines beliebigen Kurvenpunkts diskutiert (Usages pg. 69), erstmals in allgemeinster Weise nach, daſs, abgesehen vom Grad der Krümmung, die Teile eines und desselben Kurvenzweigs nur in dreierlei Arten von Punkten zusammenhängen: dem gewöhnlichen Punkt, dem Wendepunkt und der Spitze, wobei er, wie schon erwähnt, die Möglichkeit der Schnabelspitze in Abrede zieht, daſs somit sämtliche singulären Punkte ihrer äuſseren Gestalt nach auch nur diese drei Typen aufweisen, die auſser mit sich selbst auch gegenseitig Selbstberührung eingehen können; zugleich stellt er für jede dieser Singularitäten eindeutige Differentialkriterien auf, während nach Maupertuis für Flachpunkt, Spitzpunkt und Schnabelspitze, die höchsten ihm bekannten Singularitäten,

ohne Unterschied das gemeinsame zweideutige Kriterium $d^3y = 0$ oder ∞ angiebt. Aufserdem berichtigt er an zwei charakteristischen Beispielen, der in ein reines Oval übergehenden Cassinoide und den binomischen Parabeln, die von Maupertuis am Schlufs ausgesprochene irrige Ansicht, dafs jede Kurve n. Ordnung, die von einer beliebigen Geraden nur in $n-2$ bez. $n-4$ reellen Punkten geschnitten werde, notwendig einen reellen Wendepunkt bez. Wendeflachpunkt haben müsse (Usages pg. 394, 419).

Nicole.

10. Es ist natürlich, dafs der Besitz eines so mächtigen und leicht zu handhabenden Hilfsmittels, wie es die Differentialrechnung im Vergleich zu den Stirlingschen Reihenentwicklungen ist, die Bewältigung des alten klassischen Themas der Enumeratio mit weniger Schwierigkeiten verknüpft erscheinen lassen mufste und deshalb zu neuer Bearbeitung anreizte. Die Lösung dieser Aufgabe erstrebt Nicoles unvollendet gebliebene Abhandlung: Traité des lignes du 3e ordre, Acad. de Paris 1729, in welcher erstmals die Differentialrechnung zur Untersuchung unendlich ferner Kurvenzweige Anwendung findet. Nicole zeigt, dafs, je nachdem für einen unendlich fernen Punkt, schiefe Asymptotenrichtung vorausgesetzt, die Subtangente endlich oder unendlich ist, der Kurvenast einen hyperbolischen oder parabolischen Verlauf nimmt, den ersten Fall betreffend, ergiebt sich ihm die Lage der Zweige zur Asymptote durch Ermittlung der endlichen Schnittpunkte mit einer zur Asymptotenrichtung parallelen Sehnenschar; sind die Asymptoten den Axen parallel, so gebraucht er das rein analytische Verfahren und untersucht die Kurvengleichung, ob für eine endliche bez. unendliche Koordinate die andere Koordinate unendlich wird und gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annimmt. Aus diesen Betrachtungen folgert er, dafs alle Kurven ungerader Ordnung mindestens zwei entgegengesetzt gerichtete hyperbolische oder parabolische Zweige besitzen (pg. 198). Endlich giebt Nicole, was selbst Stirling nicht zu zeigen vermocht hatte, in seiner Abhandlung: Manière d'engendrer dans un corps solide toutes les courbes du 3e ordre, Acad. de Paris 1731, pg. 494, gleichzeitig mit Clairaut (ibid. pg. 483), aber unabhängig von letzterem, einen ersten und zwar rein analytischen Beweis der von Newton in Kap. V der Enumeratio ausgesprochenen Genesis curvarum per umbras, dafs sämtliche Kurven dritter Ordnung durch Projektion der fünf einfachsten Spezies, der sogenannten divergenten Parabeln dritter Ordnung, von einem Punkt auf eine Ebene, also ähnlich wie die Kurven zweiter Ordnung durch ebene Schnitte der einfachsten Kegelfläche zweiter Ordnung, des Kreiskegels, dargestellt werden können.

De Bragelongne.

11. Einen kühnen Gedanken, die Aufzählung der Kurven vierter Ordnung nach dem Vorgang der Enumeratio, sucht die weit angelegte Arbeit des Abbé De Bragelongne: Examen des lignes du 4e ordre, Acad. de Paris 1730 und 1731, von welcher jedoch nur die vorbereitenden, drei gröfsere Einzelabhandlungen umfassenden Untersuchungen über die bei den Kurven vierter Ordnung auftretenden singulären Punkte erschienen sind, zu verwirklichen.

Um einen Punkt (a, b) als mehrfachen Kurvenpunkt zu erkennen, verfährt De Bragelongne zunächst rein analytisch: er ermittelt, ob $x-a$ bez. $y-b$ mehrfache Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, und stellt bejahendenfalls die in den Punkt (a, b) als Ursprung transformierte Gleichung der Kurve auf, schneidet letztere durch die beide Nullpunkte verbindende Gerade $ay = bx$ und entscheidet alsdann die noch auftretenden Zweideutigkeiten durch den Schnitt der Kurve mit einer weiteren beliebig durch den neuen Ursprung gelegten Geraden $y = \lambda x$. Diese auf die Untersuchung von insgesamt fünf Gleichungen gestützten Betrachtungen ergeben ihm nach der Anzahl der zusammenfallenden Schnittpunkte eines Zweigs mit einer Schnittgeraden unendlich viele Arten von Flach- und Wendeflachpunkten (inflexions invisibles et visibles) und nach der Anzahl der mit Wendepunkten behafteten Zweige drei Arten von Doppelpunkten, vier Arten von dreifachen Punkten u. s. f. Den Entscheid über die Singularität des betreffenden $k$fachen Punkts giebt die Differentialrechnung nach der Beschaffenheit der Wurzeln des nach der Methode von Saurin aufgestellten $k$ten Differentials, aus welchem sich die Tangenten bestimmen, für $x = a$ und $y = b$ und zwar findet er fünf Doppelpunkte I. Art: Gewöhnlicher Doppelpunkt (point double ordinaire), Spitze I. Art (point de rebroussement), isolierter Punkt I. Art (point conjugué), Oskulation, d. h. Selbstberührung von aufsen und isolierter Punkt II. Art (Lemniscate infiniment petite), wobei Spitze I. Art und Oskulation, die beide zusammenfallende Tangenten haben, durch die Zahl drei bez. vier der mit der Tangente zusammenfallenden Kurvenschnittpunkte unterschieden werden, ferner vier dreifache Punkte I. Art: Gewöhnlicher dreifacher Punkt (point triple ordinaire), Spitze I. Art und isolierter Punkt I. Art mit je einem hindurchgehenden parabolischen Zweig (point triple invisible provenu d'une ovale adhérente), endlich der Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit). Wie mangelhaft die Aufzählung dieser Punkte noch ist, zeigt ein Vergleich mit der von De Gua auf pg. 142 gegebenen, die in zuvor nie erreichter Vollständigkeit und Ausdehnung mit einziger Ausnahme der Schnabelspitze und deren Kombinationen sämtliche mehrfachen und singulären Punkte bis einschliefslich der Kurven fünfter Ordnung umfafst, insbesondere hat De Gua

von den als Doppelpunkten zählenden Selbstberührungspunkten, wenn er auch die Schnabelspitze nicht gelten läfst, die erste richtige Auffassung und unterscheidet scharf drei Fälle:

Selbstberührung von aufsen oder „Oskulation“

$$(y^2 - 2px)(y^2 + 2qx) = 0,$$

Selbstberührung von innen oder „Embrassement“

$$(y^2 - 2px)(y^2 - 2qx) = 0,$$

deren nähere Untersuchung in dem besonderen Fall $p = q$, der zur Schnabelspitze führt, ihm nicht gelingt, und

Selbstberührung zweier imag. konjugierter Zweige

$$(y^2 - 2pix)(y^2 + 2pix) = 0$$

oder isolierter Punkt II. Art, den De Bragelongne zu speziell auffafst, indem allerdings die beiden eine Lemniskate bildenden Ovale beim Verschwinden eine derartige Berührung eingehen.

Ist der $k$fache Punkt (a, b) erst zu bestimmen, so geschieht dies im Anschlufs an das De l'Hospitalsche Verfahren zur Ermittlung unbestimmter Werte: Die k verschiedenen abwechselnd gleichen Zähler und Nenner der $k-1$ Brüche, die man erhält, wenn man $k-1$mal jenes Verfahren der Differentiation von Zähler und Nenner der unbestimmten Brüche $\frac{dy}{dx}$ wiederholt (Acad. de Paris 1731, pg. 41), d. h. in unserer heutigen Ausdrucksweise, die k partiellen Differentialquotienten des $(k-1)$ten Differentials der Kurvengleichung betrachtet De Bragelongne als Hilfskurven (courbes auxiliaires) und ermittelt ihre gemeinsamen Schnittpunkte, befriedigen diese auch die gegebene Gleichung $f(x, y) = 0$, so sind sie, schliefst er, $k$fache Punkte der Kurve. Er unterläfst also, zu untersuchen, ob die erhaltenen Lösungen auch den übrigen $\frac{k}{2}(k+1) - 1 - k$ partiellen Differentialquotienten der $k-2$ ersten Differentiale genügen, was allerdings bei sämtlichen Beispielen De Bragelongnes infolge der speziellen Form der Kurvengleichungen zufällig statthat, eine Ungenauigkeit, auf die De Gua ebenfalls aufmerksam macht, indem er zugleich erstmals die strenge Forderung des Verschwindens sämtlicher $\frac{k}{2}(k+1) - 1$ partiellen Differentialquotienten der $k-1$ ersten Differentiale zusammen mit $f(x, y) = 0$ als eindeutige und hinreichende Bedingung für die Existenz des $k$fachen Punkts ausspricht (Usages pg. 240). Hat einer der Zweige des $k$fachen Punkts in diesem Punkt einen Wendepunkt, so findet ihn De Bragelongne als derjenigen der k Tangenten zugehörig, welche die Kurve in $k+2$ zusammenfallenden Punkten schneidet; die Aufsuchung für sich allein auftretender Wendepunkte, etwa nach dem Verfahren von De l'Hospital, ebenso wie die Untersuchung unendlich ferner Äste beschäftigen ihn nicht.

Den von De Bragelongne herrührenden, überaus fruchtbaren und rein analytischen Gedanken der Transformation zur Untersuchung singulärer Stellen nimmt später De Gua erfolgreich wieder auf, indem er seine Betrachtungen vorteilhaft auf eine einzige Transformationsgleichung beschränkt, die er gewandt in der Form der Taylor'schen Reihe aufstellt. Dafs De Bragelongne der Differentialmethode den ausgesprochenen Vorzug vor dem Transformationsverfahren giebt, mag in der Umständlichkeit und geringen Übersichtlichkeit begründet sein, wie er dieses Verfahren anwandte; jedenfalls aber verdankt er den tieferen Einblick in die analytische Form der Kurvengleichung nur seiner Methode der Transformation, dafür ist eines der bezeichnendsten Beispiele (art. 81) die Aufstellung der Gleichung einer Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten auf der Abscissenaxe, in der Form
$$y^4+(dx+e)y^3+(fx^2+gx+h)y^2+k(x-a)(x-b)(x-c)y+m(x-a)^2(x-b)^2=0$$
und die Ableitung der Bedingung für die Existenz eines dritten Doppelpunkts dieser Kurve. An dieser Stelle schliefst er auch durch Induktion aus der Anzahl 1, 3, 6 u. s. f. der möglichen Doppelpunkte einer Kurve dritter, vierter, fünfter Ordnung u. s. f. auf die Maximalzahl $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ der Doppelpunkte einer algebraischen Kurve und beansprucht hierfür das Recht der Priorität, das jedoch Mac Laurin zuzuerkennen ist, der diese Zahl mit Hilfe seiner algebraischen Schnittpunktsätze ermittelt (Geometria organica, Sectio V, Lemma III, Coroll. IV).

De Gua.

12. De Bragelongne's Examen beschliefst die Reihe der kurventheoretischen Arbeiten der Vorgänger De Guas. Abgesehen von Descartes hat aufser der Enumeratio und den Arbeiten Saurins diese Schrift am meisten auf De Gua eingewirkt, wohl nicht allein durch die in ihr ausgesprochenen analytischen Gedanken, sondern ebenso durch die an die Enumeratio erinnernde Mannigfaltigkeit der Gestalten der Kurven vierter Ordnung, die schon durch das blofse Auftreten der durch Variation der Konstanten erhaltenen singulären Punkte dieser Kurven erreicht wird. Zum Unterschied jedoch gegen sämtliche früheren Auffassungen, die einesteils der analytischen Kurventheorie die Rolle einer Hilfswissenschaft der Algebra zuweisen, indem die Kenntnis der Kurven nur dazu diene, Probleme d. h. höhere algebraische Gleichungen aufzulösen (graphische Methode), eine Ansicht, die noch Newton mit Descartes teilt (Enumeratio Cap. VII: Constructio aequationum per descriptionem curvarum), andernteils durch die Künstlichkeit der Methoden oder deren Schwerfälligkeit und die damit bedingte Einseitigkeit der Anwendung den inneren Zusammenhang zwischen algebraischer Form und geo-

metrischer Gestalt nur unvollständig klar legen, begründet De Gua dadurch, daſs er erstmals an Stelle der seitherigen Einzeluntersuchungen bestimmter Kurvenordnungen die Gleichung $n$ten Grades in x und y diskutiert, eine allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven als eines Wissenszweigs für sich und charakterisiert zugleich durch die bloſse Anwendung der Analysis des Descartes diese Methode als die natürlichste nicht nur insofern, als sie überhaupt genügt, die Kriterien für sämtliche gestaltliche Eigenschaften eindeutig mit Schärfe und Klarheit aufzustellen, sondern vor allem, weil sie ihre Ergebnisse aus der Form der Gleichung direkt entnimmt und hierdurch Algebra und Geometrie in unmittelbare Wechselbeziehung setzt. In einer Parallelen zwischen seiner und der Differentialmethode, anläſslich der Aufsuchung singulärer Punkte, zeigt er die Unzulänglichkeit der von De l'Hospital, Saurin und De Bragelongne gegebenen Begründungen, die sich auf das Wesen der Differentiale stützen, daſs jedes Differential der Kurvengleichung im Vergleich zu seinem vorhergehenden verschwindet; ihm dient deshalb die Differentialrechnung ohne jegliche geometrische Interpretation einzig als Rechnungsmethode für die leichtere Ausführung umständlicher algebraischer Operationen, als analytisches Hilfsmittel anerkennt er ihre ausschlieſsliche Herrschaft nur in der Anwendung auf transcendente Kurven, Rektifikation und Quadratur, Untersuchungen, bei denen die Analysis des Descartes als in der Natur ihres Wesens begründet versagen muſs, die daher De Gua auch von seinen Betrachtungen ausschlieſst.

Indem De Gua die zu untersuchende Singularität (p, q) mit Hilfe der Transformationsgleichungen (Fig. 1)

$$x = p + z + nu, \qquad y = q + mu$$

zum Ursprung eines neuen Koordinatensystems macht und die Ordinatenaxe U desselben drehbar annimmt, gelingt es ihm, frei über die Tangenten des singulären Punktes zu verfügen und unter Benutzung des mit Unrecht nach Cramer benannten analytischen Dreiecks, in welches De Gua das Newton'sche Parallelogramm zweckmäſsig umgestaltet (von De Gua als triangle algébrique, später von Cramer als triangle analytique bezeichnet, siehe 19), die Näherungskurven für die Zweige des singulären Punkts im Ursprung in der heute noch üblichen Weise aufzustellen.

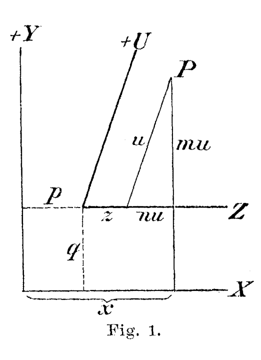


Fig. 1.

Er erkennt, daſs der die Singularität des Ursprungs darstellende Term in ebensoviel Faktoren von der Form

$$y^m = A x^n$$

(m und n ganze positive Zahlen) zerfällt, als Zweige vorhanden sind, daſs

diese Faktoren also die parabolischen Näherungskurven der einzelnen Zweige darstellen; dafs letztere aber auch teilweise imaginär werden können, übersieht De Gua deshalb, weil er zur Definition eines Zweigs den ersten Term Ax^n für hinreichend hält, dem gegenüber wegen der Kleinheit von x alle folgenden höheren Terme vernachlässigt werden können, eine Ansicht, die Euler erstmals widerlegt (Mém. de Berlin 1749, pg. 203), indem er zeigt, dafs für gewisse Werte von x wohl das erste Glied einer Potenzreihe reell, das zweite jedoch imaginär sein könne und also gegen das erste nicht vernachlässigt werden dürfe, wie dies gerade im Fall der Schnabelspitze zutrifft, wo die Entwicklung

$$y = Ax^2 \pm Bx^{\frac{5}{2}}$$

nur für positive Werte von x reell ist. Ein grofser Fortschritt aber ist nun, dafs De Gua sich nicht auf die Untersuchung der einen, das Verhalten der Kurve im Ursprung charakterisierenden Dreiecksecke beschränkt, die beiden anderen Ecken geben ihm den Verlauf der Kurve in den unendlich fernen Punkten der Koordinatenaxen und der sie verbindende, das Dreieck abschliefsende Streckenzug die den anderen unendlich fernen Punkten zustrebenden Äste. Aus diesen Betrachtungen findet er, dafs in gleicher Weise, wie endliche Zweige sich nur durch dreierlei Punkte hindurch fortsetzen (vgl. 9), auch nur drei Arten von unendlich fernen Zweigen, hyperbolischen sowohl als parabolischen, bestehen, eine Analogie, die ihn veranlafst, den Ursprung des Koordinatensystems ins Unendliche zu verlegen. Dies erreicht er geometrisch durch die schon von Nicole richtig aufgefafste Newton'sche Genesis curvarum per umbras (vgl. 10): er erzeugt sämtliche Arten unendlich ferner Zweige als zentralprojektive Bilder der Zweige eines im Endlichen liegenden Ursprungs und definiert somit erstmals alle in ihrem Verlauf von dem der konischen Hyperbel abweichenden unendlich fernen Äste als singuläre Punkte; algebraisch vermittelt ihm diese zunächst räumliche kollineare Verwandtschaft die lineare Transformation

$$x = \frac{1}{z}, \qquad y = \frac{u}{z},$$

durch welche für die transformierte Kurve, wenn sie in der Ebene der ursprünglichen Kurve dargestellt wird, nur die Lage des alten Koordinatensystems sich ändert, indem die den ursprünglichen Nullpunkt charakterisierende Ecke des analytischen Dreiecks mit einer der beiden anderen Ecken sich vertauscht, während die projektiven Eigenschaften sämtlich erhalten bleiben. Mit dieser gleichwertigen Auffassung sämtlicher Ecken des analytischen Dreiecks nähert sich De Gua schon dem Gedanken der Einführung

homogener Koordinaten, den jedoch erst Möbius in seinem baryzentrischen Calcul verwirklichte (1827).

Eines der schönsten Ergebnisse der projektiven Betrachtungen De Guas ist der Satz über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung. Die von Newton in der Enumeratio angegebene Eigenschaft der mit drei Paaren hyperbolischer Zweige behafteten Kurven dritter Ordnung, der sog. Hyperbolae redundantes, dafs, wenn zwei dieser Paare einen Durchmesser haben, d. h. auf derselben Seite der Asymptote verlaufen, das dritte Paar notwendig dieselbe Lage zur Asymptote hat, erkennt De Gua, indem er die unendlich ferne Gerade ins Endliche projiziert und jene besondere Art hyperbolischer Zweige als unendlich ferne Wendepunkte deutet, als einen Sonderfall der allgemeinen Eigenschaft der Kurven dritter Ordnung, dafs, wenn dieselben zwei Wendepunkte besitzen, sie noch einen dritten haben müssen, der mit den beiden ersten auf einer Geraden liegt. Der Ursprung dieses auf pg. 225 erstmals von De Gua ausgesprochenen Satzes, den De Gua aufserdem auf pg. 315 rein analytisch beweist, wird gewöhnlich fälschlicherweise auf die acht Jahre nach den Usages de l'analyse erschienene Algebra des Mac Laurin zurückgeführt, in dessen Anhang er sich, aber nur mit Hilfe der Differentialrechnung, bewiesen findet.

Auch in algebraischen Fragen, im besonderen in Bezug auf Elimination, zeigt De Gua eine originale Auffassung. Statt der von Newton in der Arithmetica universalis, pg. 73, aufgestellten Tabelle der Resultanten zweier Gleichungen bezw. zweiten, zweiten und dritten, dritten Grads einer Veränderlichen benutzt De Gua eine durchaus elementare Methode, die zwar schwerfällig ist, aber sicher zum Ziel führt, weshalb man neuerdings wieder auf sie zurückgreift, wenn es sich um strenge Begründung der Sätze über die Resultante handelt: er eliminiert eine Veränderliche aus zwei Gleichungen beliebig hohen Grads nach dem Kettenbruchverfahren, das schon Euklid zur Ermittlung des gröfsten gemeinschaftlichen Teilers anwendet, die Bedingung für eine gemeinschaftliche Wurzel d. h. die Resultante ist alsdann der Rest, der sich am Schlusse einstellt. Das Leibniz'sche Verfahren, das sich auf die Elimination mehrerer Veränderlicher aus einem System linearer Gleichungen gründet, scheint, obwohl es neben der Newton'schen Tabelle die einzige damalige Kenntnis bezüglich der Herstellung der Resultante bildet, De Gua nicht bekannt gewesen zu sein.

Für das Verständnis der analytischen Untersuchungen De Guas bedarf es zunächst einiger Hilfsbetrachtungen.

II. Abschnitt.

Hilfsbetrachtungen.

Die Bildung der Resultante.

13. Die vor De Gua bekannten Methoden sind diejenigen von Newton und Leibniz. Auf die von Newton aufgestellte Tabelle der Resultanten der Gleichungen bis zum dritten Grad (Arithmetica universalis pg. 73) nimmt De Gua öfters Bezug.

Die Reduktionsmethode von Newton.

14. Dieselbe besteht darin, daſs die beiden gegebenen Gleichungen je zu einer dritten von niedererem Grad kombiniert werden, bis man schlieſslich zu zwei linearen Gleichungen gelangt: Man berechne aus jeder der beiden gegebenen Gleichungen die höchste Dimension der zu eliminierenden Gröſse, nachdem man zuvor nötigenfalls durch Multiplikation mit einer passenden Potenz derselben diejenige der beiden Gleichungen, die niedereren Grades ist, auf den Grad der anderen erhöht hat, und setze diese beiden Werte einander gleich, so hat man eine Gleichung (A) von niedererem Grade; indem man diese wieder mit einer der beiden gegebenen in derselben Weise kombiniert, erhält man eine zweite von niedererem Grade (B), die nun mit jener zuerst abgeleiteten (A) zu kombinieren ist u. s. f.

Erstes Beispiel. Aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

$$fx^2 + gx + h = 0 \tag{2}$$

folgt

$$x^2 = -\frac{bx+c}{a} \quad \text{und} \quad x^2 = -\frac{gx+h}{f},$$

somit

$$\frac{bx+c}{a} = \frac{gx+h}{f},$$

woraus die gemeinschaftliche Wurzel von (1) und (2)

$$x = \frac{ah - cf}{bf - ag}$$

und somit durch Einsetzen in (1) die Resultante

(3) $$a(ah - cf)^2 + b(ah - cf)(bf - ag) + c(bf - ag)^2 = 0,$$

oder nach Vereinfachung

(3a) $$(ah - cf)^2 - (ag - bf)(bh - cg) = 0.$$

Zweites Beispiel. Die Resultante zweier Gleichungen zweiten und dritten Grades:

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2) $$fx^2 + gx + h = 0$$

ergiebt sich wie folgt:

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2a) $$fx^3 + gx^2 + hx = 0,$$

woraus

$$x^3 = -\frac{bx^2 + cx + d}{a} \quad \text{und} \quad x^3 = -\frac{gx^2 + hx}{f},$$

somit

(3) $$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{gx^2 + hx}{f},$$

womit die Aufgabe zurückgeführt ist auf den eben behandelten Fall zweier quadratischer Gleichungen:

(3) $$(bf - ag)x^2 + (cf - ah)x + df = 0,$$

(3) $$fx^2 + gx + h = 0.$$

Drittes Beispiel: Die beiden kubischen Gleichungen

(1) $$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

(2) $$fx^3 + gx^2 + hx + k = 0$$

geben

$$x^3 = -\frac{bx^2 + cx + d}{a} \quad \text{und} \quad x^3 = -\frac{gx^2 + hx + k}{f},$$

somit

$$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{gx^2 + hx + k}{f},$$

oder

(3) $$(bf - ag)x^2 + (cf - ah)x + (df - ak) = 0,$$

oder

(3a) $$(bf - ag)x^3 + (cf - ah)x^2 + (df - ak)x = 0$$

und somit aus (1) und (3a)

(4) $$\frac{bx^2 + cx + d}{a} = \frac{(cf - ah)x^2 + (df - ak)x}{bf - ag},$$

womit die Aufgabe wieder zurückgeführt ist auf den zuerst behandelten Fall zweier quadratischer Gleichungen:

$$(4)\qquad (b(bf-ag)-a(cf-ah))x^2+(c(bf-ag)-a(df-ak))x+d(bf-ag)=0,$$

$$(3)\qquad (bf-ag)\cdot x^2+(cf-ah)\cdot x+df-ak=0.$$

Anmerkung: Mit diesen Ergebnissen gelingt die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Veränderlichen bis zum dritten Grade, z. B. aus

$$(1^*)\qquad Ax^3+Bx^2y+Cxy^2+Dy^3+Fx^2+Gxy+Hy^2+Kx+Ly+M=0,$$

$$(2^*)\qquad A'x^3+B'x^2y+C'xy^2+D'y^3+F'x^2+G'xy+H'y^2+K'x+L'y+M'=0,$$

indem man sie nach fallenden Potenzen der zu eliminierenden Veränderlichen, etwa x, ordnet, wie folgt

$$(1a)\qquad Ax^3+(By+F)x^2+(Cy^2+Gy+K)x+(Dy^3+Hy^2+Ly+M)=0,$$

$$(2a)\qquad A'x^3+(B'y+F')x^2+(C'y^2+G'y+K')x+(D'y^3+H'y^2+L'y+M')=0,$$

so dafs in Übereinstimmung mit (1) und (2) in (4) und (3) zu setzen ist:

$$a=A \qquad f=A'$$

$$b=By+F \qquad g=B'y+F'$$

$$c=Cy^2+Gy+K \qquad h=C'y^2+G'y+K'$$

$$d=Dy^3+Hy^2+Ly+M \qquad k=D'y^3+H'y^2+L'y+M',$$

womit die Resultante aus (4) und (3), d. h. das x-Eliminat aus (1*) und (2*) sich als Gleichung 9. Grades in y ergiebt.

Die Methode der unbestimmten Koeffizienten von Leibniz.

15. Hat man zwei Gleichungen desselben Grades, so multipliziere man beide mit einem unbestimmten Ausdruck vom nächst niedereren Grad, der so beschaffen ist, dafs die höchsten Potenzen beider Gleichungen gleiche Koeffizienten und entgegengesetztes Vorzeichen erhalten. Durch Addition der Produkte entsteht eine Gleichung, deren einzelne Terme man gleich Null setze. Man erhält dann eine Gleichung mehr als unbestimmte Koeffizienten vorhanden sind und zwar sind diese Gleichungen linear. Hiermit ist das Problem zurückgeführt auf die Elimination aus einem System von linearen Gleichungen, das Leibniz löst durch eine systematische Bezeichnung der Koeffizienten durch Stellenzeiger, ein Kunstgriff, der Leibniz bekanntlich zum Erfinder der Determinanten gemacht hat (Brill, Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1892/93, pg. 126).

Erstes Beispiel:

$$(1)\qquad ax^2+bx+c=0,$$

$$(2)\qquad fx^2+gx+h=0,$$

woraus

$$(ax^2 + bx + c)(fx + \alpha) + (fx^2 + gx + h)(-ax + \beta) = 0\,,$$

oder

$$(a\alpha + f\beta + bf - ag)x^2 + (b\alpha + g\beta + cf - ah)x + c\alpha + h\beta = 0\,,$$

somit

$$(3) \qquad a\alpha + f\beta + bf - ag = 0\,,$$

$$(4) \qquad b\alpha + g\beta + cf - ah = 0\,,$$

$$(5) \qquad c\alpha + h\beta \qquad\qquad = 0\,,$$

und daher die Resultante

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a & f & bf - ag \\ b & g & cf - ah \\ c & h & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

oder, entwickelt

$$(bf - ag)(bh - cg) + cf(cf - ah) - ah(cf - ah) = 0\,,$$

oder

$$(6\,\mathrm{a}) \qquad (cf - ah)^2 - (ag - bf)(bh - cg) \qquad = 0\,.$$

Meist formt man die Determinante (6) um in die sog. Rückungsdeterminante. Man erhält aus (6)

$$\begin{vmatrix} a & f & b \\ b & g & c \\ c & h & a \end{vmatrix} \cdot f - \begin{vmatrix} a & f & g \\ b & g & h \\ c & h & f \end{vmatrix} \cdot a = a \cdot \begin{vmatrix} a & g & f \\ b & h & g \\ c & f & h \end{vmatrix} + f \cdot \begin{vmatrix} b & a & f \\ c & b & g \\ a & c & h \end{vmatrix}\,,$$

oder

$$(6\,\mathrm{b}) \qquad = \begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot \\ b & a & g & f \\ c & b & h & g \\ a & c & f & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot \\ b & a & g & f \\ c & b & h & g \\ \cdot & c & \cdot & h \end{vmatrix} = 0\,.$$

Zweites Beispiel: Entsprechend ergiebt sich die Resultante aus zwei Gleichungen verschiedenen Grades, z. B. vom dritten und zweiten:

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

$$(2) \qquad fx^2 + gx + h = 0\,,$$

indem diejenige niedereren Grades durch Hinzufügen der mit Null behafteten fehlenden Potenzen auf den höheren Grad ergänzt wird. Alsdann ergiebt sich

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(0 \cdot x^2 + \alpha x + \beta) + (0 \cdot x^3 + fx^2 + gx + h)(\alpha x^2 + \gamma x + \delta) = 0,$$

oder

$$(a\alpha + af)x^4 + (b\alpha + a\beta + f\gamma + ag)x^3 + (c\alpha + b\beta + g\gamma + f\delta + ah)x^2$$
$$+ (d\alpha + c\beta + h\gamma + g\delta)x + (d\beta + h\delta) = 0$$

und somit das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrl}
(3) & a\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad + af & = 0\,, \\
(4) & b\alpha + a\beta + f\gamma \qquad\quad + ag & = 0\,, \\
(5) & c\alpha + b\beta + g\gamma + f\delta + ah & = 0\,, \\
(6) & d\alpha + c\beta + a\gamma + g\delta \qquad\quad & = 0\,, \\
(7) & d\beta \qquad\quad + h\delta \qquad\quad & = 0\,,
\end{array}$$

das nur bestehen kann unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & \cdot & \cdot & f \\ b & a & f & \cdot & g \\ c & b & g & f & h \\ d & c & h & g & \cdot \\ \cdot & d & \cdot & h & \cdot \end{vmatrix} = 0\,,$$

woraus durch Umstellung der drei letzten Vertikalreihen die Resultante in der Form der Rückungsdeterminante

$$\begin{vmatrix} a & \cdot & f & \cdot & \cdot \\ b & a & g & f & \cdot \\ c & b & h & g & f \\ d & c & \cdot & h & g \\ \cdot & d & \cdot & \cdot & h \end{vmatrix} = 0\,.$$

Das Kettenbruchverfahren von De Gua.

16. Die beiden quadratischen Gleichungen

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \tag{1}$$

$$fx^2 + gx + h = 0 \tag{2}$$

ergeben folgende Staffelrechnung:

$$\begin{array}{r|l|l}
ax^2 + bx + c & fx^2 + gx + h & \dfrac{f}{a} \\
 & fx^2 + \dfrac{bf}{a}x + \dfrac{cf}{a} & \\ \hline
\left(g - \dfrac{bf}{a}\right)x + \left(h - \dfrac{cf}{a}\right) & ax^2 + bx \qquad\qquad + c & \dfrac{a}{g - \dfrac{bf}{a}}x + \dfrac{a}{ag-bf}\left(b - a\cdot\dfrac{ah-cf}{ag-bf}\right) \\
 & ax^2 + a\cdot\dfrac{h - \dfrac{cf}{a}}{g - \dfrac{bf}{a}}x & \\ \hline
\end{array}$$

$$\left(b - a\cdot\frac{ah-cf}{ag-bf}\right)x + c$$

$$\left(b - a\cdot\frac{ah-cf}{ag-bf}\right)x + \frac{ah-cf}{ag-bf}\left(b - a\cdot\frac{ah-cf}{ag-bf}\right)$$

somit Rest: $$c - \frac{ah-cf}{ag-bf}\left(b - a\cdot\frac{ah-cf}{ag-bf}\right) = 0\,, \tag{3}$$

oder $$c(bf-ag)^2+b(ah-cf)(bf-ag)+a(ah-cf)^2=0,$$
oder

(3a) $$(ah-cf)^2-(ag-bf)(bh-cg)=0$$

in Übereinstimmung mit (14) als Bedingung einer gemeinschaftlichen Wurzel der gegebenen Gleichungen (1) und (2), d. h. deren Resultante. Diese Wurzel ergiebt sich aus dem letzten Divisor, dem gröfsten gemeinschaftlichen Teiler von (1) und (2):

$$\left(g-\frac{bf}{a}\right)x+\left(h-\frac{cf}{a}\right)=0$$

zu

$$x=\frac{ah-cf}{bf-ag}$$

(vgl. 61, b).

Die Hudde'sche Regel und die Bildung der Diskriminante.

17. *Satz von Hudde:* Multipliziert man die einzelnen Glieder einer nach fallenden Potenzen der Veränderlichen geordneten Gleichung $n$ten Grades, die k gleiche Wurzeln hat, mit den entsprechenden Gliedern einer beliebigen abnehmenden arithmetischen Reihe, so hat die neue Gleichung noch $k-1$ jener gleichen Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.

Wählt man zunächst die besondere, von n bis 0 abnehmende arithmetische Reihe, so lautet die aus der vorliegenden Gleichung

(1) $$f(x)=Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\cdots+Lx+M=0$$

nach der Hudde'schen Regel abgeleitete neue Gleichung

$$n\cdot Ax^n+(n-1)Bx^{n-1}+\cdots+Lx=0,$$

oder

$$(n\cdot Ax^{n-1}+(n-1)Bx^{n-2}+\cdots+L)x=0,$$

oder

(2) $$n\cdot Ax^{n-1}+(n-1)Bx^{n-2}+\cdots+L=0,$$

d. h. man erhält das gleich Null gesetzte erste Differential $f'(x)$ der gegebenen Gleichung. Nimmt man nunmehr die Multiplikation von (1) mit einer beliebigen abnehmenden Reihe

$$m,\quad m-1,\quad m-2,\quad \cdots m-n$$

vor, so entspricht dies einer Multiplikation mit

$$(m-n)+n,\quad (m-n)+n-1,\quad (m-n)+n-2,\quad \cdots (m-n)+0,$$

d. h. einer Multiplikation mit einer beliebigen Gröfse $m-n$ und der besonderen von n bis 0 abnehmenden Reihe, die Hudde'sche Gleichung hat somit die Form

$$H(x)=(m-n)f(x)+f'(x)=0$$

und reduziert sich daher wegen (1) wieder auf

(2a) $$f'(x) = 0.$$

Hieraus folgt, wie Guisnée zuerst gezeigt hat (Acad. de Paris 1706, pg. 50), die Identität mit dem Differentiationsprozeſs: die Hudde'sche Regel ist die allgemeinste Art der Differentiation einer rationalen algebraischen Gleichung.

Hat somit die gegebene Gleichung k gleiche Wurzeln, d. h. ist sie von der Form

(1*) $$f(x) = A(x-\alpha)^k \cdot \varphi(x) = 0,$$

so folgt

$$f'(x) = Ak(x-\alpha)^{k-1} \cdot \varphi(x) + A(x-\alpha)^k \cdot \varphi'(x) = 0,$$

oder

$$= A(x-\alpha)^{k-1} \cdot \{k \cdot \varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)\} = 0,$$

oder

(2*) $$H(x) = A(x-\alpha)^{k-1} \cdot \psi(x) = 0.$$

d. h. die Hudde'sche Gleichung enthält $k-1$ dieser Wurzeln und bildet man von dieser Gleichung selbst wieder die Ableitung, so ist diese von der Form

(3*) $$\mathfrak{H}(x) \equiv H'(x) \equiv f''(x) = A(x-\alpha)^{k-2} \cdot \chi(x) = 0,$$

enthält also noch $k-2$ jener Wurzeln. Ist somit $x = \alpha$ eine Doppelwurzel der gegebenen Gleichung (1*), so ist sie noch eine einfache Wurzel der Hudde'schen Gleichung (2*) und die Bedingung, daſs diese beiden Gleichungen

(1*) $$f(x) = 0,$$

(2*) $$H(x) \equiv f'(x) = 0$$

eine gemeinsame Wurzel haben, d. h. ihre Resultante, die in diesem besonderen Fall als Diskriminante bezeichnet wird, ist zugleich die Bedingung einer Doppelwurzel der gegebenen Gleichung (1*); entsprechend ist die Bedingung einer dreifachen Wurzel von (1*) identisch mit der Bedingung einer gemeinsamen Wurzel der Gleichungen

(1*) $$f(x) = 0,$$

(2*) $$H(x) \equiv f'(x) = 0,$$

(3*) $$\mathfrak{H}(x) \equiv f''(x) = 0,$$

für deren gleichzeitiges Bestehen man drei von einander abhängige Diskriminanten, also zwei von einander unabhängige Bedingungen in den Koeffizienten der gegebenen Gleichung erhält u. s. f.

Um die zur Bildung der Diskriminante notwendige Hudde'sche Gleichung in der möglichst einfachen Form zu erhalten, benützt De Gua meist symmetrische arithmetische Reihen, wie

$$n, \quad n-1, \quad n-2, \quad \cdots 0 \cdots, \quad -(n-2), \quad -(n-1), \quad -(n),$$

oder Reihen, deren Endglied 0 ist.

Die lineare Transformation und das Taylor'sche Theorem.

18. Schon Bernoulli zeigt (vgl. 8), dafs die Newton'sche Entwicklung nach dem Binomiallehrsatz durch den Differentialprozefs ersetzt werden kann. Vergleicht man nämlich das $(k-1)$te Differential der Potenz x^n, d. h.

$$d_{k-1}x^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1},$$

wobei dx als konstant vorausgesetzt ist, mit dem $k$ten Glied der Entwicklung $(x+dx)^n$, in welche x^n übergeht durch Substitution von $x+dx$ an Stelle von x, also mit

$$\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}x^{n-k+1}\cdot dx^{k-1},$$

so stimmen beide Ausdrücke überein bis auf einen Faktor $(k-1)!$.

Das $k$te Glied des Binoms $(x+dx)^n$ ergiebt sich somit als das mit $(k-1)!$ dividierte $(k-1)$te Differential der Potenz x^n.

Diese Betrachtungen erweitert Saurin auf die Bildung der Gleichung $f(x+dx, y+dy)=0$ aus $f(x,y)=0$ und findet auf Grund der Untersuchung einzelner Beispiele, dafs die neue Gleichung sich darstellt als die Summe aus der ursprünglichen Gleichung und den bis zum Grad der Gleichung ansteigenden Differentialen, dagegen macht er auf die Division letzterer mit den von Bernoulli angegebenen Faktoren nicht aufmerksam, weil bei seinen Tangentenuntersuchungen die einzelnen Differentiale der Kurvengleichung nur für sich allein als Gleichungen in Betracht kommen. Erst De Gua giebt die genaue allgemeine Beziehung zwischen Differential und transformiertem Term für zwei Variable. Bildet man für irgend einen Term Ax^py^q der ursprünglichen Gleichung $f(x,y)=0$ einerseits die Transformation $A(x+dx)^p\cdot(y+dy)^q$

$$= A\left[x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}dx + \binom{p}{2}x^{p-2}ax^2 + \cdots + \binom{p}{p}dx^p\right]$$

$$\cdot\left[y^q + \binom{q}{1}y^{q-1}dy + \binom{q}{2}y^{q-2}dy^2 + \cdots + \binom{q}{q}dy^q\right],$$

andererseits die $(p+q)$ Differentiale

$$d_1 = A\left[px^{p-1}y^q dx + qx^py^{q-1}dy\right]$$

$$d_2 = A\left[p(p-1)x^{p-2}y^q dx^2 + 2pqx^{p-1}y^{q-1}dx\,dy + q(q-1)x^py^{q-2}dy^2\right] \text{ u. s. w.}$$

so zeigt sich, dafs nach Ausführung der Multiplikation der transformierte Term sich darstellt als die Summe aus dem ursprünglichen Term und den bis zur Dimension des Terms ansteigenden Differentialen, letztere dividiert mit den entsprechenden Fakultäten $1!\,2!\cdots$ bis $(p+q)!$; was somit für einen einzelnen Term der ursprünglichen Gleichung gilt, gilt für sämtliche

Terme derselben d. h. die transformierte Gleichung kann auf die Form gebracht werden:

$$f(x+dx, y+dy) = f(xy) + \frac{1}{1!}d_1 f(x,y) + \frac{1}{2!}d_2 f(x,y) + \cdots + \frac{1}{n!}d_n f(x,y),$$

außerdem ordnet De Gua die einzelnen Differentiale nach Potenzen von dx und dy und schreibt

$$d_1 f(x,y) = a_1\,dx + a_2\,dy,$$
$$d_2 f(x,y) = a_{11}\,dx^2 + a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dy^2,$$

wodurch die transformierte Gleichung schließlich die vollkommene Gestalt der Taylor'schen Reihe für zwei Variable annimmt:

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{dx}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) + \cdots.$$

Auf diese Entwicklung wird De Gua geführt einzig durch das Bestreben, die häufig wiederkehrenden linearen Transformationen, auf welchen fast sämtliche Schlußfolgerungen seiner analytischen Untersuchungen beruhen, rasch und übersichtlich durchzuführen, eine Aufgabe, die er mit diesem erstmals von ihm aufgestellten Hilfsmittel genau in der heutzutage üblichen Weise erledigt mit dem bloßen Unterschied, daß er die Koeffizienten a nicht als partielle Differentialquotienten zu berechnen weiß, sondern sie durch vollständige Differentiation ermittelt. Wird z. B. die Ordinatenaxe sich selbst parallel um den Abstand p verschoben, ist also, wenn die neuen Koordinaten mit z, u bezeichnet werden,

$$x = p + z, \qquad y = u,$$

so erhält man, wenn in der Taylor'schen Reihe x, y, dx, dy durch $p, u, z, 0$ ersetzt werden, die transformierte Gleichung der gegebenen Kurve $f(xy) = 0$ nach steigenden Potenzen der Abscisse z entwickelt, wie folgt:

$$\varphi(z,u) = f(p,u) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}z^n = 0.$$

Oder, wird z. B. die Kurve $f(x,y) = 0$ von einem durch einen beliebigen Punkt (p,q) gehenden Strahl geschnitten, wofür die Transformationsgleichungen in Polarkoordinaten lauten

$$x = p + r\cdot\cos\varphi, \qquad y = q + r\cdot\sin\varphi,$$

oder

$$x = p + nu, \qquad y = q + mu$$

mit der bei De Gua üblichen Bezeichnungsweise

$$r = u, \qquad \sin\varphi = m, \qquad \cos\varphi = n,$$

so ergiebt sich mit p, q, nu, mu an Stelle von x, y, dx, dy als Schnittpunktsgleichung

$$\psi(u) = f(p, q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} n + \frac{\partial f}{\partial y} m\right) u$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} nm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} m^2\right) u^2 + \cdots = 0.$$

Das algebraische Dreieck von De Gua.

19. Es scheint, daſs Newton durch die damals schon bekannte Lehre von den Dezimalbrüchen auf den Gedanken der Reihenentwicklung geführt wurde. Einen Vorgang hierfür bot ihm die Abhandlung von Merkator über die Quadratur der Hyperbel, worin dieser die elementaren Rechenoperationen von der Arithmetik auf die Algebra überträgt, indem er statt der absteigenden Potenzen von 10 die nach Dimensionen geordneten Potenzen der unbestimmten Gröſse bis ins Unendliche nimmt. Wie der Vorteil in der Anwendung der Dezimalbrüche darauf beruht, daſs die Operationen mit gebrochenen Zahlen in der einfachsten Weise durch solche mit ganzen Zahlen ersetzt werden können, so zeigt Newton, wie mit Hilfe ähnlicher Entwicklungen komplizierte algebraische Ausdrücke in Bruchform oder Wurzelgröſsen, auch die Wurzeln nicht reiner Gleichungen auf die Form von unendlichen Reihen gebracht werden können, deren Glieder einfache Zähler und Nenner haben, also keine Schwierigkeit mehr bieten. Das Newton'sche Verfahren besteht nun in einer successiven Verbesserung eines ersten zunächst noch fehlerhaften Wurzelwerts. Um diesen zu finden (Opuscula Newtoni Isaaci, Methodus fluxionum et serierum infinitarum, pg. 41), sucht er aus den Gliedern, in denen y bezw. x nicht vorkommt, den hinsichtlich x bezw. y niedrigsten Term, also zwei Terme, für welche die Progression der Dimensionen beider Variabeln möglichst klein ist, und dazu noch alle Terme, deren Dimensionen in der gleichen Progression auftreten, wenn man letztere beliebig fortsetzt. Um diese Auswahl leichter treffen zu können, benutzt Newton die graphische Darstellung: er analysiert die Gleichung der Kurve mit Hilfe eines Diagramms, das heute noch klassische Bedeutung besitzt und nach seinem Erfinder als Newton'sches Parallelogramm bezeichnet wird (Fig. 3). Ordnet man in der jetzt üblichen Darstellungsweise (Fig. 2) die Glieder einer algebraischen Gleichung als Punkte zwei Axen zu, deren Einheiten nach Potenzen von x bezw. y fortschreiten, so sind sämtliche Glieder, die auf derselben Geraden liegen, von gleicher

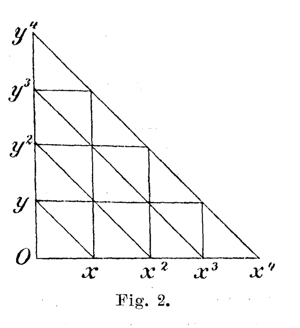


Fig. 2.

Ordnung (unendlich grofs bezw. unendlich klein), alle oberhalb bezw. unterhalb liegenden Glieder sind von höherer bezw. niederer Orduung. Der Beweis (nach Cramer) beruht darauf, dafs die Exponenten von x und y aller auf einer Geraden liegenden Glieder in arithmetischer Progression fortschreiten. Sind nämlich $Ax^m \cdot y^n$ und $Bx^{m+k} \cdot y^{n+l}$ zwei durch eine Gerade verbundene Glieder, deren Ordnung als gleich vorausgesetzt wird, für welche sich also die Kurvengleichung reduziert auf

$$(1) \qquad B x^{m+k} \cdot y^{n+l} = A x^m \cdot y^n \qquad \text{oder} \qquad x^k \cdot y^l = C,$$

so liegen, wenn der Einfachheit halber die Koeffizienten nicht geschrieben werden, sämtliche Glieder der Reihe

$$\cdots \; x^{m-2k} \cdot y^{n-2l}, \quad x^{m-k} \cdot y^{n-l}, \quad x^m \cdot y^n, \quad x^{m+k} \cdot y^{n+l}, \quad x^{m+2k} \cdot y^{n+2l}, \; \cdots$$

auf derselben Geraden wie die zu vergleichenden Terme und alle sind von derselben Ordnung, denn, dividiert man die Reihe mit $x^m \cdot y^n$, so resultiert die neue Reihe

$$\cdots \quad x^{-2k} \cdot y^{-2l}, \quad x^{-k} \cdot y^{-l}, \quad 1, \quad x^k \cdot y^l, \quad x^{2k} \cdot y^{2l}, \quad \cdots$$

und da 1 bezw. C endlich ist, so ist der Voraussetzung (1) gemäfs auch $x^k \cdot y^l$ und somit jedes Glied der letzten Reihe endlich, folglich alle Glieder der ersten Reihe von der Ordnung des Gliedes $x^m \cdot y^n$. Geht die Gerade durch das Glied x^r der X-Axe, so sind alle Glieder der Geraden von der Ordnung des Gliedes x^r; geht aber die Gerade zwischen x^r und x^{r+1} hindurch, so liegt die Ordnung der Glieder der Geraden zwischen derjenigen der Glieder x^r und x^{r+1}, d. h. alle oberhalb bezw. unterhalb der Geraden liegenden Glieder sind auch von höherer bezw. niederer Ordnung als die Glieder der Geraden selbst. Dieses Newton'sche Parallelogramm, in welchem ursprünglich jeder Term der Kurvengleichung durch den Diagonalschnittpunkt eines Parallelogramms bezw. Quadrats bezeichnet ist (Fig. 3), ändert De Gua,

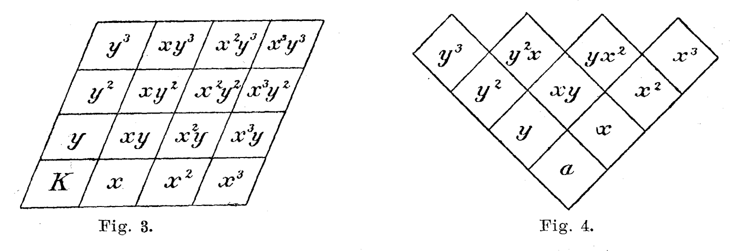


Fig. 3. Fig. 4.

der diese Darstellungsweise der Terme noch beibehält, behufs bequemerer Ordnung der Gleichung nach Potenzen der Veränderlichen, ab in ein Dreieck (le triangle algébrique, später von Cramer als triangle analytique bezeichnet), indem er die beiden Axen, die sog. Banden ohne x bezw. ohne y, unter 45^0 gegen die Horizontale stellt (Fig. 4), dann geben die horizontalen Reihen die nach

x sowohl als nach y und die zur Bande ohne y bezw. ohne x parallelen Reihen die nach y bezw. x geordnete Gleichung. Mit Hilfe dieses Dreiecks ermittelt De Gua in der heute noch üblichen Weise erstmals die Näherungskurven im Ursprung sowohl wie in den unendlich fernen Punkten der Koordinatenaxen oder in beliebigen anderen unendlich fernen Punkten nach folgender

Hauptregel: Legt man nach Einzeichnung der Glieder der Kurvengleichung das analytische Dreieck auf die Bande ohne x (ohne y), so sind für eine unendlich grofse bezw. unendlich kleine Abscisse (Ordinate) nur diejenigen Glieder als die gröfsten bezw. kleinsten zu betrachten, oberhalb bezw. unterhalb deren Verbindungsgeraden kein weiteres Glied der Gleichung sich befindet, und das gleich Null gesetzte Aggregat dieser Glieder, auf welches sich die Kurvengleichung reduziert, ist die Gleichung der Näherungskurve in dem durch die betreffenden Koordinatenextreme bestimmten Punkt (Ursprung, unendlich ferner Punkt einer Koordinatenaxe, beliebiger anderer Punkt der unendlich fernen Geraden).

De Gua behandelt nun insbesondere diejenigen Fälle, in welchen die direkte Anwendung des Newton'schen Parallelogramms bezw. des algebraischen Dreiecks zur Ermittlung der Näherungskurven nicht zum Ziel führt, was stets statt hat, sobald das Aggregat der Glieder höchster bezw. niederster Dimension vollständig ist. Hier transformiert De Gua vorher die gegebene Kurvengleichung:

$$f(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + \cdots + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n + \cdots = 0\,,$$

indem er die Ordinatenaxe in die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote bezw. Ursprungstangente dreht, setzt also

$$x = nu + z\,, \qquad\qquad y = mu\,,$$

wo $\frac{m}{n}$ eine der Wurzeln $\frac{y}{x}$ des gleich Null gesetzten Aggregats der Glieder höchster bezw. niederster Dimension ist, und erhält hierdurch die nach Potenzen von z entwickelte transformierte Gleichung

$$\varphi(z, u) = f(nu, mu) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n} z^n,$$

in welcher aufser dem konstanten Glied die höchste Potenz z^n bezw. die niederste Potenz von u verschwindet. Einfacher gestalten sich die Verhältnisse, wenn die höchsten bezw. niedersten Aggregate mehrfache oder gemeinsame Faktoren haben, wie z. B. bei der Kurve vierter Ordnung (Usages pg. 399)

$$\text{(I)} \qquad (u + z)^4 - 6az(u + z)^2 - 8a^2u^2 - 16a^2uz - 7a^2z^2 = 0\,,$$

wo das Newton'sche Parallelogramm allein wieder nicht genügt, indem es die Existenz eines Doppelfaktors des Aggregats der Glieder vierter und dritter

Dimension nicht zum Ausdruck bringt und nur die Richtung $(u+z)^4=0$ des unendlich fernen Punktes angiebt, nicht aber die Art desselben näher charakterisiert. Setzt man hier z. B. schiefwinklige unter 60^0 geneigte Axen voraus und bezieht die Kurve auf ein neues Koordinatensystem mit demselben Ursprung, aber einer gegen die Z-Axe unter 60^0 (gegen die U-Axe unter 120^0) gedrehten X-Axe, setzt also (Fig. 5)

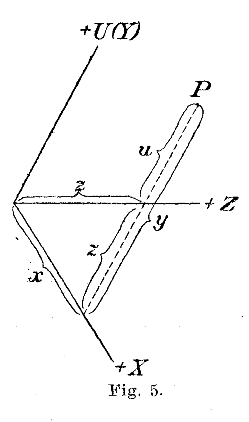


Fig. 5.

$$x=z, \qquad y=u+z,$$

so lautet die transformierte Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad y^4-6axy^2-8a^2y^2+a^2x^2=0$$

und das algebraische Dreieck ergiebt für $x=\infty$, $y=\infty$ aus

$$y^4-6axy^2+a^2x^2=0 \quad \text{oder} \quad y^2=(3\pm 2\sqrt{2})ax$$

die beiden in der Richtung der X-Axe gelegenen unendlich fernen parabolischen Punkte

$$\text{(III)} \qquad y^2=(3+2\sqrt{2})ax \quad \text{und} \quad y^2=(3-2\sqrt{2})ax.$$

Meist rechnet De Gua in solchen Fällen wie (I) die Transformation nicht durch, sondern schliefst aus der Beschaffenheit der ursprünglichen Gleichung ohne weiteres auf die Form der transformierten Gleichung und hieraus mittels des algebraischen Dreiecks auf den Verlauf der Kurve im Ursprung bezw. in den unendlich fernen Punkten.

Die binomischen Kurven: $x^m \cdot y^n = a$.

20. Nächst der Geraden haben die binomischen Kurven die einfachste Gleichungsform und werden daher zur Diskussion algebraischer Kurven als Näherungskurven verwendet. Je nachdem m und n von gleichem oder ungleichem Zeichen sind, hat man den Typus der Hyperbel oder denjenigen der Parabel.

I. Die binomischen Parabeln

$$x^m \cdot y^{-n} = C \qquad \text{oder} \qquad x^m = C \cdot y^n.$$

21. Hier können nach den einfachsten Repräsentanten drei Haupttypen unterschieden werden. Vorausgesetzt $m>n$, giebt

a) m gerade, n ungerade: $x^2=y$ die Ovalparabel (parabole conique),

b) m ungerade, n ungerade: $x^3=y$ die Wendeparabel (1^e parabole cubique),

c) m ungerade, n gerade: $x^3=y^2$ die Rückkehrparabel (2^e parabole cubique)

Der vierte Fall, m gerade und n gerade, reduziert sich durch Wurzelziehen auf die drei ersten Fälle. Jede dieser drei Haupttypen ist selbst wieder Ausgangsort für eine unendliche Anzahl von Varietäten, die mit dem betreffenden Haupttypus in der Art der Krümmung übereinstimmen und nur bezüglich des Grades derselben abweichen:

22. a) *Typus der gewöhnlichen Parabel:*

$x^2 = y$ erste Ovalparabel (parabole conique, point ordinaire) (Fig. 6),

$x^4 = y$ erste Flachpunktsparabel (point de serpentement, point de double inflexion) (Fig. 9),

$x^4 = y^3$ erste Spitzpunktsparabel (point de double pointe, Lemnisceros infiniment petit) (Fig. 14),

$x^6 = y$ zweite Flachpunktsparabel (point de quatre inflexions) (Fig. 11),

$x^6 = y^5$ zweite Spitzpunktsparabel (point de quatre pointes) (Fig. 17),

$x^8 = y$ dritte Flachpunktsparabel (point de six inflexions),

$x^8 = y^3$ zweite Ovalparabel mit dreifachem Punkt im Ursprung, letzterer ist eine Vereinigung des Spitzpunkts mit dem Flachpunkt (siehe Fig. 18) und nähert sich daher gestaltlich wieder dem Oval.

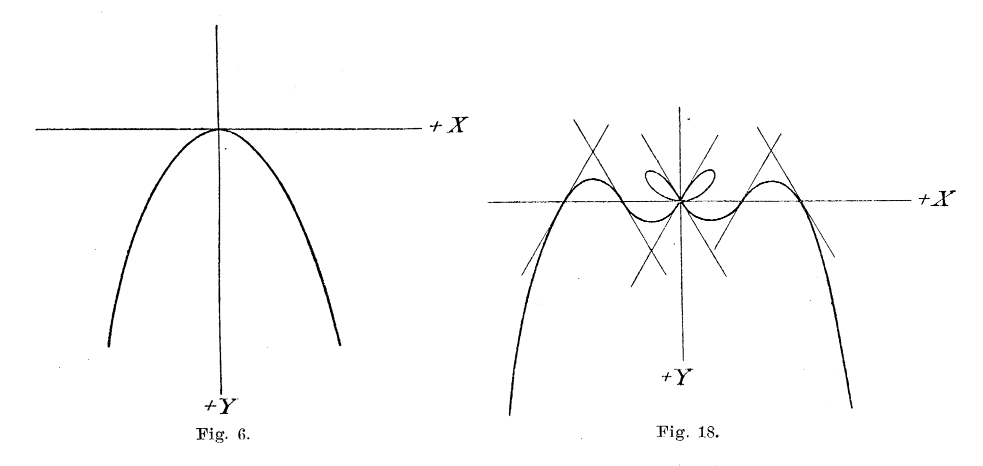


Fig. 6. Fig. 18.

Entstehung des Flachpunkts: Trennt man die vier auf der Abscissenaxe als Tangente im Ursprung zusammenfallenden Punkte der Flachpunktsparabel, am besten in symmetrischer Weise, so ist die allgemeinere, in Fig. 7 dargestellte Kurve

$$y = x^4 - bx^2 + c,$$

wobei $b^2 > 4c$. Für $c = 0$ fallen zwei dieser Schnittpunkte im Ursprung zusammen und die nach dem analytischen Dreieck diskutierte Kurve (Fig. 8)

$$y = x^4 - bx^2$$

geht schliefslich für $b = 0$ in die Flachpunktsparabel Fig. 9 über (vergl. Maupertuis).

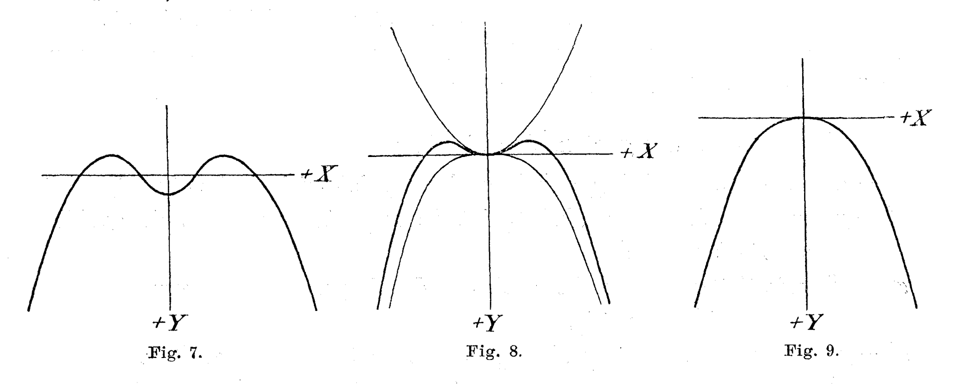


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9.

Die Entstehung der zweiten Flachpunktsparabel Fig. 11 veranschaulicht Fig. 10.

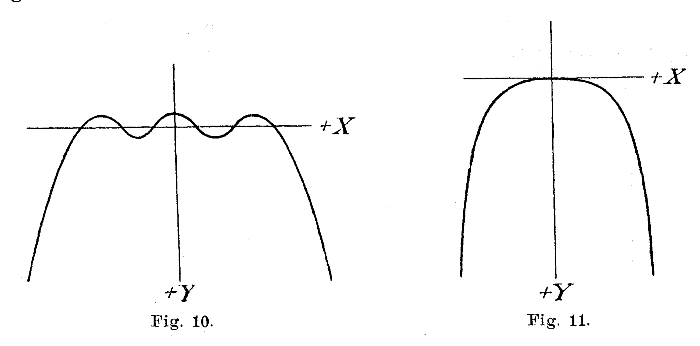


Fig. 10. Fig. 11.

Entstehung des Spitzpunkts: Trennt man die drei mit der Abscissenaxe im Ursprung zusammenfallenden Tangenten $y = 0$ in symmetrischer Weise, so entsteht die allgemeinere, nach dem analytischen Dreieck in Fig. 12 diskutierte Kurve

$$x^4 + (b^2x^2 - y^2)y = 0$$

mit $y = 0$, $y + bx = 0$, $y - bx = 0$ als Tangenten im Ursprung, einem dreifachen Punkt. Für $b = 0$ fallen die beiden letzten Tangenten mit der ersten zusammen, die beiden Schleifen verschwinden und der Ursprung wird zum Spitzpunkt (Fig. 14). Der Spitzpunkt geht somit aus dem allgemeinen dreifachen Punkt in analoger Weise hervor wie der Rückkehrpunkt aus dem Doppelpunkt und ist daher zum Unterschied gegen den Flachpunkt als Singularität zu betrachten: Jede Gerade durch den Spitzpunkt schneidet die Kurve in drei in diesem Punkt zusammenfallenden Punkten, die Tangente

sogar in vier, während der Flachpunkt nur als einfacher Punkt zählt, der nur von seiner Tangente in mehr als einem Punkt getroffen wird (vergl. die Entstehung des Spitzpunkts aus zwei Spitzen und einem Doppelpunkt Fig. 13 nach Maupertuis).

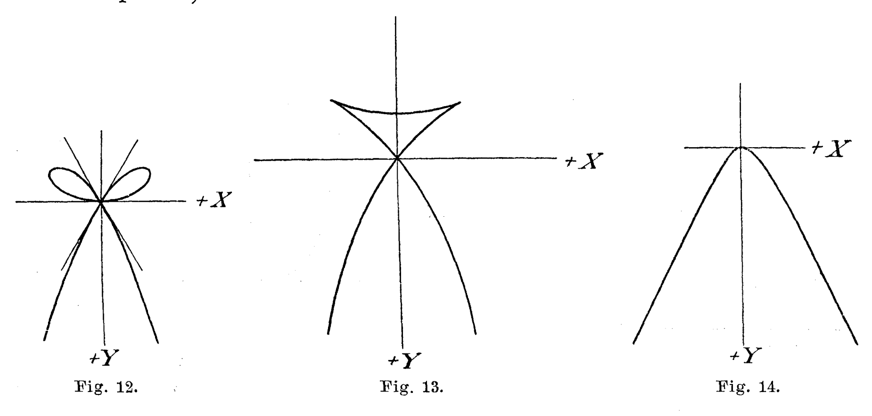


Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14.

Die Entstehung der zweiten Spitzpunktsparabel mit fünffachem Punkt im Ursprung veranschaulicht Fig. 15 bezw. 16.

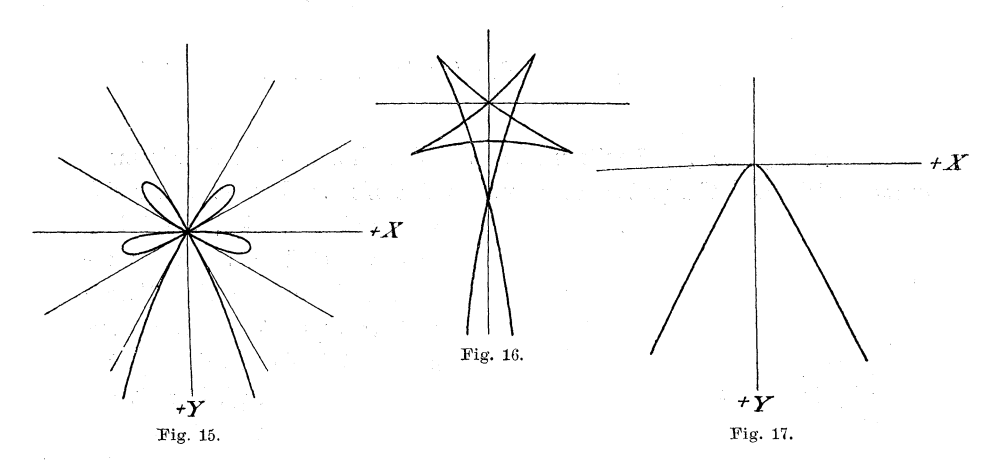


Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17.

23. b) *Typus der Wendeparabel:*

$x^3 = y$ Wendeparabel (1e parabole cubique, point de simple inflexion) Fig. 19,

$x^5 = y$ Wendeflachparabel (point de triple inflexion) Fig. 21,

$x^5 = y^3$ Wendespitzparabel (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion) Fig. 23, u. s. w.

Entstehung des Wendeflachpunkts: Durch symmetrische Trennung der

fünf mit der Abscissenaxe als Tangente zusammenfallenden Schnittpunkte erhält man die allgemeinere Kurve

$$x(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) = y$$

mit drei Wendepunkten: Ursprung mit Wendetangente $y - b^2 c^2 \cdot x = 0$ nebst

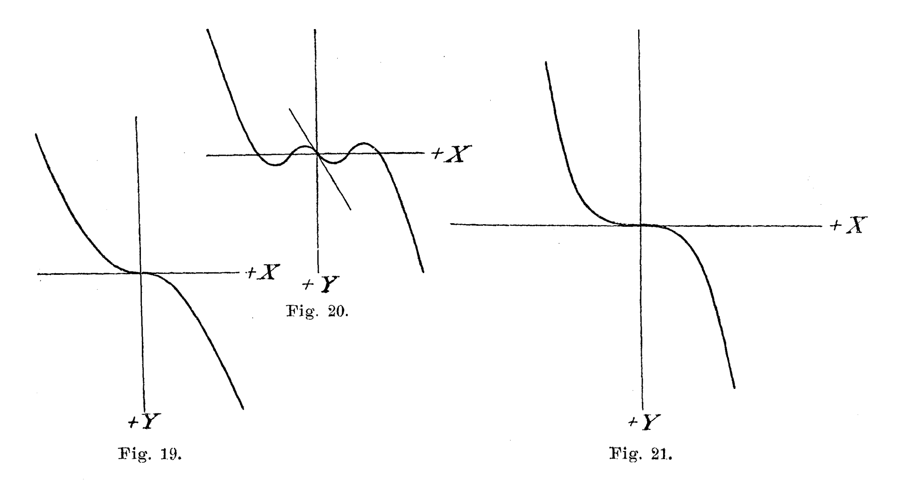


Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21.

den beiden Schnittpunkten $\pm b$ auf der Abscissenaxe, vorausgesetzt $b < c$, Fig. 20.

Entstehung des Wendespitzpunkts: Von den drei mit der Abscissenaxe zusammenfallenden Tangenten kann nur die eine als Wendetangente für sich abgesondert werden, die beiden anderen sind als zusammenfallende Tangenten eines Selbstberührungspunkts bezw. als zusammenfallende Wendetangenten beizubehalten (vergl. hiermit die Entstehung des Spitzpunkts). Die allgemeinere Kurve lautet daher (Fig. 22)

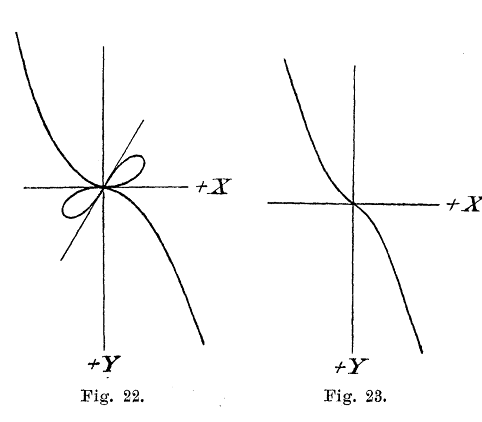


Fig. 22. Fig. 23.

$$x^5 = (y - bx)y^2,$$

sie besitzt nach dem analytischen Dreieck im Ursprung die parabolische Selbstberührung

$$x^2 - \sqrt{b} \cdot y = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + \sqrt{b} \cdot y = 0 .$$

24. c) *Typus der Rückkehrparabel:*

$x^3 = y^2$ Rückkehrparabel, Spitze I. Art (2e parabole cubique, point de rebroussement de la 1e espèce) Fig. 25,

$x^5 = y^2$ Rückkehrflachparabel (rebroussement du 2^d ordre) Fig. 27,

$x^5 = y^4$ Rückkehrspitzparabel (point de triple pointe) Fig. 30, u. s. w.

Entstehung des Rückkehrpunkts: Trennt man die beiden, die Abscissenaxe darstellenden Tangenten $y^2 = 0$, deren jede die Kurve in drei im Ursprung zusammenfallenden Punkten schneidet, am besten in symmetrischer Weise und schreibt dieselben

$$y - bx = 0 \quad \text{und} \quad y + bx = 0,$$

so lautet die allgemeinere Kurve (Fig. 24)

$$x^3 = (y - bx)(y + bx).$$

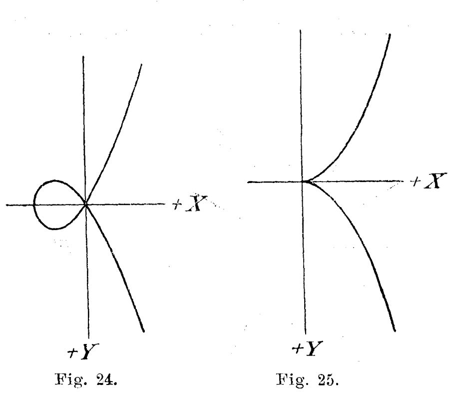


Fig. 24. Fig. 25.

Dieselbe hat im Ursprung einen Doppelpunkt, der für $b = 0$ in die Spitze übergeht (vergl. Saurin 8).

Entstehung des Rückkehrflachpunkts: Betrachtet man den Ursprung wieder als Doppelpunkt mit getrennten Tangenten, so mufs die allgemeinere Kurve, wenn sie wieder zum Ursprung zurücklaufen soll, von der Abscissenaxe noch

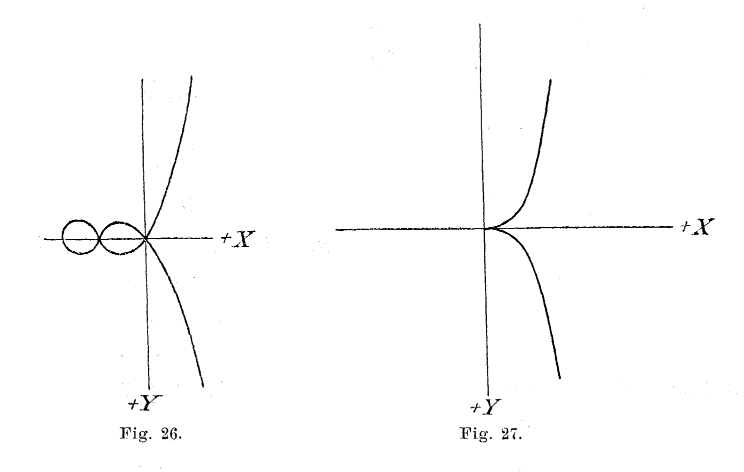


Fig. 26. Fig. 27.

in einem weiteren Doppelpunkt und einem einfachen Punkt geschnitten werden (Fig. 26), ihre Gleichung lautet daher

$$x^2(x-b)^2(x-c)=y^2.$$

Sie hat im Ursprung das Tangentenpaar $(y-b\sqrt{c}\cdot x)(y+b\sqrt{c}\cdot x)=0$, ferner in $x=b$ einen Doppelpunkt mit zwei Wendetangenten und geht für $b=0$ und $c=0$ über in die Rückkehrflachparabel. (Ce rebroussement renferme deux inflexions dans son folium évanouissant, sagt De Gua).

Entstehung des Rückkehrspitzpunkts: Trennt man die vier mit der Ab-

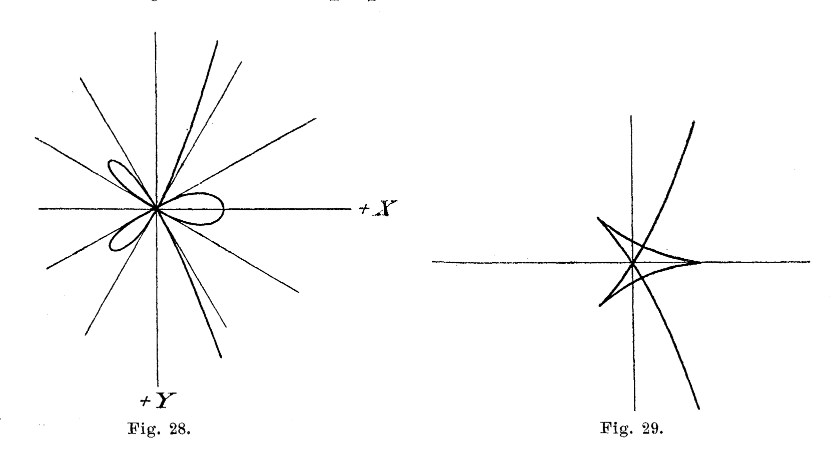


Fig. 28. Fig. 29.

scissenaxe zusammenfallenden Tangenten in symmetrischer Weise, so erhält man die allgemeinere Kurve (Fig. 28)

$$x^5=(y^2-b^2x^2)(y^2-c^2x^2)$$

mit einem vierfachen Punkt im Ursprung; an Stelle der Schleifen können auch Spitzen treten, Fig. 29.

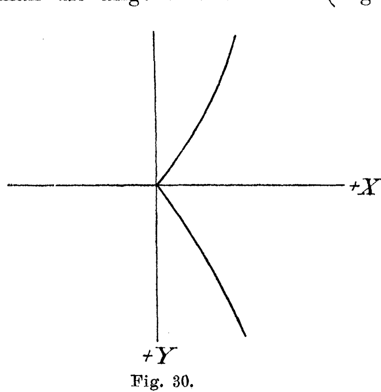


Fig. 30.

II. Die binomischen Hyperbeln

$$x^m\cdot y^n=C.$$

25. Hier können nur zwei Typen unterschieden werden, je nachdem m sowohl als n ungerade oder m gerade und n ungerade ist, also

a) Hyperbeln gerader Ordnung, deren einfachster Repräsentant ist:
   $xy=1$ die konische Hyperbel,

b) Hyperbeln ungerader Ordnung, deren einfachster Repräsentant ist:
   $x^2y=1$ die kubische Hyperbel.

Beide Arten von Hyperbeln haben die Koordinatenaxen zu Asymptoten. Bei

der ersten Art verlaufen die Äste auf entgegengesetzten Seiten beider Asymptoten ins Unendliche, die unendlich fernen Punkte sind daher entweder ge-

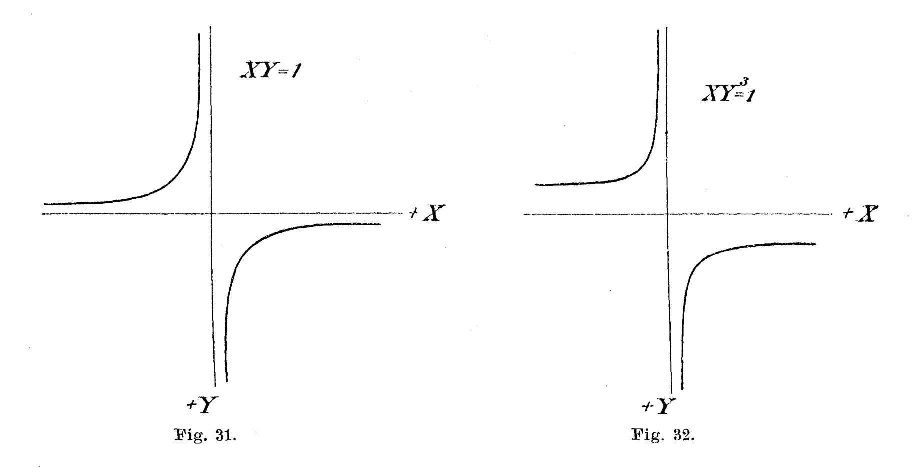


Fig. 31. Fig. 32.

wöhnliche (Oval-) oder Flach- oder Spitzpunkte; bei der zweiten Art erstrecken sich die Zweige hinsichtlich der Abscissenaxe auf derselben Seite

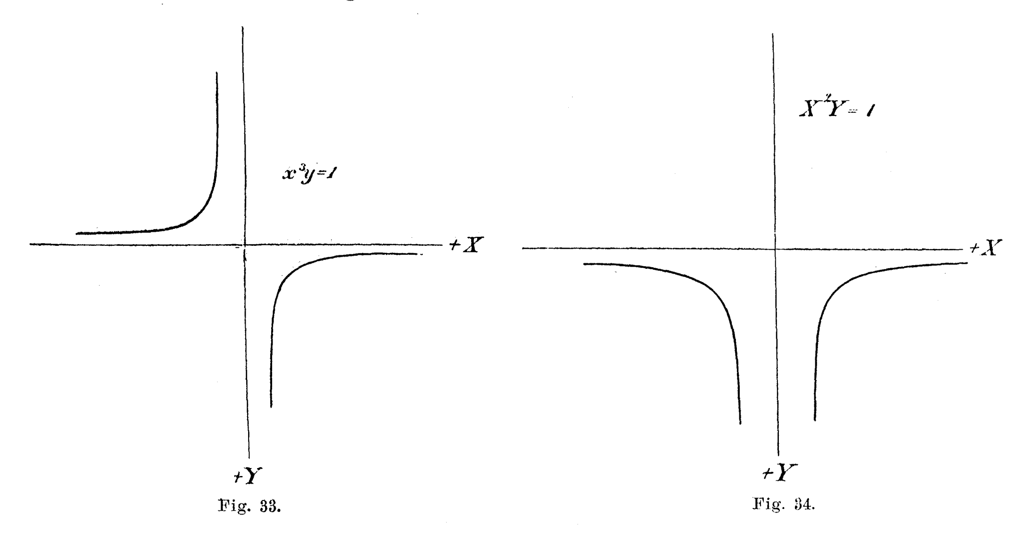


Fig. 33. Fig. 34.

nach entgegengesetzten Richtungen, hinsichtlich der Ordinatenaxe auf verschiedenen Seiten nach derselben Richtung, der unendlich ferne Punkt der Abscissenaxe gehört somit zum Typus der Wendepunkte, derjenige der Ordinatenaxe zum Typus der Rückkehrpunkte. Ist $t = 0$ die unendlich ferne Gerade, so ist (vergl. hierzu die Untersuchungen über die parabolischen Punkte) für die

Hyperbeln gerader Ordnung:

		homogen	der ∞ ferne Punkt der Ord.-Axe	Absc.-Axe
$xy = 1$	konische Hyperbel	$xy = t^2 \cdots$	$x = t^2$ Ovalpunkt	$y = t^2$ Ovalpunkt
$xy^3 = 1$	I. biquadratische Hyp.	$xy^3 = t^4 \cdots$	$x = t^4$ Flachpunkt	$y^3 = t^4$ Spitzpunkt
$x^3y = 1$	II. „ „	$x^3y = t^4 \cdots$	$x^3 = t^4$ Spitzpunkt	$y = t^4$ Flachpunkt

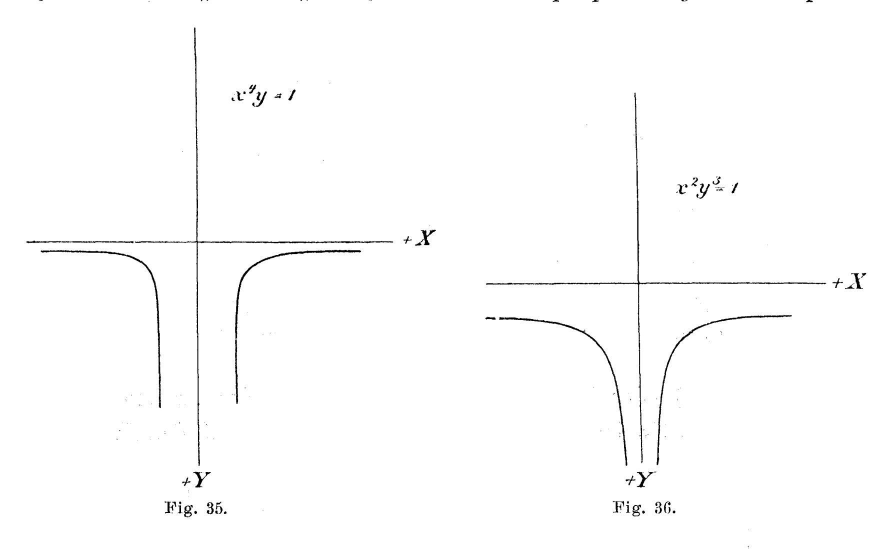


Fig. 35. Fig. 36.

Hyperbeln ungerader Ordnung:

		homogen	der ∞ ferne Punkt der Ord.-Axe.
$x^2y = 1$	kubische Hyperbel	$x^2y = t^3$	$x^2 = t^3$ Rückkehrpunkt
$x^4y = 1$	Hyperbel V. Ordnung I. Art	$x^4y = t^5$	$x^4 = t^5$ Rückkehrspitzpunkt
$x^2y^3 = 1$	„ „ „ II. „	$x^2y^5 = t^5$	$x^2 = t^5$ Rückkehrflachpunkt

Absc.-Axe
$y = t^3$ Wendepunkt
$y = t^5$ Wendeflachpunkt
$y^3 = t^5$ Wendespitzpunkt

u. s. w.

Die elementarsymmetrischen Wurzelfunktionen.

26. Die Kenntnis der Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und ihren Wurzeln reicht auf François Viète zurück, der in seinem Werk: In artem analyticam, Isagoge 1591, allerdings unter der Voraussetzung nur positiver Wurzeln, die Koeffizienten der Gleichungen zweiten und dritten Grades durch die Wurzeln der Gleichungen darstellt. Die beiden Fundamentalsätze über die Anzahl der Wurzeln und deren Ab-

hängigkeit von den Koeffizienten spricht jedoch in ihrer Allgemeinheit erst Albert Girard aus: Er zeigt in seiner Invention nouvelle en l'algèbre, Amsterdam 1629, daſs, sofern man drei Arten von Lösungen, positive, negative und imaginäre, zuläſst, die Zahl der Wurzeln einer Gleichung gleich ihrem Grad ist und die mit abwechselnden Zeichen behafteten Koeffizienten der Gleichung die Summen der zu eins, zwei, drei u. s. f. kombinierten Wurzeln darstellen (XII déf. II. théor.). Descartes beweist sodann (Géométrie, livre III[e]), daſs, wenn x_1 eine Wurzel der Gleichung ist, diese sich durch $x - x_1$ teilen läſst; sind also $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades, so besteht die Identität

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n &\equiv a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ &\equiv a_0 x^n + (-1)^1 a_0 \Sigma x_1 \cdot x^{n-1} \\ &\quad + (-1)^2 a_0 \Sigma x_1 x_2 \cdot x^{n-2} + (-1)^3 a_0 \Sigma x_1 x_2 x_3 \cdot x^{n-3} \\ &\quad + \cdots + (-1)^n \cdot a_0 \cdot x_1 x_2 x_3 \cdots x_n, \end{aligned}$$

woraus nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$a_1 = -a_0 \Sigma x_1 \qquad a_2 = (-1)^2 \cdot a_0 \Sigma x_1 x_2 \qquad a_3 = (-1)^3 a_0 \Sigma x_1 x_2 x_3$$
$$a_n = (-1)^n \cdot a_0 \cdot x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

und somit

$$\Sigma x_1 = (-1)^1 \cdot \frac{a_1}{a_0} \qquad \Sigma x_1 x_2 = (-1)^2 \cdot \frac{a_2}{a_0} \qquad \Sigma x_1 x_2 x_3 = (-1)^3 \cdot \frac{a_3}{a_0} \quad \text{u. s. w.}$$

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}.$$

Unter diesen Beziehungen wird von De Gua insbesondere von derjenigen des öftern Gebrauch gemacht, daſs, absolut genommen, der durch den Koeffizienten der höchsten Potenz dividierte Koeffizient der zweithöchsten Potenz die Summe der Wurzeln und das durch denselben Koeffizienten dividierte Absolutglied das Produkt der Wurzeln darstellt.

III. Abschnitt.

Allgemeine analytische Theorie der algebraischen Kurven nach dem Inhalt der „Usages de l'analyse" von De Gua.

Durchmesser und Mittelpunkte.

27. Im ersten Abschnitt der Usages de l'analyse behandelt De Gua erstmals die Mittelpunkte algebraischer Kurven. Bezüglich der Theorie der Durchmesser beschränkt er sich auf den Beweis des speziellen von Newton in der Enumeratio für die Kurven dritter Ordnung mit drei Asymptoten, die sog. Hyperbolae redundantes, aufgestellten Durchmessersatzes (vgl. 29).

A. Durchmesser.

28. Der in der Geometrie durch die Analysis des Descartes geschaffene Fortschritt lag vor allem in der Verallgemeinerung geometrischer Eigenschaften der Kegelschnitte für Kurven höherer Ordnung. Newton spricht in der Enumeratio, Sectio II, 1 erstmals einen derartigen, für sämtliche algebraischen Kurven giltigen Satz aus, der sich auf die Eigenschaften der Durchmesser bezieht und lautet

Allgemeiner Durchmessersatz von Newton: Bestimmt man auf jeder der Sehnen einer Parallelsehnenschar denjenigen Punkt, von dem aus gerechnet die Summen der bis zu den Durchschnittspunkten der Kurve reichenden Abschnitte beiderseits gleich sind, so liegen diese „Mitten" auf einer Geraden, dem der Parallelsehnenschar zugeordneten Durchmesser.

Der Beweis beruht auf der Eigenschaft, daſs der Koeffizient der zweithöchsten Potenz einer algebraischen Gleichung, deren höchster Potenz man durch Division den Koeffizienten 1 gegeben hat, die Summe der Wurzeln

darstellt (vgl. 26). Die auf schiefwinklige Koordinaten bezogene Kurve n. Ordnung sei (Fig. 37)

$$(1) \qquad y^n - (ax+b)\,y^{n-1} + (cx^2+dx+e)\,y^{n-2} + \cdots = 0,$$

ist ferner auf irgend einer zur Ordinatenaxe parallelen Sehne RS die Mitte Q (x, q) so bestimmt, dafs die algebraische Summe der von Q einerseits und den Schnittpunkten mit der Kurve andererseits begrenzten Abschnitte $u_1, u_2, u_3, \cdots$ der Sehne RS verschwindet, so ist für jeden Schnittpunkt R dieser Sehne

$$(2) \qquad y = u + q$$

und somit gemäfs (1)

$$(u+q)^n - (ax+b)\,(u+q)^{n-1} + (cx^2+dx+e)\,(u+q)^{n-2} + \cdots = 0$$

oder

$$(3) \qquad u^n - (ax+b-nq)u^{n-1} + \cdots = 0.$$

Die Bestimmungsgleichung für q lautet somit

$$\Sigma u \equiv ax + b - nq = 0$$

woraus

$$(4) \quad q = \frac{ax+b}{n}.$$

Die Koordinaten aller Sehnenmitten sind daher $\left(x, \frac{ax+b}{n}\right)$. Betrachtet man somit als zweite Parallelsehne zu RS insbesondere die Ordinatenaxe selbst, so sind $\left(0, \frac{b}{n}\right)$ die Koordinaten

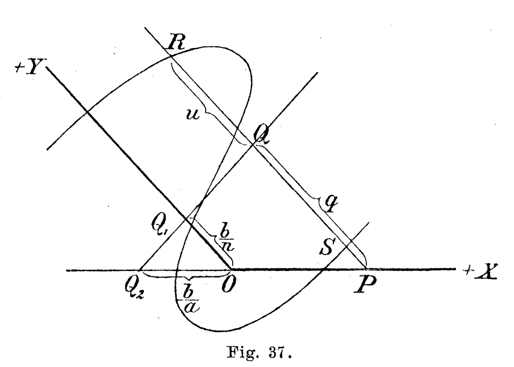


Fig. 37.

ihrer Sehnenmitte Q_1 und nimmt man als dritte Parallelsehne diejenige, für welche die Sehnenmitte Q_2 auf die Abscissenaxe zu liegen kommt, also die Koordinaten $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ besitzt, so folgt aus der Identität

$$(5) \qquad \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}+x} = \frac{\frac{b}{n}}{\frac{ax+b}{n}}$$

dafs

$$\frac{OQ_2}{PQ_2} = \frac{OQ_1}{PQ},$$

d. h. die drei Sehnenmitten Q, Q_1, Q_2 liegen auf einer Geraden, somit auch sämtliche Mitten der zur Ordinatenaxe parallelen Sehnenschar und da die

Kurve auf unendlich viele schiefwinklige Koordinatensysteme bezogen werden kann, so gilt der Satz für die Mitten jeder beliebigen Parallelsehnenschar. Zugleich ergiebt sich die Gleichung des Durchmessers als

$$\frac{x}{-\frac{b}{a}} + \frac{y}{\frac{b}{n}} = 1$$

oder

$$(6) \qquad y = \frac{ax + b}{n}.$$

29. Aufser diesem allgemeinen Satz spricht Newton in der Enumeratio, ebenfalls ohne Beweis, noch eine besondere Durchmessereigenschaft einer bestimmten Gruppe von Kurven dritter Ordnung aus, der sog. Hyperbolae redundantes, die drei Asymptoten, also eine mehr denn die Kegelschnittshyperbel, besitzen. Sie lautet: Zwei der drei Paare hyperbolischer Zweige einer Kurve dritter Ordnung können keine Durchmesser haben, ohne dafs nicht auch das dritte Paar einen solchen hat (vgl. 68, 69), m. a. W.

Satz: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendeasymptoten, so mufs sie noch eine dritte haben.

Erster Beweis von Stirling mittels Reihenentwicklung: Die Gleichung der Kurve dritter Ordnung mit drei hyperbolischen Zweigen lautet (vgl. 107)

$$(1) \qquad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Die Ordinatenaxe $x = 0$ trifft die Kurve nur in einem endlichen Punkt $y = \frac{d}{e}$, die beiden anderen Schnittpunkte liegen im Unendlichen. Soll der endliche Schnittpunkt ebenfalls ins Unendliche fallen, also $y = \infty$ werden, so ist die Bedingung hiefür

$$(2) \qquad e = 0.$$

Die Kurve verläuft alsdann nur auf einer Seite der Ordinatenaxe nach entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche, d. h. die Ordinatenaxe ist Wendeasymptote. Jede zu ihr parallele Sehne $x = \lambda$ trifft die Kurve nach Art der Kegelschnitte nur noch in zwei endlichen Punkten, für welche, da $e = 0$, die Summe der Ordinaten

$$y_1 + y_2 = 0$$

ist, d. h. unter der Bedingung (2) ist die Abscissenaxe Durchmesser für die zur Ordinatenaxe als Wendeasymptote parallele Sehnenschar.

Nach dem Newton'schen Parallelogramm ergeben sich für unendlich grofse Koordinaten aus dem Aggregat der Glieder höchster Ordnung

$$xy^2 - ax^3 = 0$$

die beiden Entwicklungen

(3) $$y = \pm \sqrt{a} \cdot x.$$

Entwickelt man nur die erste Reihe und setzt, um den zweiten Term zu finden

$$y = \sqrt{a} \cdot x + p,$$

so geht (1) über in

(4) $$2\sqrt{a} \cdot px^2 + p^2 x + e\sqrt{a} \cdot x + ep = bx^2 + cx + d,$$

woraus nach dem Newton'schen Parallelogramm (an Stelle der Y-Axe daselbst eine P-Axe) für unendlich groſse Werte der Koordinaten die beiden Aggregate sich ergeben:

$$2\sqrt{a} \cdot px^2 + p^2 x = 0 \quad \text{und} \quad 2\sqrt{a} \cdot px^2 - bx^2 = 0.$$

Aus dem ersten folgt

$$p = -2\sqrt{a} \cdot x,$$

also kein neuer Term, da für diesen Wert von p die erste Entwicklung in die zweite übergehen würde, aus dem zweiten dagegen ergiebt sich

(5) $$p = \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

Setzt man, um den nächsten Term zu finden

$$p = \frac{b}{2\sqrt{a}} + q,$$

so geht (4) über in

(6) $$2\sqrt{a} \cdot qx^2 + \frac{b^2}{4a} x + \frac{b}{a} qx + q^2 x + e\sqrt{a}\, x + \frac{eb}{2\sqrt{a}} + eq = cx + d,$$

woraus nach dem Newton'schen Parallelogramm

(7) $$2\sqrt{a} \cdot qx^2 + q^2 x = 0$$

oder

$$q = -2\sqrt{a} \cdot x,$$

also kein neuer Term, was vorauszusehen war, denn, da die Entwicklung gemäſs (5) nach fallenden Potenzen von x fortschreitet, so muſs für einen unendlich groſsen Wert von x der nach dem konstanten Glied $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ auftretende Term q unendlich klein werden, man hat daher zur Bestimmung von q überhaupt nicht das obige Aggregat (7), sondern dasjenige für unendlich groſse Werte von x und unendlich kleine Werte von q zu nehmen, nämlich

$$2\sqrt{a} \cdot qx^2 + \frac{b^2}{4a} x + e\sqrt{a} \cdot x - cx = 0$$

woraus

$$(8) \qquad q = \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Die Reihe lautet daher

$$(\mathrm{I}) \qquad y = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x} + \cdots;$$

nimmt man $\sqrt{a}$ negativ, so erhält man die zweite Reihe

$$(\mathrm{II}) \qquad y = -\sqrt{a} \cdot x - \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{4ac - b^2 - 4ae\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{x} - \cdots.$$

Die beiden Entwicklungen (I) und (II) werden somit, da für die unendlich fernen Punkte aller hyperbolischen Zweige, die nicht den Enden der Axen zustreben, beide Koordinaten unendlich werden und für $x = \infty$ das dritte Glied beider Entwicklungen mit allen folgenden verschwindet, zu den Gleichungen zweier Asymptoten

$$(9) \qquad y = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}} \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{a} \cdot x - \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

deren Schnittpunkte mit der Kurve sich berechnen aus (1)

$$x\left(\sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + e\left(x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

oder

$$0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + \left(\frac{b^2}{4a} + e\sqrt{a} - c\right) x = d - \frac{be}{2\sqrt{a}}$$

zu:

$$x_1 = \infty \quad x_2 = \infty \quad x_3 = \frac{4ad - be\sqrt{a}}{b^2 + 4ae\sqrt{a} - 4ac}$$

und

$$x_1' = \infty \quad x_2' = \infty \quad x_3' = \frac{4ad + be\sqrt{a}}{b^2 - 4ae\sqrt{a} - 4ac}.$$

Soll daher jede der beiden Asymptoten (9) Wendeasymptote werden, so mufs auf jeder derselben auch noch der dritte endliche Schnittpunkt ins Unendliche rücken, d. h.

$$(10) \qquad b^2 + 4ae\sqrt{a} - 4ac = 0,$$

$$(11) \qquad b^2 - 4ae\sqrt{a} - 4ac = 0.$$

Unter den Bedingungen (2), (10), (11) besitzt daher die Kurve (1) drei Wendeasymptoten; diese Bedingungen sind jedoch insofern nicht unabhängig von einander, als aus je zweien sich die dritte ergiebt, woraus folgt, dafs mit dem Bestehen zweier Wendeasymptoten auch die Existenz einer dritten verknüpft ist.

Zweiter Beweis von De Gua mittels Transformation:

Die Schlufsfolgerung, dafs für $e = 0$ die Ordinatenaxe Wendetangente

und die Abscissenaxe konjugierter Durchmesser ist, ist dieselbe. Um die Bedingungen für das Auftreten der den übrigen Asymptoten zugeordneten Durchmesser zu finden, bezieht man die geg. Kurve

$$(1) \qquad f(x, y) = xy^2 + ey - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$

mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

auf eine neue, in die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote gedrehten Ordinatenaxe, dann lautet die transformierte Gleichung

$$(2) \qquad \varphi(z, u) = f(nu, mu) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x} z + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0,$$

wobei

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 - 3ax^2 - 2bx - c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6ax - 2b \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -6a,$$

daher

$$\begin{aligned}(2\text{a})\ \varphi(z, u) &= m^2 n \cdot u^3 + en \cdot u - an^3 \cdot u^3 - bn^2 \cdot u^2 - cn \cdot u - d \\ &+ \frac{1}{1!}(m^2 \cdot u^2 - 3an^2 \cdot u^2 - 2bn \cdot u - c) z - \frac{1}{2}(6an \cdot u + 2b) z^2 - \frac{1}{6} \cdot 6az^3 \\ &= (m^2 n - an^3) u^3 + (m^2 z - 3an^2 z - bn^2) u^2 \\ &\quad + (-3anz^2 - 2bnz - cn + em) u - (az^3 + bz^2 + cz + d) = 0.\end{aligned}$$

Da die Ordinatenaxe einer Asymptote parallel sein soll, so mufs sie die Kurve in mindestens einem unendlich fernen Punkt schneiden, hiefür ist die Bedingung

$$m^2 n - an^3 = 0,$$

woraus

$$n = 0 \qquad m = n\sqrt{a} \qquad m = -n\sqrt{a}$$

und somit die drei Asymptotenrichtungen, in welche die Ordinatenaxe gedreht werden kann, bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{m}{n} = \infty \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{m}{n} = \sqrt{a} \qquad \operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{m}{n} = -\sqrt{a}\,.$$

Der erste Fall führt wieder auf das ursprüngliche Koordinatensystem (1) und ergiebt die Y-Axe als Wendetangente unter der Bedingung $e = 0$; im zweiten bezw. dritten Fall wird die Gleichung der Kurve

$$\begin{aligned}(2\text{b})\ \psi(z, u) = (2az - b) n^2 u^2 + (-3az^2 - 2bz - c \pm e\sqrt{a}) nu \\ - (az^3 + bz^2 + cz + d).\end{aligned}$$

Sollen nun die Ordinaten u einen zugeordneten Durchmesser haben, so darf nach Division mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz der Koeffizient der zweithöchsten Potenz in z nur linear sein, weil es möglich sein mufs, durch lineare Transformation (vgl. Allgemeiner Durchmessersatz 28) diesen Koeffi-

zienten zum Verschwinden zu bringen. Führt man diese Division durch, so kommt:

$$\begin{array}{l|l} 3az^2 + 2bz + c \pm e\sqrt{a} & 2az + b \\ 3az^2 + \frac{3b}{2}z & \frac{3}{2}z + \frac{b}{4a} \\ \hline \qquad \frac{b}{2}z + c \pm e\sqrt{a} & \\ \qquad \frac{b}{2}z + \frac{b^2}{4a} & \\ \hline \qquad\quad c - \frac{b^2}{4a} \pm e\sqrt{a}\,; & \end{array} \qquad (3)$$

es darf also, damit die entstehende Reihe (3) mit dem konstanten Glied abbricht, kein Rest übrig bleiben, d. h. die Bedingungen dafür, dafs die den Asymptotenrichtungen $\pm\sqrt{a}$ parallelen Sehnenscharen zugeordnete Durchmesser haben, sind dieselben wie bei Stirling, nämlich

$$c - \frac{b^2}{4a} \pm e\sqrt{a} = 0$$

oder

$$4ac - b^2 \pm e\sqrt{a} = 0$$

und stehen mit $e = 0$ in dem angegebenen Abhängigkeitsverhältnis.

Dritter Beweis: Das Aggregat der Glieder höchster Dimension von (1)

$$xy^2 - ax^3 = 0$$

giebt die drei Asymptotenrichtungen

$$x = 0 \qquad y - \sqrt{a}\cdot x = 0 \qquad y + \sqrt{a}\cdot x = 0.$$

Betrachtet man nur den zweiten Fall, so lautet die Gleichung der Asymptote

$$y = \sqrt{a}\cdot x + k,$$

wo k eine noch zu bestimmende Konstante ist, und die Schnittpunkte dieser Asymptote mit der geg. Kurve (1) ergeben sich aus

$$x\left(ax^2 + 2k\sqrt{a}\cdot x + k^2\right) + e\left(\sqrt{a}\cdot x + k\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

oder

$$(2) \qquad 0\cdot x^3 + \left(2k\sqrt{a} - b\right)x^2 + \left(k^2 + e\sqrt{a} - c\right)x + ek - d = 0.$$

Da die Asymptote die Kurve im Unendlichen berührt, so liegen zwei Schnittpunkte im Unendlichen, d. h. es müssen zwei Werte von x aus (2) unendlich werden; aufser dem Koeffizienten von x^3 verschwindet also auch derjenige von x^2, daher

$$(3) \qquad 2k\sqrt{a} - b = 0$$

und soll der unendlich ferne Berührungspunkt sogar Wendepunkt sein, so mufs auch noch der dritte Schnittpunkt ins Unendliche fallen, somit

$$(4) \qquad k^2 + e\sqrt{a} - c = 0.$$

Aus (3) ergiebt sich die Konstante k und die Asymptote

$$y = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

ist somit Wendeasymptote unter der Bedingung des Verschwindens des k-Eliminats aus (3) und (4):

$$\frac{b^2}{4a} + e\sqrt{a} - c = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

B. Mittelpunkte.

30. Als Mittelpunkt einer Kurve definiert De Gua erstmals allgemein denjenigen Punkt, der sämtliche die Kurve schneidenden Strahlen seines Büschels, die sog. Durchmesser, so teilt, dafs die einzelnen von ihm aus bis zu den Schnittpunkten gemessenen Abschnitte jedes Durchmessers nach beiden Seiten hin gleich sind, dafs also in Bezug auf ihn sämtliche Kurvenschnittpunkte symmetrisch liegen.

Macht man den gesuchten Mittelpunkt (p, q) zum Nullpunkt des Koordinatensystems und nimmt man die neue Ordinatenaxe U drehbar, so lauten die Transformationsgleichungen (vgl. Fig. 1)

$$x = p + nu + z \qquad y = q + mu$$

und die Schnittpunkte der U-Axe mit der geg. Kurve

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

ergeben sich für $z = 0$ gemäfs Abschnitt (18) aus

$$(2) \quad \varphi(u) = f(p, q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}n + \frac{\partial f}{\partial y}m\right)u + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}n^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}nm + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}m^2\right)u^2 + \cdots$$

wo an Stelle von x und y in den Differentialen die Werte p und q zu setzen sind. Soll nun die U-Axe Durchmesser sein, so mufs die Schnittpunktsgleichung, da alsdann die Schnittpunkte zum Mittelpunkte bezw. Ursprung paarweise symmetrisch liegen, die Form haben entweder

$$(3) \quad (u^2 - a)(u^2 - b)(u^2 - c) \cdots \equiv u^k + Au^{k-2} + Bu^{k-4} + \cdots\cdots + K = 0,$$

oder, wenn die Kurve durch den Ursprung selbst geht,

$$(4) \; u(u^2 - a)(u^2 - b)(u^2 - c) \cdots \equiv u^\lambda + Au^{\lambda-2} + Bu^{\lambda-4} + \cdots\cdots + L \cdot u = 0,$$

wo k eine gerade, λ eine ungerade Zahl ist; hieraus folgt, wegen der Identität der Gleichungen (3) und (4) mit Gleichung (2), dafs für Kurven



gerader Ordnung alle ungeraden Differentiale, für Kurven ungerader Ordnung alle geraden Differentiale, im letzteren Falle einschliefslich der Kurvengleichung selbst, verschwinden müssen und zwar müssen, da die Schnittpunktsgleichung in u für alle beliebigen Durchmesser, also alle beliebigen m und n Geltung hat, jene Differentiale sogar identisch verschwinden, d. h. alle mit m und n behafteten Terme derselben m. a. W. sämtliche partielle Differentialquotienten jedes Differentials sind gleich Null zu setzen.

Bezeichnet man daher den gesuchten Mittelpunkt mit (x, y) statt mit (p, q), so bestimmt sich derselbe nebst den zugehörigen Bedingungen seiner Existenz, aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} = 0, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0,$$

wenn die Kurve von gerader Ordnung ist und, wenn dieselbe von ungerader Ordnung ist, aus:

$$f(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 0, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = 0, \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0,$$

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-2} \partial y} = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}} = 0.$$

Beispiele.

31. *Erstes Beispiel: Der Kreis.* Da die Gleichung für den Kreis nur bis zum zweiten Grad ansteigt, so erhält man nur zwei Bestimmungsgleichungen für x und y, also keine Bedingung, d. h. der Kreis hat stets einen Mittelpunkt. Lautet die Kreisgleichung:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \tag{1}$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2a = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2b = 0, \tag{3}$$

somit aus (2) und (3) $x = a,\ y = b$

die Koordinaten des Mittelpunkts.

32. *Zweites Beispiel: Die Kegelschnitte.* Die allgemeine Gleichung derselben sei

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

dann ergeben sich die Koordinaten des Mittelpunkts aus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax + by + d = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = bx + 2cy + e = 0,$$

zu

$$x = \frac{be - 2cd}{4ac - b^2},$$

$$y = \frac{bd - 2ae}{4ac - b^2},$$

d. h. mit Ausnahme der Parabel, für welche $4ac - b^2 = 0$, der Mittelpunkt also ins Unendliche fällt, haben sämtliche Kegelschnitte einen endlichen Mittelpunkt.

33. *Drittes Beispiel: Die Kurven dritter Ordnung mit drei Paaren hyperbolischer Zweige.* Ihre Gleichung läſst sich durch bestimmte Annahme des Koordinatensystems (vgl. 107) auf die Form bringen:

$$xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

woraus

$$\frac{\partial x}{\partial f} = y^2 - 3ax^2 - 2bx - c,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - e,$$

so lauten die Bedingungsgleichungen für den Mittelpunkt:

(1) $$f(xy) = xy^2 + ey - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0,$$

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3ax + b = 0,$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y = 0,$$

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x = 0.$$

Die Werte (3) und (4) in (2) und (1) eingesetzt ergeben:

$$b = 0,\ d = 0,$$

als die beiden Bedingungen für die Existenz eines Mittelpunkts, der zugleich ein Punkt der Kurve und Ursprung des Koordinatensystems ist.

34. *Viertes Beispiel: Die Kassinoide.* Die Gleichung derselben lautet

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0,$$

somit sind die Bedingungsgleichungen für den Mittelpunkt

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = x^3 + xy^2 - b^2x = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y + y^3 + b^2y = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = x = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = y = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = x = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = y = 0.$$

Aus sämtlichen sechs Gleichungen ergiebt sich $x = 0$, $y = 0$ ohne weitere Bedingung, d. h. die Kassinoide hat stets den Ursprung zum Mittelpunkt.

Asymptoten.

I. Asymptoten parallel den Axen.

35. Ordnet man die Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ nach Potenzen der einen Veränderlichen, etwa nach y, und fehlt hiebei das höchste Glied, hat also die Gleichung die Form

$$(1) \quad f(x, y) = 0 \cdot y^n + (ax + b)y^{n-1} + (cx^2 + dx + e)y^{n-2} + \cdots\cdots = 0,$$

so ist jedenfalls eine Wurzel $y = \infty$, welches x man auch nehmen mag, d. h. die Kurve hat in der Richtung der Y-Axe einen hyperbolischen Punkt mit der Asymptote

$$(2) \qquad x = C,$$

wo C eine noch zu bestimmende Konstante ist. Da diese Gerade die Kurve in zwei zusammenfallenden unendlich fernen Punkten schneidet, so muſs in der Schnittpunktsgleichung

$$(3) \quad f(C, y) = 0 \cdot y^n + (aC + b)y^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0,$$

auch noch der Koeffizient der zweithöchsten Potenz verschwinden, somit

$$aC + b = 0,$$

und daher gemäſs (2)

$$(2a) \qquad ax + b = 0,$$

die Gleichung der Asymptote. Setzt man diese Betrachtungen fort, so folgt (Usages pg. 34) der

Satz: Fehlen in der nach fallenden Potenzen von x bezw. y geordneten Kurvengleichung ein oder mehrere Anfangsglieder, so giebt der Koeffizient der ersten nicht verschwindenden Potenz von x bezw. y als Gleichung aufgefaſst die zur Abscissen- bezw. Ordinatenaxe parallelen Asymptoten.

Im analytischen Dreieck ist diese Gleichung dargestellt durch eine zu den Banden parallele Bestimmungsgerade.

36. Im Anschluſs an obige Betrachtungen erwähnt De Gua die Möglichkeiten, daſs eine Wurzel $x = \alpha$ des gleich Null gesetzten Koeffizienten der ersten nicht verschwindenden Potenz von y zugleich eine Wurzel der Koeffizienten der nächst folgenden Potenzen ist, und untersucht hier zwei Fälle:

a) Diese Wurzel sei eine Wurzel sämtlicher folgender Koeffizienten einschlieſslich des letzten Terms, dann erniedrigt sich nach Division mit $x - \alpha$ die Ordnung der Kurve um einen Grad, die Gerade $x - \alpha = 0$ bildet also einen Bestandteil der Kurve.

b) Diese Wurzel sei nur eine Wurzel des letzten Terms, dann zeigt sich, daſs nach Division der Gleichung mit $x - \alpha$ der letzte Term, der das Produkt sämtlicher Wurzeln y darstellt, endlich wird, obwohl doch für $x = \alpha$ eine dieser Wurzeln $y = \infty$ ist. Hieraus schlieſst De Gua, daſs eine zweite Wurzel y unendlich klein werden muſs, d. h. daſs die Kurve die Abscissenaxe im Punkt $x = \alpha$ schneidet, eine Folgerung, die sich aus der Gestalt der Gleichung

$$(x - \alpha)\, y^{n-1} + \cdots\cdots\cdots\cdots + k\,(x - \alpha)\,(x^{n-1} + \cdots + h) = 0,$$

die sich für $x - \alpha = 0$ reduziert auf

$$A y^{n-2} + B y^{n-3} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + L y = 0,$$

unmittelbar ergiebt, da sich alsdann der Faktor $y = 0$ ausscheiden läſst (Usages pg. 37).

37. Ferner zieht De Gua unter der Voraussetzung, daſs der Grad der Variabeln des ersten nicht verschwindenden Koeffizienten der nach fallenden Potenzen der andern Variabeln geordneten Gleichung denjenigen der zugehörigen Potenz zum Grad der Gleichung ergänzt, daſs also dieser Koeffizient bis zum höchst möglichen Grad ansteigt, die Folgerung, daſs, wenn eine ungerade Anzahl der ersten Potenzen fehlt, die Kurve mindestens eine einer Koordinatenaxe parallele Asymptote besitzt, da in diesem Fall jener erste Koeffizient eine Gleichung ungeraden Grads liefert, also jedenfalls eine reelle Wurzel besitzt.



Je nachdem in diesen Koeffizienten selbst wieder Glieder fehlen, können weitere Besonderheiten eintreten. Beschränkt man die Betrachtungen zunächst auf die allgemeine Gleichung dritten Grads

$$a + by + cx + ey^2 + fxy + gx^2 + hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0,$$

in welcher, nach Potenzen von y geordnet, die höchste Potenz fehlen möge, so dafs die Gleichung lautet

$$(1) \qquad (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx + b)y + (lx^3 + gx^2 + cx + a) = 0,$$

so folgt

a) für $e = 0$ aus $ix + e = 0$ die Ordinatenaxe $x = 0$ als Asymptote,

b) für $e = 0$, $i = 0$, $b = 0$ aus $kx^2 + fx = x(kx + f) = 0$ wieder die Ordinatenaxe als Asymptote nebst der Parallelen $x = -\frac{f}{k}$; ist aufserdem noch $f = 0$, so ist die Ordinatenaxe doppelte Asymptote u. s. w.

c) für $i = 0$ aus dem ergänzten Koeffizienten $0 \cdot x + e = 0$ die unendlich ferne Gerade $x = \infty$ als Asymptote. Da für den Wert ∞ die niederen Potenzen von x gegen die höheren vernachlässigt werden dürfen, so berechnet sich das zugehörige unendliche y aus

$$ey^2 + kx^2y + lx^3 = 0,$$

zu

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{-kx^2 \pm \sqrt{k^2x^4 - 4elx^3}}{2e} \\ &= \frac{-kx^2 - kx^2}{2e} = -\frac{k}{e}\,x^2 \end{aligned} \right|_{x=\infty}$$
$$= \infty^2,$$

d. h. y wird von höherer Ordnung ∞ als x, die Kurve nähert sich also in der Richtung der Ordinatenaxe den beiden parabolischen Ästen

$$(2) \qquad y = -\frac{k}{e}\,x^2,$$

ein Ergebnis, das somit ohne Zuhilfenahme des algebraischen Dreiecks abgeleitet ist. Noch auf andere Weise gelangt De Gua zur selben Schlufsfolgerung. Da die Summe der Wurzeln

$$(3) \qquad y_1 + y_2 = -\frac{kx^2 + fx + b}{e}\bigg|_{x=\infty} = \infty^2$$

so ist jedenfalls eine der beiden Wurzeln unendlich von der zweiten Ordnung; die zweite Wurzel, die sich aus

(4) $$y_1 \cdot y_2 = \frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e};$$

zu

(4a) $$y_2 = \frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e} \cdot \frac{1}{y_1}$$

berechnet, ist alsdann

entweder einfach unendlich	je nachdem	der ganze dritte Term,
oder endlich		oder lx^3
oder unendlich klein I. Ordnung		oder $lx^3 + gx^2$
oder unendlich klein II. Ordnung		oder $lx^3 + gx^2 + cx$

fehlt. Es wird also für $x = \infty$ keines der beiden y von höherem Grad ∞ als vom zweiten, gleichgiltig, ob die Koeffizienten f, b, l, g, c in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, und (3) geht für diese unendlich grofsen Werte der Koordinaten über in die Gleichung

(4) $$y = -\frac{k}{e}x^2,$$

welche die konisch parabolische Annäherung ausdrückt.

d) für $i = 0$, $k = 0$ wieder $x = \infty$ und die Summe der Wurzeln

$$y_1 + y_2 = -\frac{fx + b}{e}$$

unendlich, endlich oder null, je nachdem die Koeffizienten f und b in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, eine Möglichkeit, die nur bestehen kann, wenn beide Wurzeln y unendlich grofs werden mit entgegengesetztem Vorzeichen; dann ergiebt sich aus dem Produkt der Wurzeln

(4a) $$y_1 \cdot y_2 = \frac{lx^3 + gx^2 + cx + a}{e}\Bigg|_{x=\infty}$$

dafs $$-y^2 = \infty^3 \quad \text{oder} \quad y^2 = -\infty^3$$

und dafs somit gemäfs (4a), gleichgiltig ob die Glieder mit f, b, g, c, a in der Gleichung vorhanden sind oder nicht, die zweite kubische Parabel

(5) $$y^2 = -\frac{l}{e}x^3$$

die Annäherung in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe giebt.

In diesen Ausführungen zeigt De Gua seine Meisterschaft in der Analysis des Descartes, die ihm die Anwendung des algebraischen Dreiecks entbehrlich macht und zugleich einen tieferen Einblick in die Gründe für die sonst rein mechanische Handhabung desselben gewährt.

II. Asymptoten in beliebiger Richtung $\frac{m}{n}$.

38. Geht man mittels der Transformation (Fig. 38)

$$x = nu + z, \qquad y = mu$$

vom rechtwinkligen auf das schiefwinklige Koordinatensystem mit drehbarer U-Axe über und setzt $z = 0$, also

$$x = nu, \qquad y = mu,$$

wobei m und n durch die Beziehung

$$m^2 + n^2 = 1$$

verknüpft, sonst aber beliebig sind, so erhält man die Schnittpunkte der Kurve

(1) $f(x,y) = a + (by + cx) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + \cdots$

mit sämtlichen Strahlen durch den Ursprung aus der transformierten Gleichung

(2) $\varphi(u) = a + (bm + cn)u + (em^2 + fmn + gn^2)u^2$
$+ (hm^3 + im^2n + kmn^2 + ln^3)u^3 + \cdots$

Soll daher ein solcher Strahl durch den Ursprung die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen, d. h. einer Asymptote parallel sein, so mufs, damit eine Wurzel $u = \infty$ wird, der Koeffizient der höchsten Potenz von u in (2) verschwinden; dieser Koeffizient ist aber mit dem Aggregat der Glieder höchster Dimension der geg. Gleichung (1) identisch, wenn in (2) an Stelle von m und n die Werte y und x gesetzt werden, somit

+Y
+U
P
u
y = mu
+X(Z)
z
nu
Fig. 38.

Satz: Das gleich Null gesetzte Aggregat der Glieder höchster Dimension einer Kurve $n$ter Ordnung giebt die n Asymptotenrichtungen $\frac{y}{x}$.

39. Die Lage der Asymptoten selbst bestimmt De Gua nicht; dagegen beschäftigt ihn die Untersuchung des von den Aggregaten der Glieder der höheren Dimensionen abhängigen Verhaltens der unendlich fernen Kurvenäste, wenn diese Aggregate als Gleichungen in $\frac{y}{x}$ aufgefafst, mehrfache und gemeinsame Wurzeln haben. Zu diesem Zweck transformiert er die allgemeine Gleichung

(I) $f(x,y) = f_r(x,y) + f_{r-1}(x,y) + f_{r-2}(x,y) + \cdots + f_1(x,y) + a = 0$

der vorliegenden Kurve, die von der $r$ten Ordnung sein möge (die Indices bezeichnen die Dimensionen der einzelnen Aggregate) so, dafs die Ursprungs-

gerade, die durch eine solche gemeinschaftliche bezw. mehrfache Wurzel $\frac{y}{x} = \alpha$ dargestellt ist, Ordinatenaxe $z = 0$ wird, führt aber die Transformation selbst nicht durch, sondern giebt nur die jeweilige Gestalt der transformierten Gleichung

$$\text{(II)} \quad \psi(z, u) = \psi_r(z, u) + \psi_{r-1}(z, u) + \psi_{r-2}(z, u) + \cdots + \psi_1(z, u) + a = 0$$

für die einzelnen Fälle an, was für die Beurteilung des Verlaufs der Kurve in den unendlich fernen Punkten der U-Axe, d. h. der Ursprungsgeraden $\frac{y}{x} = \alpha$ vollständig ausreicht. Man hat folgende drei Möglichkeiten:

A. Einfache gemeinschaftliche Wurzeln (Usages pg. 166).

40. Die einfachsten Fälle sind: Eine gemeinschaftliche Wurzel der Aggregate

a) $f_r(x, y) = 0, \; f_{r-1}(x, y) = 0,$

dann hat die transformierte Gleichung (II), wenn der Einfachheit halber alle Koeffizienten gleich 1 gesetzt werden, die Form

$$0 = (u^{r-1} \cdot z + u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} z + \cdots + z^{r-1})$$
$$+ (u^{r-2} + u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a$$

und giebt für die gemeinschaftliche Wurzel $z = 0$ der beiden höchsten Aggregate eine Gleichung vom $(r-2)$ten Grad in u, also mit zwei Wurzeln $u = \infty$, die Ordinatenaxe ist somit selbst Asymptote, daher auf (I) übertragen.

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden höchsten Aggregate $f_r(x, y) = 0$ und $f_{r-1}(x, y) = 0$, so ist $\frac{y}{x} = \alpha$ die Gleichung der Asymptote selbst.

Zugleich ergiebt hiermit in Übereinstimmung das analytische Dreieck, auf die Bande ohne u gelegt, dafs die transformierte Gleichung (II) für sehr kleine Werte von z und sehr grofse von u sich reduziert auf

$$u^{r-1} \cdot z + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0,$$

d. h. dafs die unendlich fernen Äste der Kurve (I) sich nach Art der konischen Hyperbel der Asymptote nähern.

b) $f_r(x, y) = 0, \; f_{r-1}(x, y) = 0, \; f_{r-2}(x, y) = 0,$

dann erhält man aus (II), das für diesen Fall die Form hat

$$0 = (u^{r-1} z + \cdots + z^r) + (u^{r-2} z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2})$$
$$+ (u^{r-3} + u^{r-4} z + \cdots + z^{r-3}) + \cdots + a,$$

für $z = 0$ eine Gleichung $(r-3)$ten Grads in u, also mit drei Wurzeln $u = \infty$ d. h. die Ordinatenaxe oder, auf (I) übertragen, die Ursprungs-



gerade $\frac{y}{x} = \alpha$ ist Wendeasymptote. Hiermit wieder in Übereinstimmung folgt nach dem analytischen Dreieck aus der reduzierten Gleichung (II)

$$u^{r-1}z + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 z + 1 = 0,$$

dafs die geg. Kurve sich ihrer Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ in derselben Weise nähert, wie es die kubische Hyperbel bezüglich ihrer Ordinatenaxe thut.

Setzt man diese Betrachtungen fort, so folgt der allgemeine

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine einfache gemeinschaftliche Wurzel einer geraden bezw. ungeraden Anzahl sich folgender höchster Aggregate, so ist $\frac{y}{x} = \alpha$ die Gleichung der Asymptote selbst und der unendlich ferne Punkt derselben verhält sich wie ein gewöhnlicher bezw. wie ein Wendepunkt, d. h. die Annäherung der Kurve an die Asymptote erfolgt nach Art der konischen bezw. kubischen Hyperbel.

B. Mehrfache Wurzeln.

41. Einfachste Fälle: Es habe

a) $f_r(x, y) = 0$ eine Doppelwurzel,

dann zeigt sich. wenn die transformierte Gleichung (II), die im vorliegenden Fall die Form hat

$$0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-1} + u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + \cdots + a$$

auf das analytische Dreieck gelegt wird, dafs bezüglich beider Bande keine untere Bestimmungsgerade auftritt, dafs somit für $u = \infty$ auch $z = \infty$ wird. Für diese beiden Extreme reduziert sich (II) auf

$$u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 + u = 0,$$

d. h. die geg. Kurve strebt dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\frac{y}{x} = \alpha$ nach Art der konischen Parabel zu.

b) $f_r(x, y) = 0$ eine dreifache Wurzel,

daher die transformierte Gleichung (II)

$$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-1} + \cdots + z^{r-1}) + \cdots + a$$

und somit die Näherungskurve

$$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^3 + u^2 = 0,$$

d. h. die geg. Kurve verläuft nach dem unendlich fernen Punkt der Geraden $\frac{y}{x} = \alpha$ wie die unendlich fernen Äste der zweiten kubischen Parabel.

c) $f_r(x, y) = 0$ eine vierfache Wurzel

giebt als Näherungskurve die Spitzpunktsparabel

$$u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^4 + u^3 = 0.$$

d) $f_r(x, y) = 0$ eine fünffache Wurzel

giebt als Näherungskurve die Rückkehrspitzparabel

$$u^{r-5} \cdot z^5 + u^{r-1} = 0 \quad \text{oder} \quad z^5 + u^4 = 0 \text{ u. s. f.}$$

Man erhält somit in sämtlichen Fällen eine parabolische Annäherung, daher

Satz: Ist $\frac{y}{x} = \alpha$ eine mehrfache Wurzel des höchsten Aggregats, so hat die Kurve in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ stets einen parabolischen Verlauf und zwar nach Art der konischen bezw. zweiten kubischen Parabel, je nachdem α eine gerade bezw. ungerade mehrfache Wurzel ist.

C. Mehrfache gemeinschaftliche Wurzeln.

42. Die wichtigsten Fälle sind, dafs $\frac{y}{x} = \alpha$ als Wurzel auftritt bei:

a) $f_r(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

$$\text{(II)} \qquad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots z^r) + (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots\cdots + a,$$

dann giebt das analytische Dreieck, auf die Bande ohne u gelegt, die zu dieser parallele Bestimmungsgerade

$$\text{(III)} \qquad 0 = u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-2} \cdot z + u^{r-2} \quad \text{oder} \quad z^2 + z + 1 = 0,$$

d. h. zwei zur Ordinatenaxe $z = 0$, also zur Ursprungsgeraden $\frac{y}{x} = \alpha$ parallele Asymptoten, die wegen des konstanten Glieds in (III) nicht durch den Ursprung gehen, obwohl α eine Wurzel der beiden höchsten Aggregate ist (vgl. 40). Je nach der Beschaffenheit der beiden, von den in (III) nicht geschriebenen Koeffizienten (vgl. 40) abhängigen Wurzeln sind diese Asymptoten reell und getrennt, reell und zusammenfallend oder imaginär konjugiert (vgl. 45, c. Fig. 43 und 44).

b) $f_r(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

$$\text{(II)} \quad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

$$\text{(IIa)} \quad 0 = (z^2 + z)\, u^{r-2} + (z^3 + z^2 + z + 1)\, u^{r-3} + \cdots + a,$$

d. h. gemäfs (35) zwei parallele Asymptoten: $z^2 + z = 0$, die eine $z = 0$ oder $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung. Ihr nähert sich die Kurve gemäfs dem analytischen Dreieck nach Art der konischen Hyperbel

$$\text{(III)} \qquad u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

c) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

$$\text{(II)} \quad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

$$\text{(IIa)} \quad 0 = z^2 \cdot u^{r-2} + (z^3 + z^2 + z + 1)\, u^{r-3} + \cdots\cdots + a,$$

d. h. eine doppelt zu zählende Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung und asymptotische Annäherung der Kurve an dieselbe in der Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die kubische Hyperbel

$$\text{(III)} \qquad u^{r-2} z^2 + u^{r-3} = 0 \quad \text{oder} \quad u z^2 + 1 = 0.$$

d) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

$$\text{(II)} \quad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdot\cdot + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdot\cdot + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdot\cdot z^{r-3}) + (u^{r-4} + \cdots + z^{r-4}) + \cdots$$

woraus für $z = 0$ eine Gleichung $(r - 4)$ten Grads in u, also vier Wurzeln $u = \infty$ und somit $\frac{y}{x} = \alpha$ selbst Asymptote mit der Annäherung

$$\text{(III)} \quad u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$u^2 z^2 + u z + 1 = 0$$

oder

$$(u z + C_1)(u z + C_2) = 0$$

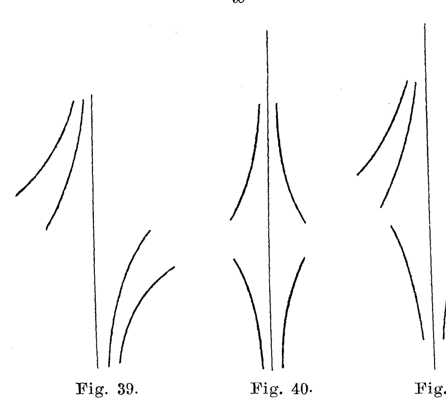


Fig. 39. Fig. 40. Fig. 41.

d. h. nach Art der konischen Hyperbel mit Doppelästen, die durch die Asymptote nicht getrennt oder getrennt sind (Fig. 39 und 40), je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben; sind C_1 und C_2 imaginär konjugiert, so ist die Asymptote von keinem Zweige begleitet.

e) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach,

$$\text{(II)} \qquad 0 = (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdot\cdot + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdot\cdot + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-3}) + (u^{r-5} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-4}) + (u^{r-5} + \cdots + z^{r-5}) + \cdots$$

somit Annäherung an die Asymptote $\frac{y}{x} = \alpha$ sowohl (Fig. 41) nach Art der konischen Hyperbel

$$\text{(III)} \qquad u^{r-2} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad u z + 1 = 0,$$

als kubischen Hyperbel

$$u^{r-5} \cdot + u^{r-3} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 z + 1 = 0.$$

f) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die Kurve erstreckt sich in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ nach Art der konischen Parabel

$$u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} \cdot z^3 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0.$$

g) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-4} \cdot z^4 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots\cdots + a.$$

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ zwei unendlich ferne Zweige wie die zweite kubische Parabel

(III) $$u^{r-2} \cdot z + u^{r-4} \cdot z^4 = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 + z^3 = 0.$$

h) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-5} \cdot z^5 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ zwei unendlich ferne Zweige wie die Spitzpunktsparabel

(III) $$u^{r-2} \cdot z + u^{r-5} \cdot z^5 = 0 \quad \text{oder} \quad u^3 + z^4 = 0.$$

i) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots\cdots + a.$$

Erste kubische Parabel

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

k) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

(II) $$0 = (u^{r-4} \cdot z^4 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a,$$

(III) $$u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-2} = 0$$

oder

$$z^4 + uz^2 + u^2 = 0$$

oder

$$(z^2 + C_1 \cdot u)(z^2 + C_2 \cdot u) = 0.$$

Je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, besitzt die Kurve in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ vier Äste nach Art zweier konischer Parabeln, die sich in ihren Scheiteln entweder von innen oder von aufsen berühren.

l) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,

$$\text{(II)} \qquad 0 = (u^{r-5} \cdot z^5 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Die unendlich fernen Äste der Kurve verlaufen in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ wie diejenigen der zweiten kubischen Parabel

$$\text{(III)} \qquad u^{r-5} \cdot z^5 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 + z^3 = 0$$

und konischen Parabel

$$u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-2} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0.$$

m) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

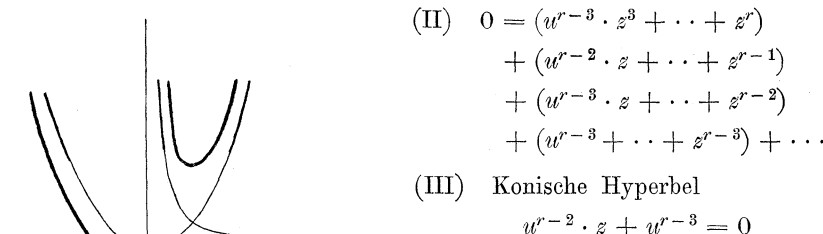


Fig. 42.

$$\text{(II)} \quad 0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-2} \cdot z + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

(III) Konische Hyperbel

$$u^{r-2} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$uz + 1 = 0$$

und konische Parabel

$$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-2} \cdot z = 0$$

oder

$$u + z^2 = 0.$$

Diesen Verlauf der unendlich fernen Zweige besitzt z. B. die Parabel des Descartes (Fig. 42).

n) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach,

$$\text{(II)} \qquad 0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdots + z^{r-2}) + (u^{r-3} + \cdots + z^{r-3}) + \cdots$$

$$\text{(III)} \qquad u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Die Kurve besitzt somit einen unendlich fernen dreifachen Punkt mit drei zur Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parallelen Asymptoten, von denen keine durch den Ursprung geht.

o) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt,
$f_{r-2}(x, y) = 0$ und $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdot\cdot + z^r) + (u^{r-3} \cdot z^2 + . + z^{r-1}) + (u^{r-3} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-2}) + (u^{r-4} \cdot z + \cdot\cdot + z^{r-3}) + u^{r-4} + \cdot\cdot$$

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder $$z(z^2 + z + 1) = 0.$$

Die Kurve besitzt drei zur Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parallele Asymptoten, davon die eine durch den Ursprung.

p) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ und $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Drei parallele Asymptoten:

(III a) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder

$$z(z^2 + z + 1) = 0,$$

davon die eine durch den Ursprung mit Annäherung der Kurve nach Art der konischen Hyperbel.

(III b) $$u^{r-4} \cdot z + u^{r-5} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

q) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten:

(III a) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0$$

oder

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung doppelt zu rechnen mit Annäherung nach Art der kubischen Hyperbel

(III b) $$u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0.$$

r) $f_r(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-1}(x, y) = 0$, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ und $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten

(III a) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 = 0$$

oder

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine $\frac{y}{x} = \alpha$ durch den Ursprung doppelt zu rechnen mit der Annäherung

(III b) $$u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-5} = 0$$

oder

$$u^2 \cdot z^2 + uz + 1 = 0$$



oder

$$(uz + C_1)(uz + C_2) = 0,$$

d. h. nach Art zweier in denselben oder in verschiedenen Quadranten verlaufenden konischen Hyperbeln, je nachdem C_1 und C_2 gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben und ohne Begleitung von Zweigen, wenn C_1 und C_2 imaginär konjugiert sind.

s) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

(II) $$0 = (u^{r-3} \cdot z^3 + \cdots + z^r) + (u^{r-4} \cdot z^3 + \cdots + z^{r-1}) + (u^{r-2} + \cdots + z^{r-2}) + \cdots + a.$$

Erste kubische Parabel

(III) $$u^{r-2} + u^{r-3} \cdot z^3 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

t) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ einfach.

Drei parallele Asymptoten

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z^2 + u^{r-3} \cdot z + u^{r-3} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

davon keine durch den Ursprung.

u) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Zwei parallele Asymptoten

(IIIa) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-3} \cdot z = 0$$

oder

$$z^2(z + 1) = 0,$$

davon die eine doppelt zu zählende durch den Ursprung mit Annäherung der Kurve nach Art der konischen Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0.$$

v) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt,

$f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve nähert sich der Asymptote durch den Ursprung in der Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die II. biquadratische Hyperbel

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^3 + 1 = 0.$$

w) $f_r(x, y) = 0$, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach, $f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt,

$f_{r-3}(x, y) = 0$, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Die Annäherung an die Asymptote durch den Ursprung erfolgt in derselben Art wie bezüglich ihrer Ordinatenaxe die konische Hyperbel

(IIIa) $$u^{r-5} + u^{r-4} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad uz + 1 = 0$$

und die kubische Hyperbel

(IIIb) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z = 0 \quad \text{oder} \quad uz^2 + 1 = 0$$

x) $f_r(x, y) = 0,\ f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0,\ f_{r-3}(x, y) = 0$ doppelt.

II. biquadratische Hyperbel

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-4} = 0 \quad \text{oder} \quad uz^3 + 1 = 0.$$

y) $f_r(x, y) = 0,\ f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0,\ f_{r-3}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-4}(x, y) = 0$ einfach.

Hyperbel V. Ordnung II. Art

(III) $$u^{r-3} \cdot z^3 + u^{r-5} = 0 \quad \text{oder} \quad u^2 z^3 + 1 = 0.$$

z) $f_r(x, y) = 0$ vierfach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve besitzt in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ einen vierfachen Punkt mit vier parallelen Asymptoten:

(III) $$u^{r-4} \cdot z^4 + u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z^2 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

von welchen keine durch den Ursprung geht.

zz) $f_r(x, y) = 0$ fünffach, $f_{r-1}(x, y) = 0$ dreifach,

$f_{r-2}(x, y) = 0$ doppelt, $f_{r-3}(x, y) = 0$ einfach.

Die Kurve besitzt drei parallele Asymptoten, davon keine durch den Ursprung, mit hyperbolischen Ästen:

(IIIa) $$u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-4} \cdot z^2 + u^{r-4} \cdot z + u^{r-4} = 0$$

oder

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0,$$

nebst zwei in derselben Richtung sich erstreckenden parabolischen Zweigen: konische Parabel

(IIIb) $$u^{r-4} \cdot z^3 + u^{r-5} \cdot z^5 = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^2 = 0$$

u. s. f.

43. In diesen Einzeluntersuchungen findet De Gua die Bestätigung des allgemeinen, von ihm aufgestellten und bewiesenen Satzes, daſs in Bezug auf die Lage der Äste zur Asymptote, also abgesehen vom Grad der Krümmung, sämtliche algebraische Kurven nur auf sechs verschiedene Arten (eine Zahl, die wegen der Schnabelspitze auf acht zu erhöhen ist) den unendlich fernen Punkten zustreben. Nach ihm reduziert sich die Gleichung jeder algebraischen Kurve für die Annäherung an die unendlich fernen Punkte stets auf ein Binom

(1) $$y^m = Ax^{\pm n},$$

eine Annahme, womit De Gua denselben Fehler begeht wie bei den Singularitäten im Ursprung (vgl. 6) und infolge deren er die parabolische und hyperbolische Spitze II. Art übersieht; die Betrachtung von (1) ergiebt ihm sowohl für positive n als für negative d. h. für parabolische Zweige sowohl wie für hyperbolische, je drei Fälle, je nachdem m und n gerade oder ungerade Zahlen sind (falls m und n Bruchpotenzen wären, sind durch Potenzieren von (1) ganze Zahlen herzustellen), nämlich:

Der Verlauf der unendlich fernen Kurvenzweige erfolgt im Falle

a) m und n positiv — nach Art der
für m ungerade, n ungerade . . . . . I. kubischen Parabel
m gerade, n ungerade . . . . . II. kubischen Parabel
m ungerade, n gerade . . . . . konischen Parabel.

b) m positiv, n negativ
für m ungerade, n ungerade . . . . . konischen Hyperbel
m gerade, n ungerade . . . . . kubischen Hyperbel (Wendepunkt)
m ungerade, n gerade . . . . . kubischen Hyperbel (Rückkehrpunkt).

Der Fall: m sowohl als n gerade, reduziert sich durch Wurzelziehen auf einen der übrigen sechs Fälle.

Die Asymptotenschnittpunktsgleichung.

44. Führt man wegen der Bedeutung der transformierten Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \psi(z, u) = 0,$$

aus deren Gestalt allein (vgl. 39) De Gua seine interessanten Ergebnisse über die unendlich fernen Punkte ableitet, die Transformation der Gleichung der vorliegenden Kurve $r$ter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = 0$$

wirklich durch und zwar, der Analogie mit den übrigen Aggregaten wegen, nur an demjenigen der Glieder höchster Dimension, schreibt man also

$$\begin{aligned}(3) \qquad f_r(x, y) &= ax^r + bx^{r-1}\cdot y + cx^{r-2}\cdot y^2 + \cdots\cdots + ky^r \\ &= \left(a + b\cdot\frac{y}{x} + c\cdot\frac{y^2}{x^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots + k\cdot\frac{y^r}{x^r}\right)x^r,\end{aligned}$$

so ist, wenn $\frac{y}{x} = \alpha$ eine Wurzel dieses Aggregats ist, $\frac{y}{x} - \alpha$ ein Faktor desselben, soll also $\frac{y}{x}$ selbst Faktor werden, entsprechend dem Verlangen, daſs in der transformierten Gleichung (II) $z = 0$ gemeinschaftlicher oder mehrfacher Faktor der höchsten Aggregate wird, so sind die Wurzeln von (3) um α zu vergröſsern; man hat also in (3) zu setzen

(4) $$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} + \alpha = \frac{\alpha x' + y'}{x'},$$

d. h. an Stelle von y und x die Werte $\alpha x' + y'$ und x', womit (3) übergeht in

(IIa) $$f_r(x', y') = \left(a + b \cdot \frac{\alpha x' + y'}{x'} + c \cdot \frac{(\alpha x' + y')^2}{x'^2} + \cdots + k \cdot \frac{(\alpha x' + y')^r}{x'^r}\right) x'^r$$
$$= a x'^r + b x'^{r-1}(\alpha x' + y') + c x'^{r-2}(\alpha x' + y')^2 + \cdots + k(\alpha x' + y')^r$$
$$= \psi_r(z, u),$$

wenn statt y' und x' die Koordinaten z und u geschrieben werden. Die Aggregate (IIa) erhält man aber auch, wenn in der geg. Gleichung (I) an Stelle von y und x die Werte $\alpha x' + y'$ und x' gesetzt werden, und ersetzt man diese Werte selbst wieder durch $\alpha x + C$ und x, so folgt

(III) $$\psi(z, u) \equiv f(x, \alpha x + C),$$

sobald für C und x die Koordinaten z und u eintreten. Nun ist aber

(IV) $$f(x, \alpha x + C) = 0$$

nichts anderes denn die Gleichung der Schnittpunkte der Kurve (I) mit der zur Richtung α parallelen Asymptote

(5) $$y = \alpha x + C,$$

daher

Satz: Die transformierte Gleichuug $\psi(z, u) = 0$ ist identisch mit der Asymptotenschnittpunktsgleichung.

Auf Grund dieses Satzes ist es sehr einfach, die von De Gua nur der Gestalt nach gegebenen Gleichung $\psi(z, u) = 0$ auch in ihren Koeffizienten zu berechnen. Entwickelt man zu diesem Zweck jedes der Aggregate der Asymptotenschnittpunktsgleichung (IV)

$$f(x, \alpha x + C) = f_r(x, \alpha x + C) + f_{r-1}(x, \alpha x + C) + \cdots + f_1(x, \alpha x + C) + a$$

nach dem Taylorschen Satz, so folgt

(IVa) $$f(x, \alpha x + C) = f_r(x, \alpha x) + \frac{C}{1!}\frac{\partial f_r}{\partial y} + \frac{C^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f_r}{\partial y^2} + \cdots$$
$$+ f_{r-1}(x, \alpha x) + \frac{C}{1!} \cdot \frac{\partial f_{r-1}}{\partial y} + \frac{C^2}{2!}\frac{\partial^2 f_{r-1}}{\partial y^2} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots$$

und schreibt man gemäfs (3)

$$f_r(x, \alpha x) = x^r \cdot f_r(\alpha) \qquad f_{r-1}(x, \alpha x) = x^{r-1} \cdot f_{r-1}(\alpha) \text{ u. s. w.}$$
$$\left.\frac{\partial f_r(x, y)}{\partial y}\right|_{y = \alpha x} = x^{r-1} \cdot f_r'(\alpha) \qquad \left.\frac{\partial^2 f_r(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y = \alpha x} = x^{r-2} \cdot f_r''(\alpha) \text{ u. s. w.},$$

ordnet ferner die Koeffizienten der Potenzen von x in Vertikalkolonnen, so nimmt (IVa) die Form an

(V)
$$f(x,\, \alpha x + C)$$
$$\begin{array}{l|l|l|l}
= f_r(\alpha)\cdot x^r + \frac{C}{1!} f_r'(\alpha) & x^{r-1} + \frac{C^2}{2!} f_r''(\alpha) & x^{r-2} + \frac{C^3}{3!} f_r'''(\alpha) & x^{r-3} + \cdots \\
\qquad + f_{r-1}(\alpha) & \quad + \frac{C}{1!} f_{r-1}'(\alpha) & \quad + \frac{C^2}{2!} f_{r-1}''(\alpha) & \\
 & \quad + f_{r-2}(\alpha) & \quad + \frac{C}{1!} f_{r-2}'(\alpha) & \quad = F(C, x) \\
 & & \quad + f_{r-3}(\alpha) &
\end{array}$$

identisch mit der nach Potenzen von u geordneten Gleichung $\psi(z, u) = 0$, wenn an Stelle von C und x die Buchstaben z und u geschrieben werden. Diese Gleichung hat den Vorteil, daſs sie nicht bloſs wie (II) die Art des unendlich fernen Punkts, sondern die von der Konstanten C abhängige Asymptote desselben selbst zu ermitteln gestattet, wie folgt:

Der Voraussetzung gemäſs ist $f_r(\alpha) = 0$, d. h. eine Wurzel $x = \infty$, soll also ein weiterer Schnittpunkt der Geraden (5) mit der Kurve ins Unendliche rücken, so muſs auch der Koeffizient der zweithöchsten Potenz von x verschwinden, d. h.

$$\frac{C}{1!} f_r'(\alpha) + f_{r-1}(\alpha) = 0 \cdots$$

woraus

(6) $$C = -\frac{f_{r-1}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}$$

und somit die Gleichung der Asymptote

(7) $$y = \alpha x - \frac{f_{r-1}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}.$$

Nachweis der Identität von $\psi(z, u) = 0$ mit $F(C, x) = 0$ an einzelnen Beispielen.

45. Es sei

a) $f_r(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, haben also die beiden höchsten Aggregate von (I) eine gemeinschaftliche Wurzel, so zeigt sich dies in Übereinstimmung mit der Form der transformierten Gleichung $\psi(z, u) = 0$ vgl. 40. A, a darin, daſs sich aus den beiden höchsten Horizontalreihen von (V), welche die beiden höchsten Aggregate der nach beiden Variabeln C und x geordneten Asymptotenschnittpunktsgleichung darstellen, C als Faktor ausscheidet; zugleich folgt aus (6)

$$C = 0,$$

d. h. $y = \alpha x$ ist die Asymptote selbst.

b) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, d. h. α ist eine Doppelwurzel des höchsten Aggregats (vgl. 17), so folgt aus (6)

$$C = \infty,$$

somit die Gleichung der Asymptote $y = \alpha x + \infty$, d. h. die unendlich ferne Gerade ist Asymptote oder die Kurve verläuft in der Richtung $\frac{y}{x} = \alpha$ parabolisch (vgl. 41. B, a).

c) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, d. h. die Doppelwurzel des höchsten Aggregats ist zugleich einfache Wurzel des zweithöchsten, dann verschwinden in (V) die Koeffizienten von x^r und x^{r-1}, es liegen somit zwei Schnittpunkte der Geraden im Unendlichen, aber da gemäfs (6)

$$C = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt, so schneidet jede Gerade in der Richtung α die Kurve in zwei unendlich fernen Punkten. Die Kurve besitzt also in dieser Richtung einen unendlich fernen Doppelpunkt, dessen Asymptoten sich aus der Bedingung bestimmen, dafs sie die Kurve in drei unendlich fernen Punkten schneiden, es verschwindet daher in diesem Fall auch der Koeffizient von x^{r-2}, d. h.

$$\frac{C^2}{2!} f_r''(\alpha) + \frac{C}{1!} f'_{r-1}(\alpha) + f_{r-2}(\alpha) = 0, \tag{8}$$

woraus zwei Werte C_1 und C_2 sich ergeben, mit welchen die Gleichungen der beiden parallelen Asymptoten des unendlich fernen Doppelpunkts lauten

$$y = \alpha x + C_1 \quad \text{und} \quad y = \alpha x + C_2. \tag{9}$$

Je nachdem die Diskriminante der Gleichung (8)

$$2 f_r''(\alpha) \cdot f_{r-2}(\alpha) - f'^2_{r-1}(\alpha) \lesseqgtr 0,$$

ist der unendlich ferne Doppelpunkt ein gewöhnlicher mit zwei getrennten Asymptoten (Fig. 43) oder ein Rückkehrpunkt mit zwei zusammenfallenden Asymptoten (Fig. 44) oder ein isolierter Punkt ohne reelle Zweige (vgl. 42. C, a).

Fig. 43. Fig. 44.

d) $f_r(\alpha) = 0$, $f_r'(\alpha) = 0$, $f_r''(\alpha) = 0$, $f_{r-1}(\alpha) = 0$, d. h. eine dreifache Wurzel des höchsten Aggregats zugleich einfache Wurzel des zweithöchsten, dann verschwinden in (V) wieder die Koeffizienten von x^r und x^{r-1}, die Kurve besitzt somit wieder einen unendlich fernen Doppelpunkt, für welchen gemäfs (8)

$$C_1 = \infty \qquad C_2 = -\frac{f_{r-2}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}.$$

Es ist also nur die eine der beiden Asymptoten endlich, die andere Asymptote ist die unendlich ferne Gerade, m. a. W. die Kurve nähert sich der endlichen Asymptote

$$y = \alpha x - \frac{f_{r-2}(\alpha)}{f_r'(\alpha)}$$

nach Art der konischen Hyperbel und erstreckt sich mit zwei anderen konisch parabolischen Ästen in einer der beiden Richtungen dieser Asymptote (vgl. die Parabel des Descartes; 42. C, m).

Die Regel von De Gua.

46. Während sich die Konstanten C auch in solchen Füllen, wo der Wurzelwert α einer gröſseren Anzahl von Bedingungen unterliegt, aus (V) verhältnismäſsig leicht ermitteln lassen, so ist mit der Kenntnis der Lage der Asymptote und ihrer Schnittpunkte, insbesondere wenn sie ins Unendliche rückt, doch die Art der Annäherung der Kurve noch nicht so einfach zu beurteilen, auch giebt hierüber im allgemeinen die auf das analytische Dreieck gelegte Kurvengleichung (I) keinen Aufschluſs. Um über diese Annäherung einen sofortigen und sicheren Entscheid zu treffen, bleibt nur das

Verfahren von De Gua:

Bestimmt man für jeden der Wurzelwerte $\frac{y}{x} = \alpha$ des höchsten Aggregats der nach beiden Variabeln geordneten Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ dle Asymptotenschnittpunktsgleichung $F(C, x) = 0$ und legt sie auf das analytische Dreieck, indem man C und x als Variable betrachtet, so geben die oberen Bestimmungsgeraden dieser Gleichung das Verhalten der Kurve in den betreffenden unendlich fernen Punkten, hierbei ist die jeweilige Asymptote als neue X-Axe zu betrachten.

Die singulären Punkte in analytischer Behandlung.

A. Singuläre Punkte auf den Koordinatenaxen.

47. Ordnet man die Gleichung der geg. Kurve $n$ter Ordnung nach fallenden Potenzen der einen Variabeln und schreibt

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= Ay^n + (ax + b)\,y^{n-1} + (cx^2 + dx + e)\,y^{n-2} + \cdots \\ &\qquad + (Bx^n + kx^{n-1} + \cdots + rx + s) = 0, \\ &= Ay^n + f_1(x)\,y^{n-1} + f_2(x)\,y^{n-2} + \cdots + f_n(x), \end{aligned}$$

so giebt $y = 0$ die Entfernungen der n Kurvenschnittpunkte auf der X-Axe vom Ursprung als Wurzeln der Gleichung

(1) $$f_n(x) = 0.$$

Je nachdem mehrere dieser Wurzeln gleich sind oder zugleich als Wurzeln der vorhergehenden Koeffizienten $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ u. s. f. von y auftreten, zeigt die Kurve in den betreffenden Schnittpunkten ein besonderes Verhalten. Die einfachsten Möglichkeiten sind, daſs eine solche Wurzel $x = \alpha$ auftritt bei

a) $f_n(x) = 0$ doppelt	dann ist die Abscissen-axe im Schnittpunkt	gewöhnliche Tangente
b) $f_n(x) = 0$ dreifach		Wendetangente (inflexion)
c) $f_n(x) = 0$ vierfach		Flachpunktstangente (serpentement infiniment petit)
d) $f_n(x) = 0$ fünffach		Wendeflachpunktstangente (serpentement affecté d'inflexion).

Die Kurve berührt somit die Abscissenaxe, abgesehen vom Grad der Krümmung, im Fall einer mehrfachen Wurzel von gerader bezw. ungerader Ordnung nach Art der konischen bezw. ersten kubischen Parabel.

e) $f_n(x) = 0$, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

dann hat für $x = \alpha$ Gleichung (I) die Form

$$Ay^n + f_1(\alpha)y^{n-1} + f_2(\alpha)y^{n-2} + \cdots + f_{n-2}(\alpha)y^2 = 0,$$

woraus sich ergiebt $y^2 = 0$; man erhält somit für einen Wert $x = \alpha$ zwei Werte $y = 0$, d. h. die Ordinate des Abscissenschnittpunkts ist Tangente in diesem Punkt.

f) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

dann ergeben sich für zwei Werte $x = \alpha$ auch zwei Werte $y = 0$, d. h. die Abscissenaxe sowohl wie die Ordinate des Kurvenschnittpunkts $(\alpha, 0)$ treffen die Kurve zweimal in diesem Punkt, letzterer ist also ein Doppelpunkt.

g) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

giebt Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Tangente.

h) $f_n(x) = 0$ vierfach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Wendetangente.

i) $f_n(x) = 0$ fünffach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Flachpunktstangente.

k) $f_n(x) = 0$ sechsfach. $f_{n-1}(x) = 0$ einfach oder mehrfach,

Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit letzterer als Wendeflachpunktstangente.

l) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach oder mehrfach: Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit zugehöriger Ordinate als Tangente, da für $x = \alpha$ drei Werte $y = 0$ sich ergeben.

m) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$, $f_{n-3}(x) = 0$ einfach bezw. mehrfach:
Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit zugehöriger Ordinate als Wendetangente.

n) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach oder mehrfach: entweder dreifacher Punkt auf der Abscissenaxe oder Doppelpunkt auf der Abscissenaxe mit dieser sowie seiner zugehörigen Ordinate als Tangenten.

48. Diese Ergebnisse verwendet De Gua, um umgekehrt die Bedingungen für die Existenz der eben aufgefundenen ausgezeichneten Punkte der Abscissenaxe aufzustellen. Soll z. B. die geg. Kurve auf der Abscissenaxe einen Doppelpunkt besitzen, so mufs $f_n(x) = 0$ eine Doppelwurzel haben, die zugleich einfache Wurzel von $f_{n-1}(x) = 0$ ist, es bestehen somit in diesem Fall die Gleichungen (vgl. 17)

$$f_n(x) = 0, \qquad f_n'(x) = 0, \qquad f_{n-1}(x) = 0,$$

woraus sich entweder mittels der Newtonschen Formeln (vgl. 13) oder nach dem Kettenbruchverfahren von De Gua (vgl. 16) zwei Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Gleichung (I) ergeben.

Newtonscher Sekantensatz.

49. Im Anschlufs an die vorhergehenden Betrachtungen zeigt De Gua die geometrische Bedeutung des letzten Terms $f_n(x) = 0$ der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung (I), vgl. 47. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ die Wurzeln dieses Terms, ist also

$$f_n(x) = B(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_n),$$

so ergiebt sich, da für jedes beliebige, fest angenommene x dieser alsdann konstante Term mit dem Koeffizienten A von y^n dividiert das Produkt der n Wurzeln y der Gleichung (I), absolut genommen, darstellt, aus

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n = \frac{B}{A}(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$$

das Verhältnis

$$\frac{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)} = \frac{B}{A}$$

als konstant, eine Eigenschaft, die Newton in der *Enumeratio* als dritte allgemeine Eigenschaft aller algebraischen Kurven aufzählt und die in Worten lautet:

Satz: Zieht man durch irgend einen Punkt der Ebene einer algebraischen Kurve zwei Parallelen zu den Axen so, daſs jede derselben die Kurve in ebensoviel endlichen Punkten schneidet als der Grad der Gleichung angiebt, so stehen die Produkte der von jenem Punkt aus bis zu den Kurvenschnittpunkten gemessenen Abschnitte beider Geraden in einem konstanten Verhältnis, nämlich im Verhältnis der beiden Koeffizienten der höchsten Potenzen beider Veränderlichen, wenn die eine der schneidenden Geraden zu einer Koordinatenaxe selbst gewählt wird.

Für die Kurven dritter Ordnung insbesondere können diese Produkte als die Rauminhalte von Quadern betrachtet werden; haben daher die höchsten Potenzen x^3 und y^3 der Gleichung dritten Grads gleiche Koeffizienten, so sind die aus den oben bezeichneten Abschnitten als Kanten erbauten Quader gleich; aus diesen sechs Abschnitten lieſsen sich somit durch Vereinigung je zweier, die nicht auf derselben Sekante liegen, drei Seiten eines Dreiecks herstellen, in welchem nach dem Satz von Ceva die durch die Abschnitte bestimmten Transversalen sich in einem Punkte schneiden.

B. Singuläre Punkte im Ursprung mit den Koordinatenaxen als Tangenten.

50. Hat der letzte Term $f_n(x) = 0$ der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung (I) die Wurzel $x = 0$, fehlt also das konstante Glied, so geht die Kurve durch den Ursprung und man erhält für die bekanntesten der in 47. aufgeführten Fälle im Besonderen folgende Kriterien in den Koeffizienten bezw. folgende Normalformen der Kurvengleichung, welch letztere für die zunächst in Betracht kommenden Fälle nur vom dritten Grad zu sein braucht und lauten möge

$$\text{(Ia)} \quad f(x,y) = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a$$

$$\text{(I)} \quad = hy^3 + (ix+e)\,y^2 + (kx^2 + fx + b)\,y + (lx^3 + gx^2 + cx + a).$$

Je nachdem die Wurzel $x = 0$ auftritt bei

a) $f_n(x) = 0$, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach,

erhält man

$$\text{(I)} \quad 0 = hy^3 + ixy^2 + (kx + f)\,xy + (lx^2 + gx + c)\,x$$

$$\text{(Ia)} \quad 0 = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + gx^2 + fxy + cx,$$

für $x = 0$ also drei Werte $y = 0$, für $y = 0$ dagegen nur einen $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Wendepunkt mit der Ordinatenaxe als Wendetangente.



b) $f_n(x) = 0$ dreifach,

(I) $$0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx + b)y + lx^3$$

(Ia) $$0 = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + fxy + ey^2 + by,$$

für $x = 0$ einen Wert $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Wendepunkt mit Abscissenaxe als Wendetangente.

c) $f_n(x) = 0$ doppelt, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

(I) $$0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3 + gx^2$$

(Ia) $$0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + (ey^2 + fxy + gx^2),$$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$ und umgekehrt, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt. Derselbe ist als solcher aus der Form (Ia) der Kurvengleichung sofort zu erkennen, wenn das niederste Aggregat von der zweiten Dimension ist (siehe d, e, f).

d) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ einfach,

(I) $$0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3$$

(Ia) $$0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + ey^2 + fxy,$$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt, dessen eine Tangente die Abscissenaxe ist.

e) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$, $f_{n-2}(x) = 0$ einfach,

(I) $$0 = hy^3 + ixy^2 + (kx^2 + fx)y + lx^3$$

(Ia) $$0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + fxy$$

für $x = 0$ drei Werte $y = 0$ und umgekehrt, für eine beliebige Gerade $y = \lambda x$ durch den Ursprung dagegen nur zwei Werte $x = 0$, $y = 0$, d. h. der Ursprung ist Doppelpunkt mit den Koordinatenaxen als Tangenten.

f) $f_n(x) = 0$ dreifach, $f_{n-1}(x) = 0$ doppelt,

(I) $$0 = hy^3 + (ix + e)y^2 + kx^2y + lx^3$$

(Ia) $$0 = (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + ey^2,$$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ drei Werte $x = 0$, also zunächst der Ursprung Doppelpunkt mit Abscissenaxe als Tangente (wie bei d). Während jedoch dort zwei ausgezeichnete Geraden vorhanden sind, welche die Kurve im Ursprung in drei Punkten schneiden, also Tangenten des Doppelpunkts sind, nämlich

$$ey^2 + fxy = y(ey + fx) = 0,$$

d. h. die Abscissenaxe und die Ursprungsgerade $\frac{y}{x} = -\frac{f}{e}$, existiert hier gemäfs

$$ey^2 = 0$$

nur die Abscissenaxe als einzige aber doppelt zu zählende Tangente, der

Ursprung ist somit ein Doppelpunkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten, d. h. ein Rückkehrpunkt, eine sog. Spitze I. Art.

Analog lautet die Gleichung der Kurve, die im Ursprung einen Rückkehrpunkt mit der Ordinatenaxe als Tangente besitzt:

$$(hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + gx^2 = 0.$$

51. Um allgemein für jede beliebige durch den Ursprung gehende Kurve das Verhalten in diesem Punkt zu ermitteln, betrachtet De Gua das Aggregat der durch die unterste Bestimmungsgerade des analytischen Dreiecks ausgeschiedenen Glieder der Kurvengleichung. Da dieses Aggregat stets auf die Form gebracht werden kann

$$(y^m - Ax^n)(y^p - Bx^q)(y^r - Cx^s) \cdots\cdot = 0,$$

wo m und n ganze positive Zahlen sind, so beschränken sich nach De Gua die Möglichkeiten, wie die beiden durch den Ursprung getrennten Teile eines und desselben Zweigs $y^m - Ax^n = 0$ sich in diesem Punkt vereinigen können, auf drei Fälle:

Diese Vereinigung erfolgt, je nachdem

m ungerade, n gerade	nach Art der Krümmung im Scheitel der	konischen Parabel	also in einem	gewöhnlichen Punkt
m ungerade, n ungerade		I. kubischen Parabel		Wendepunkt
m gerade, n ungerade		II. kubischen Parabel		Rückkehrpunkt.

Selbstberührung.

52. Im Anschluſs an die Spitze I. Art, die er als eine Selbstberührung der Kurve auffaſst, untersucht nun De Gua, um sämtliche einfachen Singularitäten aufzufinden, den allgemeinsten Fall der Selbstberührung einer algebraischen Kurve, geometrisch dargestellt durch die Berührung zweier konisch parabolischer Zweige im Ursprung als Scheitel, analytisch durch das Aggregat der Glieder niederster Ordnung:

$$\text{(I)} \qquad y^4 + axy^2 \pm b^2x^2 = 0$$

oder

$$\text{(Ia)} \qquad \left(y^2 - \frac{-a + \sqrt{a^2 \mp 4b^2}}{2}\,x\right)\left(y^2 - \frac{-a - \sqrt{a^2 \mp 4b^2}}{2}\,x\right) = 0$$

und findet für

a) b^2 positiv, $4b^2 < a^2$:

Parabolische Berührung von innen, als Embrassement bezeichnet, ein Doppelpunkt, der erst bei Kurven vierter Ordnung auftritt, da die Abscissenaxe als Tangente vierpunktig berührt (Fig. 45).

b) b^2 positiv, $4b^2 > a^2$:

Isolierter Selbstberührungspunkt ohne Zweige bezw. Doppelpunkt mit zwei imaginär konjugierten parabolischen Zweigen und gemeinsamer Tan-

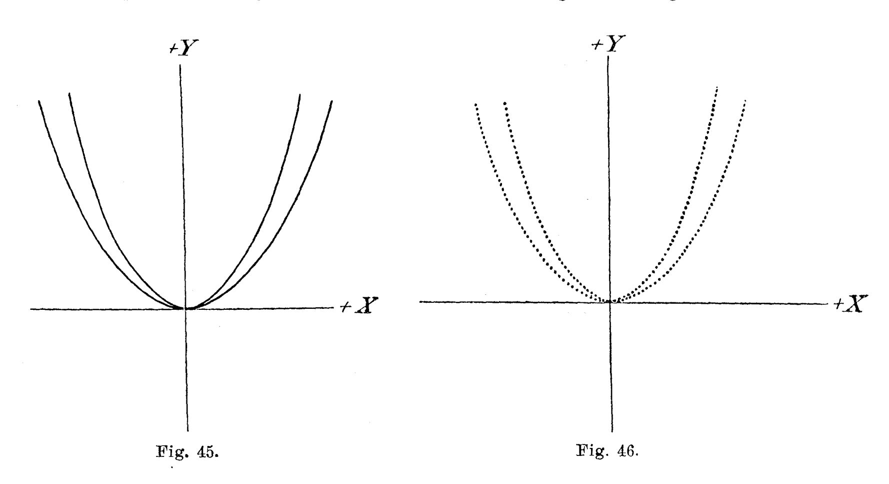


Fig. 45. Fig. 46.

gente, als point conjugué de la 2e espèce bezeichnet, zum Unterschied gegen den isolierten Punkt mit zwei imaginär konjugierten Tangenten, point conjugué de la 1e espèce (Fig. 46. 47).

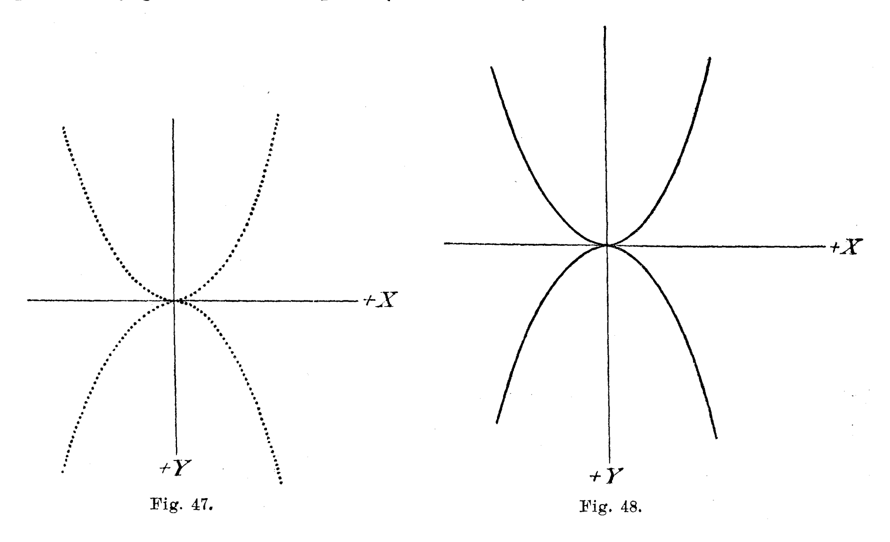


Fig. 47. Fig. 48.

c) b^2 positiv, $4b^2 = a^2$,

womit (I) übergeht in ein vollständiges Quadrat:

$$(y^2 + \frac{a}{2}x)^2 = 0, \tag{II}$$

d. h. die parabolischen Zweige decken sich, also Berührung von innen oder Embrassement.

d) b^2 negativ, $4b^2 \lesseqgtr a^2$.

Parabolische Berührung von aufsen, von De Gua als „Oskulation“ bezeichnet, die ebenso gut durch Vereinigung zweier Spitzen I. Art wie zweier Wendepunkte entstanden gedacht und deshalb auch als Kombination betrachtet werden kann (Fig. 48. 50. 49). Gleichung (I) begreift daher für den Fall d) auch die Gleichungen der Spitze und des Wendepunkts in sich.

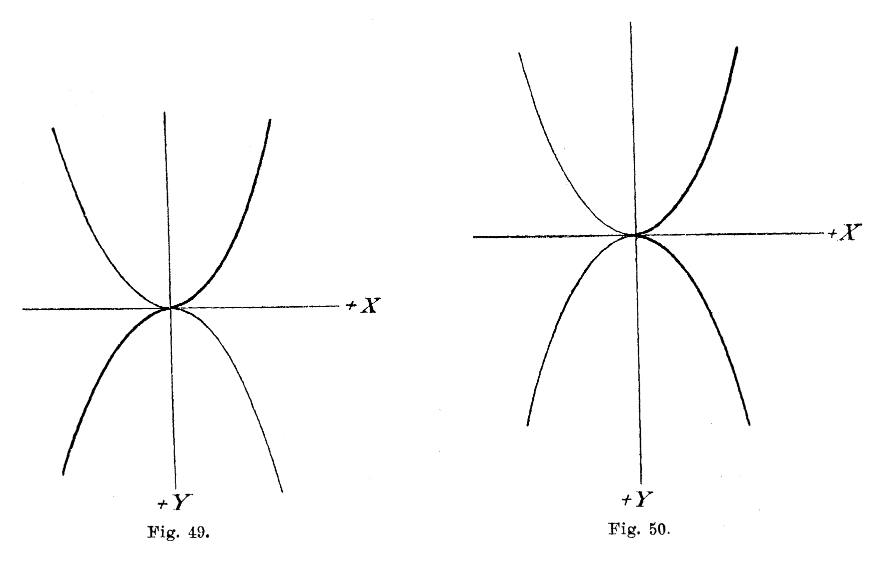


Fig. 49. Fig. 50.

Im Falle c) beansprucht nun De Gua dasselbe Embrassement wie im Fall a), wo die parabolischen Zweige getrennt sind, und bestreitet somit, da bei der Übereinstimmung der analytischen Gleichung kein Grund vorliege, im einen oder anderen Fall die Parabelzweige im Ursprung aufhören zu lassen, dafs die von De l'Hospital durch Evolution aufgefundene Schnabelspitze (Fig. 51) eine selbständige Singularität darstelle. Obwohl De Gua die Entstehung der Schnabelspitze bei der durch stete Abwicklung eines auf eine Kurve aufgelegten Fadens sich bildenden Evolvente, wenn der Faden einen Wendepunkt passiert, keineswegs in Abrede stellt, so betrachtet er doch keinen der beiden Zweige derselben als die Fortsetzung des andern, da

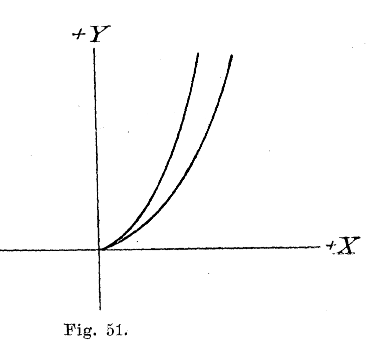


Fig. 51.

er eben aus Gleichung (I) bezw. (II) — und De Gua anerkennt nur die analytische Gleichung als den Inbegriff aller geometrischen Eigenschaften der Kurve — die analytische Zusammengehörigkeit beider Zweige nicht zu erkennen vermag; er behauptet also trotz der Kontinuität der Bewegung, durch die eine Kurve erzeugt wird, die Diskontinuität derselben Kurve, ein Widerspruch, den erst Euler 1748 in seiner Arbeit: Sur le point de rebroussement de la 2e espèce, Mém. de Berlin 1748, beseitigt, indem er zeigt, daſs unter Umständen der erste Term einer Entwicklung $y^m = Ax^n$ bezw. $y = Ax^{\frac{n}{m}}$ für die Beurteilung der geometrischen Gestalt des hierdurch dargestellten Zweigs nicht immer ausreicht, wie De Gua meint, insofern als für gewisse Werte von x das erste Glied der Entwicklung wohl reell, das zweite dagegen imaginär und somit die ganze Reihe komplex werden kann, in welchem Fall reelle Zweige auch trotz des reellen ersten Terms nicht bestehen. Hierfür sind zwei treffende Beispiele die Kurven vierter Ordnung:

$$\text{(A)} \qquad x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{a^2}{4}y^2 = 0$$

$$\text{(B)} \qquad x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{a^2}{4}y^2 = 0,$$

die beide im Ursprung dieselbe innere parabolische Selbstberührung

$$\text{(II)} \qquad \left(x^2 - \frac{a}{2}y\right)^2 = 0$$

besitzen. Entwickelt man jeden der beiden Zweige (I), so folgt (vgl. hierzu den Beweis von Stirling in 29.) für Kurve (A):

$$\text{(1)} \qquad y = \frac{2}{a}x^2 + u.$$

$$\frac{a^2}{4}u^2 - a\left(\frac{2}{a}x^2 + u\right)^3 = 0$$

$$\text{(2)} \quad \frac{a^2}{4}u^2 - \frac{8}{a^2}x^6 - \frac{12}{a}ux^4 - 6u^2x^2 - au^3 = 0,$$

woraus nach dem analytischen Dreieck die untere Bestimmungsgerade

$$\frac{a^2}{4}u^2 - \frac{8}{a^2}x^6 = 0$$

$$\text{(3)} \qquad u = \pm\frac{4\sqrt{2}}{a^2}x^3 + t$$

eingesetzt in (2) folgt:

$$\left(\frac{a^2}{4} - 6x^2\right)\left(\frac{32}{a^4}x^6 \pm \frac{8\sqrt{2}}{a^2}x^3t + t^2\right) - \frac{8}{a^2}x^6 - \frac{12}{a}x^4\left(t \pm \frac{4\sqrt{2}}{a^2}x^3\right)$$
$$- a\left(t^3 \mp \frac{12\sqrt{2}}{a^2}x^3t^2 + \frac{96}{a^4}x^6t \pm \frac{128\sqrt{2}}{a^6}\right) = 0,$$

woraus wieder die untere Bestimmungsgerade

$$(4) \qquad \pm 2\sqrt{2} \cdot x^3 t \mp \frac{48\sqrt{2}}{a^3} x^7 = 0$$

$$t = \frac{24}{a^3} x^4.$$

Die Entwicklungen für die beiden Zweige (I) lauten daher gemäfs (1), (3), (4):

$$(\text{IIa}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + \frac{4\sqrt{2}}{a^2} x^3 + \frac{24}{a^3} x^4 + \cdots$$

$$(\text{IIb}) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 - \frac{4\sqrt{2}}{a^2} x^3 + \frac{24}{a^3} x^4 - \cdots$$

und die jeweiligen beiden Ordinaten, die sich aus (IIa) für die Abscissen $\pm x$ ergeben, sind somit vertauscht dieselben, die für die gleichen Abscissen aus (IIb) folgen (Fig. 52); man erhält somit zwei zur Ordinatenaxe symmetrische, dem Ursprung zu sich auf der konkaven bezw. konvexen Seite mehr und mehr der Parabel $y = \frac{2}{a} x^2$ nähernde Paare reeller Zweige, d. h. eine reelle vollständige innere Berührung (Embrassement).

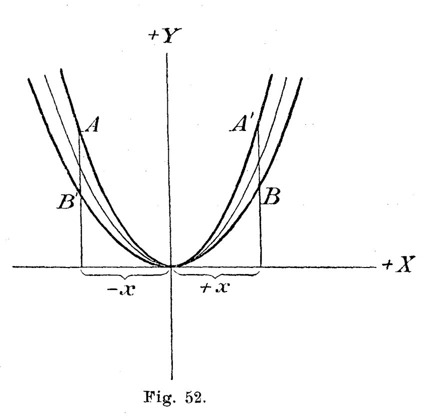


Fig. 52.

Kurve (B):

$$(1) \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + u$$

$$(2) \qquad \frac{a^2}{4} u^2 - ax\left(\frac{2}{a} x^2 + u\right)^2 = 0$$

$$\frac{a^2}{4} u^2 - \frac{4}{a} x^5 - 4x^3 u - axu^2 = 0,$$

woraus die untere Bestimmungsgerade

$$\frac{a^2}{4} u^2 - \frac{4}{a} x^5 = 0$$

$$(3) \qquad u = \pm \frac{4\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}} + t$$

eingesetzt in (2)

$$\left(\frac{a^2}{4} - ax\right)\left(\frac{16}{a^3} x^5 \pm \frac{8\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}} \cdot t + t^2\right) - 4x^3\left(t \pm \frac{4\sqrt{a}}{a^2} x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{4}{a} x^5 = 0$$

oder mit $\sqrt{x} = z$, da die Bruchpotenzen von x durch die Multiplikation nicht verschwinden und somit behufs Auftragung der Gleichung auf das analytische Dreieck zu den schon vorhandenen Parallelen mit der Bande ohne x noch die Parallelen im mittleren Abstand gezogen werden müfsten

$$-\frac{16}{a^2} z^{12} - \frac{16\sqrt{a}}{a^2} z^{11} \mp \frac{8\sqrt{a}}{a} z^7 t - 4z^6 t \pm 2\sqrt{a} z^5 t - az^2 t^2 + \frac{a^2}{4} t^2 = 0,$$

woraus zwei untere Bestimmungsgeraden:

$$t^2 + z^5 t = 0 \qquad \text{oder} \qquad t = z^5 = x^{\frac{5}{2}}$$

giebt keinen neuen Term, dagegen

$$(4) \qquad \pm 2\sqrt{a} \cdot z^5 t \mp \frac{16\sqrt{a}}{a^2} z^{11} = 0 \qquad \text{oder} \qquad t = \frac{8}{a^2} z^6 = \frac{8}{a^2} x^3$$

und somit gemäſs (1), (3), (4) die Entwicklungen für die beiden Zweige (I)

$$\text{(IIc)} \qquad y = \frac{2}{a} x^2 + \frac{4\sqrt{a}}{a} x^2 \sqrt{x} + \frac{8}{a^2} x^3 + \cdots$$

$$\text{(IId)} \qquad y = \frac{2}{a} x^2 - \frac{4\sqrt{a}}{a} x^2 \sqrt{x} + \frac{8}{a} x^3 - \cdots$$

Für negative Werte von x wird der zweite Term und somit jede der beiden Reihen imaginär, es bestehen daher nur auf der positiven Seite der Abscissenaxe zwei, dem Ursprung zu sich mehr und mehr der Parabel $y = \frac{2}{a} x^2$ nähernde Zweige, deren Ordinaten, stets sehr kleine Werte von x vorausgesetzt, durch Vermehren bezw. Vermindern der Ordinaten jener Parabel um den Betrag $\frac{4}{\sqrt{a}} \cdot x^2 \sqrt{x}$ erhalten werden. Die Kurve hat also im Ursprung eine Schnabelspitze (Fig. 53) und der von De Gua vergebens gesuchte analytische Ausdruck für die geometrische Zusammengehörigkeit beider Zweige derselben d. h. dafür, daſs jeder der Zweige sich durch die Spitze hindurch in den andern fortsetzt, lautet demnach

$$\text{(III)} \qquad y = Ax^2 \pm Bx^{\frac{5}{2}}.$$

Fig. 53.

Die Schnabelspitze.

53. Schafft man in 52. III die Wurzelgröſse weg, so folgen aus der nach Potenzen von y geordneten Gleichung

$$\text{(IIIa)} \qquad y^2 - 2Ax^2y + (A^2 - B^2x)x^4 = 0$$

für $x = 0$ zwei Werte $y = 0$, für $y = 0$ vier Werte $x = 0$, die Schnabelspitze ist somit ein Doppelpunkt mit der Abscissenaxe als Wendetangente, in Übereinstimmung mit 47. h, da $x = 0$ als Wurzel auftritt bei

$f_n(x) = 0$ vierfach, $f_{n-1}(x) = 0$ doppelt,

desgleichen in Übereinstimmung mit 47. m, sobald man die Gleichung nach Potenzen von x ordnet:

$$\text{(III)} \qquad B^2x^5 - A^2x^4 + 0 \cdot x^3 + 2Ayx^2 + 0 \cdot x - y^2 = 0,$$

in welcher $y = 0$ als Wurzel auftritt bei

$$f_n(y) = 0 \text{ doppelt, } f_{n-1}(y) = 0,\ f_{n-2}(y) = 0,\ f_{n-3}(y) = 0 \text{ einfach.}$$

Aus der gleichzeitig nach beiden Variabeln geordneten Gleichung (IIIb) folgt ferner gemäſs 50. f, da das Aggregat der Glieder niederster Dimension sich auf $y^2 = 0$ reduziert, daſs auch der zweite Zweig des Doppelpunkts die Abscissenaxe berührt. Die Schnabelspitze ist somit, wie schon Maupertuis aus geometrischen Betrachtungen richtig erkannt hat (vgl. 9), aufzufassen als Spitze I. Art, deren einer Zweig im Ursprung noch einen Wendepunkt besitzt, beide Zweige verlaufen somit auf derselben Seite der gemeinschaftlichen Tangente.

53a. Untersucht man die Kurven niederster Ordnung, für welche die Ordinate sich als steigende Potenzreihe der Abscisse darstellt, aber so, daſs einer der Terme eine gerade Wurzel enthält, damit nur positive Werte von x reelle Ordinaten ergeben, so sind die einfachsten Fälle:

a) $y = \alpha x \pm \beta x^{\frac{3}{2}}$ oder $(y - \alpha x)^2 = \beta^2 x^3$,

eine Kurve dritter Ordnung mit zwei der Geraden $y = \alpha x$ im Ursprung sich nähernden Zweigen, deren Ordinaten durch Vermehren bezw. Vermindern der Ordinate jener Geraden um den Betrag $\beta x \sqrt{x}$ erhalten werden. Die Kurve hat somit im Ursprung eine Spitze I. Art; dieselbe Singularität besitzen sämtliche höheren Kurven, für welche die Potenzreihe mit einem linearen Term beginnt, also

$$y = \alpha x + \beta x^m \sqrt[n]{x^p},$$

da sich wegen des durch die gerade Wurzel bedingten Doppelzeichens $\pm$ beide Zweige der Kurve von entgegengesetzten Seiten her der Geraden $y = \alpha x$ nähern.

b) $y = \alpha x^2 \pm \beta x^{\frac{5}{2}}$ oder $(y - \alpha x^2)^2 = \beta^2 x^5$,

eine Kurve fünfter Ordnung mit Schnabelspitze im Ursprung (vgl. 52. III). Auſserdem schneidet die Kurve noch die Abscissenaxe im Punkt $x = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\cdot$

c) $y = \alpha x^{\frac{1}{2}} \pm \beta x^{\frac{3}{4}}$ oder $(y^2 - \alpha^2 x)^2 = 4\alpha\beta^2 \cdot x^2 y + \beta^4 x^3$.

Um die Annäherung dieser Kurve vierter Ordnung an die Parabel $y^2 = \alpha^2 x$ zu ermitteln, sind diesmal die Zweige nach Potenzen von y zu entwickeln, daher

$$x = \frac{y^2}{\alpha^2} + u$$

eingesetzt

$$\alpha^4 u^2 - 4\alpha\beta^2 \cdot y\left(\frac{y^2}{\alpha^2} + u\right)^2 - \beta^4\left(\frac{y^2}{\alpha^2} + u\right)^3 = 0,$$

woraus die unterste Bestimmungsgerade

$$\alpha^4 u^2 - 4\alpha\beta^2 \cdot \frac{y^5}{\alpha^4} = 0$$

$$u = \pm \frac{2\beta}{\alpha^3 \sqrt{\alpha}} y^{\frac{5}{2}}$$

und somit die beiden Entwicklungen

$$x = \frac{1}{\alpha^2} \cdot y^2 \pm \frac{2\beta}{\alpha^3 \sqrt{\alpha}} \cdot y^{\frac{5}{2}} + \cdots$$

d. h. die vorliegende Kurve vierter Ordnung hat im Ursprung eine Schnabelspitze mit der Ordinatenaxe als Tangente. Die Schnabelspitze tritt somit bei den Kurven vierter Ordnung erstmals als Singularität auf. (Euler, Mém. de Berlin 1748, pg. 212.)

Spitzpunkt.

54. Unter denjenigen singulären Punkten, in denen sich die Teile eines Zweigs, abgesehen vom Grad der Krümmung, wie in einem gewöhnlichen Punkt vereinigen, schenkt De Gua noch eine kurze Beachtung dem Spitzpunkt, den er erstmals in der in 22. Fig. 12 beschriebenen Weise als Sonderfall eines dreifachen Punkts auffaſst (point triple à trois directions égales ou coincidentes et d'une multiplicité invisible), während Maupertuis ihn durch das Zusammenfallen zweier Spitzen I. Art und eines Doppelpunkts (point de double pointe, vgl. 22. Fig. 13), De Bragelongne durch das Verschwinden eines Knotens (Lemnisceros infiniment petit) nach Art der Fig. 54, also durch das Zusammenfallen dreier Doppelpunkte entstehen läſst, was De Gua für geometrisch unzulässig erachtet, da er einen dreifachen Punkt nicht äquivalent drei Doppelpunkten anzusehen vermag. Mit letzterer Ansicht steht somit De Gua im Widerspruch zur heutigen Auffassung, die mit derjenigen von Maupertuis und De Bragelongne übereinstimmt, insofern als, gestützt auf Betrachtungen über den Schnitt einer Kurve und ihrer ersten Polare, jeder $k$fache Punkt zu $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten zu rechnen ist.

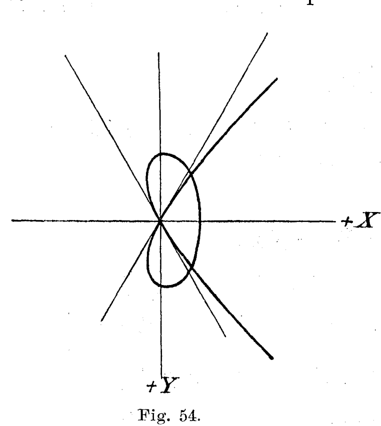


Fig. 54.

C. Singuläre Punkte im Ursprung mit beliebiger Tangentenrichtung.

55. Zur Ermittelung der Tangenten dreht De Gua die Ordinatenaxe um einen Winkel $\sphericalangle\, \varphi$, bestimmt durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{m}{n}$, bis die Anzahl der im Ursprung zusammenfallenden Schnittpunkte der neuen Ordinatenaxe U mit der Kurve den Bedingungen der Tangente genügt. Die Schnittpunktsgleichung dieser U-Axe mit der geg. Kurve

$$(1) \qquad f(x, y) = a + (by + cx) + (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + (lx^3) + \cdots$$

ergiebt sich mittels

$$x = nu, \qquad y = mu$$

(vgl. 38) zu

$$(2) \qquad \varphi(u) = a + (bm + cn)u + (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (hm^3 + im^2n + kmn^2 + ln^3)u^3 + \cdots$$

Ist daher der Ursprung ein $k$facher Punkt, so mufs jeder Strahl durch den Ursprung die Kurve in diesem Punkt in k zusammenfallenden Punkten treffen d. h. für jedes beliebige m und n müssen sich k Werte $u = 0$ ergeben, woraus folgt, dafs die k ersten Terme von (2) identisch verschwinden müssen, daher

Satz: Ist das niederste Aggregat der nach steigenden Potenzen beider Variabeln geordneten Kurvengleichung von $k$ten Grad, so hat die Kurve im Ursprung einen $k$fachen Punkt.

Es ist somit der Ursprung:

gewöhnlicher Kurvenpunkt für $a = 0$

Doppelpunkt . . . . „ $a = 0 \quad b = 0, \quad c = 0$

Dreifacher Punkt . . . „ $\left.\begin{matrix} a = 0, & b = 0, & c = 0 \\ e = 0, & f = 0, & g = 0 \end{matrix}\right\}$ u. s. w.

Soll die U-Axe für einen der Zweige des $k$fachen Punkts Tangente werden, so mufs sie die Kurve in $k + 1$ Punkten im Ursprung treffen; es mufs daher in (2) auch noch der Term u^k d. h. das Aggregat der Glieder $k$ter Dimension in (1) verschwinden, somit

Satz: Das gleich Null gesetzte Aggregat der Glieder niederster Dimension $f_k(x, y) = 0$ der nach steigenden Potenzen beider Variabeln geordneten Kurvengleichung giebt die k Tangenten des $k$fachen Punkts im Ursprung.

Erstes Beispiel: Das niederste Aggregat von der zweiten Dimension:

$$f(x, y) = (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3) + \cdots$$

Die Kurve hat im Ursprung einen Doppelpunkt (vgl. 50. c), dessen Tangentenpaar sich ergiebt aus

$$ey^2 + fxy + gx^2 = 0$$

als reell und getrennt, reell und zusammenfallend, imaginär konjugiert, je nachdem die Diskriminante $f^2 - 4eg \gtreqless 0$, d. h. der Ursprung ist ein gewöhnlicher Doppelpunkt, eine Spitze I. Art oder ein isolierter Punkt I. Art, wie ihn schon Newton durch das Verschwinden des bei gewissen Kurven dritter Ordnung sich abspaltenden Ovals entstehen läſst.

Zweites Beispiel. Das niederste Aggregat von der dritten Dimension:

$$f(x, y) = hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + \cdots$$

Die Kurve hat im Ursprung einen dreifachen Punkt, dessen Tangenten sich ergeben aus

$$hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0.$$

Je nach der Beschaffenheit der Wurzeln bestehen für den dreifachen Punkt folgende Möglichkeiten:

a) Alle drei Wurzeln reell und verschieden: Gewöhnlicher dreifacher Punkt mit drei getrennten Ästen.

b) Zwei Wurzeln imaginär konjugiert, die dritte reell: Ein gewöhnlicher Kurvenzweig mit einem darauf liegenden isolierten Punkt I. Art, Vielfachheit und Singularität also unsichtbar.

c) Zwei Wurzeln reell und gleich, die dritte verschieden: Spitze I. Art oder Oskulation oder Embrassement oder isolierter Punkt II. Art mit je einem weiteren, in anderer Richtung verlaufenden Zweig.

d) Alle drei Wurzeln reell und gleich: Spitze I. Art oder Oskulation oder Embrassement oder isolierter Punkt II. Art, sämtlich mit je einem weiteren in derselben Richtung verlaufenden Zweig, oder endlich Spitzpunkt.

56. Soll eine der Tangenten des $k$fachen Punkts Wendetangente für den zugehörigen Zweig werden, so muſs sie die Kurve im Ursprung in einem weiteren, also insgesamt in $k + 2$ Punkten treffen; es muſs also für den dieser Tangente zugehörigen Wert von $\frac{m}{n}$ aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von u^k auch noch der Koeffizient von u^{k+1} verschwinden oder auf Gleichung (1) der Kurve übertragen:

Satz: Ist eine einfache Wurzel des Aggregats der Glieder niederster Dimension $f_k(x, y) = 0$ zugleich eine Wurzel des nächst höheren Aggregats, so ist die durch diese Wurzel bestimmte Tangente eine Wendetangente für den zugehörigen Zweig des $k$fachen Punkts.

Beispiel: Soll einer der Zweige des Doppelpunkts der Kurve dritter Ordnung

$$(1) \qquad f(x, y) = (ey^2 + fxy + gx^2) + (hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3)$$

eine Wendetangente im Ursprung besitzen, so ergiebt sich dieselbe als gemeinschaftliche Wurzel von

$$(2) \qquad hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0$$

$$(3) \qquad ey^2 + fxy + gx^2 = 0,$$

wenn $\frac{y}{x} = z$ gesetzt wird, gemäſs 16. aus

$$\begin{array}{l|l}
hz^3 + iz^2 + kz + l & \; ez^2 + fz + g \\
\cline{2-2}
hz^3 + \frac{fh}{e} z^2 + \frac{gh}{c} z & \frac{h}{e} z + \frac{1}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right) \\
\cline{1-1}
\multicolumn{2}{l}{\left(i - \frac{fh}{e}\right) z^2 + \left(k - \frac{gh}{e}\right) z + l} \\
\multicolumn{2}{l}{\left(i - \frac{fh}{e}\right) z^2 + \frac{f}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right) z + \frac{g}{e}\left(i - \frac{fh}{e}\right)} \\
\hline
\end{array}$$

$$(4) \qquad \left(k - \frac{gh}{e} - \frac{fi}{e} + \frac{f^2h}{e^2}\right) z + l - \frac{gi}{e} + \frac{ghf}{e^2} = 0,$$

als letzter Divisor, zu

$$(4\text{a}) \qquad \frac{y}{x} = \frac{gei - le^2 - fgh}{e^2k + f^2h - egh - efi}$$

mit der am Schluſs des hier nicht weiter ausgeführten Kettenverfahrens in den Koeffizienten von (2) und (3) sich ergebenden Bedingung, die einfacher durch Substitution des Werts (4a) in (3) erhalten wird und lautet

$$e(gei - le^2 - fgh)^2 + f(gei - le^2 - fgh)(e^2k + f^2h - egh - efi) \\ + g(e^2k + f^2h - egh - efi)^2 = 0.$$

57. Ist eine Wurzel von $f_k(x, y) = 0$ auſser von $f_{k+1}(x, y) = 0$ auch noch Wurzel von $f_{k+2}(x, y) = 0$, so trifft die durch diese Wurzel bestimmte Tangente den $k$fachen Punkt in k + 2 Punkten, sie ist also Flachpunktstangente des zugehörigen Zweigs (serpentement infiniment petit); ist dieselbe Wurzel auch noch Wurzel von $f_{k+3}(x, y) = 0$, so hat der zugehörige Zweig im Ursprung einen Wendeflachpunkt (serpentement infiniment petit compliqué d'inflexion) u. s. w., daher

Satz: Je nachdem die Anzahl der Aggregate niederster Ordnung, die eine einfache Wurzel $\frac{y}{x}$ gemeinschaftlich haben, eine ungerade bezw. eine gerade ist, berührt die durch diesen Wurzelwert bestimmte Tangente den zugehörigen Zweig, abgesehen vom Grad der Krümmung desselben, wie in einem gewöhnlichen bezw. einem Wendepunkt.

58. Sobald das Aggregat der Glieder niederster Ordnung mehrfache Wurzeln besitzt, die zugleich ein- oder mehrfache Wurzeln der nächst höheren Aggregate sind, ist die Beurteilung der Singularität des Ursprungs aus der vorliegenden Kurvengleichung auch mit Zuhilfenahme des analytischen Dreiecks im allgemeinen nicht mehr möglich, falls nicht die Gleichung eine ganz spezielle Form besitzt. Hier greift De Gua wieder zu dem erprobten Mittel der Transformation wie bei den Asymptoten (vgl. 39). Mittels der bekannten Gleichungen

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

wo $\frac{m}{n} = \alpha$ die betreffende mehrfache Wurzel des niedersten Aggregats, also die Richtung der Tangente des zu untersuchenden singulären Kurvenzweigs ist, bezieht er die geg. Kurve auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem, das jene Tangente zur Ordinatenaxe hat, Ursprung und Abscissenaxe dagegen unverändert beibehält, führt aber wieder die Transformation nicht durch, da zur Ermittelung der betreffenden Singularität die Form der transformierten Gleichung, die er, wie folgt, auf Grund der gegebenen Bedingungen ohne Schwierigkeit aufzustellen vermag, vollständig ausreicht: Hat nämlich ein gewisses Aggregat $f_k(x, y) = 0$ eine mehrfache Wurzel $\frac{y}{x} = \alpha$, so mufs das entsprechende Aggregat $\varphi_k(z, u) = 0$ der transformierten Gleichung $\varphi(z, u) = 0$, die dieselbe Kurve wie $f(x, y) = 0$ mit unveränderten geometrischen also auch unveränderten analytischen Eigenschaften darstellt, sich ebenso oft durch $\frac{z}{u} = 0$ bezw. $z = 0$ teilen lassen.

Man erhält alsdann für die Kurven vierter und fünfter Ordnung folgende Singularitäten (vgl. 40. 41. 42), je nachdem $\frac{y}{x} = \alpha$ als Wurzel vorkommt bei

a) $f_2(x, y) = 0$ doppelt, $f_3(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (u^2 z + u z^2 + z^3) + (u^4 + \cdots + z^4) + \cdots$$

Die Kurve verhält sich nach dem analytischen Dreieck im Ursprung wie

$$u^4 + u^2 z + z^2 = 0$$

oder

$$(u^2 + C_1 \cdot z)(u^2 + C_2 \cdot z) = 0.$$

Der Ursprung ist somit ein Selbstberührungspunkt, der als Doppelpunkt zählt und erst bei Kurven von der vierten Ordnung an auftritt. Determination des Selbstberührungspunkts nach den Werten von C (vgl. 52).

b) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = z^2 + (u z^2 + z^3) + (u^4 + \cdots + z^4) + \cdots$$

Annäherung: $u^4 + z^2 = 0$, welche zerfällt

entweder in

$$(u^2 + Cz)(u^2 - Cz) = 0$$

oder in

$$(u^2 + iCz)(u^2 - iCz) = 0.$$

Der Ursprung ist somit entweder eine „Oskulation“ oder ein isolierter Punkt II. Art.

c) $f_2(x, y) = 0$ doppelt, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (u^2z + uz^2 + z^3) + (u^3z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^2z = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 + z = 0$$

und

$$u^2z + z^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 + z = 0.$$

Der Ursprung ist ein Selbstberührungspunkt der Kurve von der Art, wie die I. kubische und die konische Parabel sich im Scheitel berühren. Dieser Doppelpunkt ist erst bei Kurven fünfter Ordnung möglich.

d) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$ doppelt, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^2 + (uz^2 + z^3) + (u^3z + \cdots z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^5 + z^2 = 0$

d. h. die Kurve hat im Ursprung einen Rückkehrflachpunkt, von De Gua wie in 24. wohl auf Grund der Regel in 56. als mit zwei verschwindenden Wendepunkten behaftet, richtig aufgefaſst und als rebroussement du 2^d ordre bezeichnet, nicht zu verwechseln mit rebroussement de la 2e espèce, der Schnabelspitze.

e) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

Der Ursprung ist wie bei d) Rückkehrflachpunkt.

f) $f_2(x, y) = 0$, $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt, aber imaginär konjugiert:

Der Ursprung ist ein isolierter Punkt I. Art und zugleich Flachpunkt für jeden seiner beiden imaginär konjugierten Zweige.

g) $f_3(x, y) = 0$ dreifach,

$$0 = z^3 + (u^4 + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^4 + z^3 = 0.$

Der Ursprung ist somit ein Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit) mit drei zusammenfallenden Tangenten, zählt als dreifacher Punkt und kann erst bei Kurven vierter Ordnung auftreten.

h) $f_3(x, y) = 0$ dreifach, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = z^3 + (u^3z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^3 z = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 + z = 0$$

und

$$u^3 z + z^3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 + z^2 = 0.$$

Die Kurve hat im Ursprung einen Selbstberührungspunkt in der Art wie I. kubische und konische Parabel sich im Scheitel berühren (Fig. 55) (vgl. c).

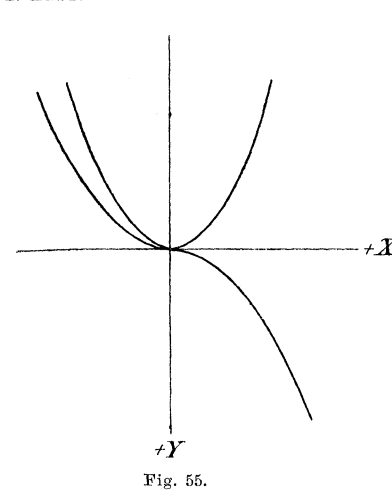


Fig. 55.

i) $f_3(x, y) = 0$ dreifach, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = z^3 + (u^2 z^2 + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5)$$

Annäherung: $u^5 + z^3 = 0$.

Der Ursprung ist ein Wendespitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion), von De Gua wie in der in 23. beschriebenen Weise richtig aufgefaſst.

k) $f_3(x,y) = 0$, $f_4(x,y) = 0$ dreifach,

$$0 = z^3 + (u z^3 + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + z^3 = 0.$$

Der Ursprung ist Wendespitzpunkt (vgl. i).

l) $f_3(x, y) = 0$ doppelt, $f_4(x, y) = 0$ einfach,

$$0 = (u z^2 + z^3) + (u^3 z + \cdots + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u^3 z + u z^2 = 0$$

oder

$$u^4 + u^2 z + z^2 = 0$$

oder

$$(u^2 + C_1 \cdot z)(u^2 + C_2 \cdot z) = 0 \text{ (vgl. a).}$$

m) $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt,

$$0 = (u z^2 + z^3) + (u^2 z^2 + \cdots z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + u z^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^4 + z^2 = 0 \text{ (vgl. b).}$$

n) $f_3(x, y) = 0$, $f_4(x, y) = 0$ doppelt, aber imaginär konjugiert: Die Kurve geht mit einem reellen Zweig durch den Ursprung, letzterer ist zugleich ein isolierter Punkt mit zwei imaginär konjugierten Wendeparabelzweigen.

o) $f_4(x, y) = 0$ dreifach,

$$0 = (u z^3 + z^4) + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + uz^3 = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^4 + z^3 = 0.$$

Der Ursprung ist ein Spitzpunkt mit einem weiteren schneidenden Zweig.

p) $f_4(x, y) = 0$ vierfach,

$$0 = z^4 + (u^5 + \cdots + z^5).$$

Annäherung:

$$u^5 + z^4 = 0.$$

Der Ursprung ist ein Rückkehrspitzpunkt (point de triple pointe), von De Gua wie in 24. richtig aufgefaſst.

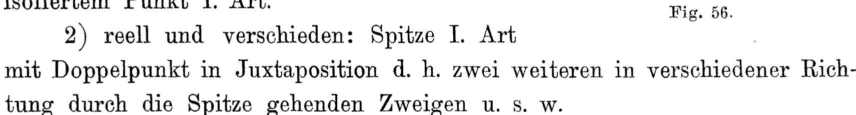
q) $f_4(x, y) = 0$ doppelt; besteht noch eine zweite Doppelwurzel dieses Aggregats, dann können folgende Fälle eintreten:

1) beide Doppelwurzeln imaginär konjugiert: Im Ursprung liegen zwei isolierte Punkt I. Art, er ist also ein vierfacher isolierter Punkt.

2) beide Doppelwurzeln reell: Zwei Rückkehrpunkte oder Spitzen I. Art in Juxtaposition (Fig. 56).

r) $f_4(x, y) = 0$ doppelt, die beiden andern Wurzeln des Aggregats:

1) imaginär konjugiert: Spitze I. Art mit isoliertem Punkt I. Art.



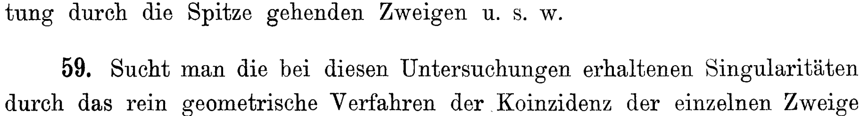


Fig. 56.

2) reell und verschieden: Spitze I. Art mit Doppelpunkt in Juxtaposition d. h. zwei weiteren in verschiedener Richtung durch die Spitze gehenden Zweigen u. s. w.

59. Sucht man die bei diesen Untersuchungen erhaltenen Singularitäten durch das rein geometrische Verfahren der Koinzidenz der einzelnen Zweige des entsprechenden mehrfachen Punkts zur Anschauung zu bringen, so führt dies nur in zwei Fällen zum Ziel:

a) wenn die mehrfachen Wurzeln des niedersten Aggregats nicht zugleich Wurzeln der nächst höheren Aggregate sind,

b) wenn eine einfache Wurzel des niedersten Aggregats auch wieder nur als einfache Wurzel der nächst höheren Aggregats vorkommt, wenn also einfache Zweige mit Wende- bezw. Flachpunkten auftreten.

In allen anderen Fällen ist ohne Zuhilfenahme des analytischen Dreiecks die Art und Weise, wie diejenigen Zweige eines mehrfachen Punkts sich vereinigen, deren Tangenten zur Deckung gebracht werden, nicht zu beurteilen; z. B. ist 58, h aufzufassen als Sonderfall der Kurve (Fig. 57)

$$\varphi(z, u) = (z - au)(z - bu)(z - cu) + (z - au)\chi_3(z, u) + \chi_5(z, u) = 0,$$

deren Äste, von welchen der eine gemäſs 56. eine Wendetangente besitzt,



durch ihre Vereinigung (Fig. 58) im Falle $a = b = c = 0$ eher die Berührung einer Spitze II. Art denn einer solchen I. Art mit einer konischen Parabel zu erzeugen scheinen; ferner 58, i als Sonderfall der Kurve (Fig. 59)

$$\varphi(z, u) = (z - au)(z - bu)(z - cu) \\ + (z - au)(z - bu)\chi_2(z, u) + \chi_5(z, u) = 0$$

mit einer einfachen und zwei Wendetangenten im Ursprung, durch deren Deckung eher die Entstehung eines Rückkehr bezw. Flachpunkts denn eines

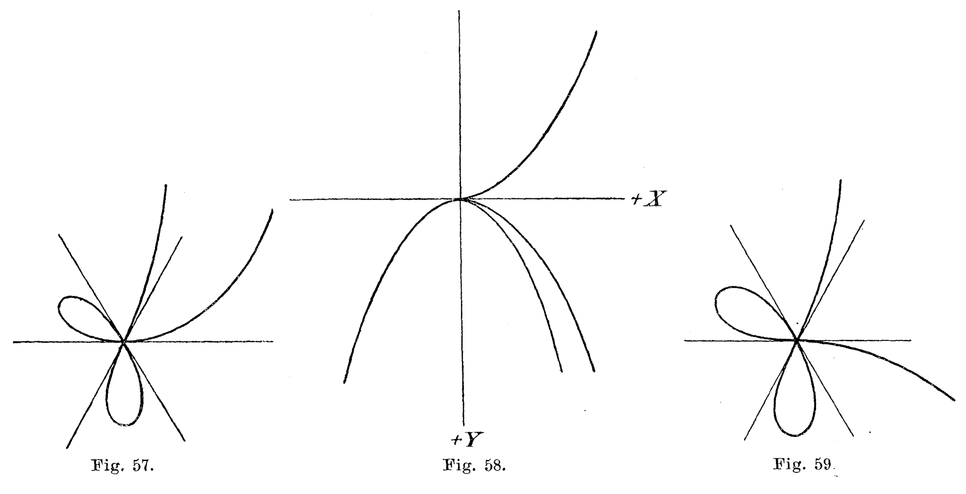


Fig. 57. Fig. 58. Fig. 59.

Wendespitzpunkts vermutet wird. Hier trifft den Entscheid einzig das analytische Dreieck bezw. die Newton'sche Regel, deren hohe Bedeutung für die Geometrie an dieser Stelle besonders einleuchtet.

Mehrfache und singuläre Punkte der Kurven bis zur V. Ordnung.

60. Im Anschluſs an 55. giebt De Gua erstmals eine auf die Kenntnis sämtlicher analytischer Kriterien gegründete Übersicht aller, zum gröſsten Teil bis dahin unbekannten, mehrfachen und singulären Punkte der Kurven bis zur fünften Ordnung einschlieſslich. Sie ist im Folgenden um die von De Gua nicht aufgenommene Schnabelspitze vermehrt und lautet:

Kurven II. Ordnung.

1 einfacher Punkt: Gewöhnlicher Ovalpunkt (point ordinaire).

Kurven III. Ordnung.

2 einfache Punkte: 1. Gewöhnlicher Ovalpunkt.
2. Wendepunkt (inflexion).

3 Doppelpunkte: 1. Gewöhnlicher Doppelpunkt (noeud, point de croix).
2. Spitze I. Art (point de rebroussement de la 1e espèce).
3. Isolierter Punkt I. Art (point conjugué de la 1e espèce).

Der einzige mehrfache Punkt mit reellen zusammenfallenden Tangenten d. h. die einzige Singularität ist die Spitze I. Art oder der Rückkehrpunkt.

Kurven IV. Ordnung.

3 einfache Punkte: 1. Gewöhnlicher Punkt.
2. Wendepunkt.
3. Flachpunkt (point de serpentement).

10 Doppelpunkte:

Die drei Doppelpunkte der Kurven dritter Ordnung.
4. Doppelpunkt mit einer Wendetangente (noeud compliqué d'inflexion).
5. Doppelpunkt mit zwei Wendetangenten.
6. Isolierter Punkt I. Art mit zwei imag. konj. Wendetangenten.
7. Parabolische Selbstberührung von aufsen (Oskulation).
8. Desgleichen von innen (Embrassement).
9. Isolierter Punkt II. Art mit zwei konj. parabolischen Zweigen.
10. Spitze II. Art oder Schnabelspitze (point de rebroussement de la 2e espèce).

4 dreifache Punkte:

1. Gewöhnlicher dreifacher Punkt (point triple ordinaire).
2. Spitze I. Art mit einem hindurchgehenden Zweig in anderer Richtung.
3. Isolierter Punkt I. Art auf einem gewöhnlichen Kurvenzweig.
4. Spitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit).

7 Singularitäten:

5 Doppelpunkte: Spitze I. und II. Art, Oskulation, Embrassement und isolierter Punkt II. Art.
1 Dreifacher Punkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten: 2.
1 Dreifacher Punkt mit drei zusammenfallenden Tangenten: 4.

Kurven V. Ordnung.

5 einfache Punkte:

Aufser denjenigen der Kurven IV. Ordnung noch
5. Wendeflachpunkt (point de serpentement compliqué d'inflexion).

16 Doppelpunkte:

Aufser denen der Kurven IV. Ordnung noch
11. Doppelpunkt mit einer Flachpunktstangente (noeud compliqué de serpentement).
12. Doppelpunkt mit zwei Flachpunktstangenten.
13. Isolierter Punkt I. Art mit zwei imag. konj. Flachpunktstangenten.
14. Doppelpunkt mit einer Flachpunkts- und einer Wendetangente.
15. Rückkehrflachpunkt (rebroussement du 2d ordre).
16. Berührung einer konischen und einer I. kubischen Parabel.

21 dreifache Punkte:

Aufser denen der Kurven IV. Ordnung

5. Dreifacher Punkt mit einer Wendetangente.
6. Dreifacher Punkt mit zwei Wendetangenten.
7. Dreifacher Punkt mit drei Wendetangenten.
8. Spitze I. Art mit Wendezweig in anderer Richtung.
9. Isolierter Punkt I. Art mit reeller Wendetangente und zwei konj. gewöhnlichen Tangenten.
10. Isol. Punkt I. Art mit zwei konj. Wendetangenten und einer reellen gewöhnlichen Tangente.
11. Isolierter Punkt I. Art mit zwei konjugierten und einer reellen Wendetangente.
12. Parabolische Selbstberührung von aufsen (Oskulation) mit weiterem einfachen Zweig in anderer Richtung, desgleichen bei
13. Parabolischer Selbstberührung von innen (Embrassement).
14. Oskulation mit einem Wendezweig in anderer Richtung.
15. Embrassement mit einem Wendezweig in anderer Richtung.
16. Isolierter Punkt II. Art auf einem gewöhnlichen Zweig.
17. Isolierter Punkt II. Art mit Wendezweig.
18. Berührung von Spitze I. Art mit konischer Parabel.
19. Spitze II. Art mit weiterem einfachen Zweig in anderer Richtung.
20. Spitze II. Art mit Wendezweig in anderer Richtung.
21. Wendespitzpunkt (Lemnisceros infiniment petit compliqué d'inflexion).

8 vierfache Punkte:

1. Gewöhnlicher vierfacher Punkt (point quadruple).
2. Spitzpunkt mit weiterem Zweig in anderer Richtung, ein scheinbarer gewöhnlicher Doppelpunkt.
3. Doppelpunkt mit Spitze I. Art in Juxtaposition.
4. Doppelpunkt mit isoliertem Punkt I. Art.
5. Spitze I. Art mit isoliertem Punkt I. Art.
6. Zwei Spitzen I. Art in Juxtaposition.
7. Zwei isolierte Punkte I. Art mit verschiedenen Richtungen, ein sog. vierfacher isolierter Punkt I. Art:

$$(x^2 + a^2y^2)(x^2 + b^2y^2) = 0.$$

8. Zwei isolierte Punkte I. Art mit zusammenfallenden Richtungen, ein sog. vierfacher Punkt II. Art:

$$(x^2 + a^2y^2)^2 = 0.$$

9) Rückkehrspitzpunkt (point de triple pointe).

28 Singularitäten:

7 Doppelpunkte:

Aufser denen der Kurven IV. Ordnung noch 15. und 16.

10 dreifache Punkte mit zwei zusammenfallenden Tangenten:

Spitze I. Art mit gewöhnlichem Zweig, ferner 8. 12—17. 19. u. 20.

3 dreifache Punkte mit drei zusammenfallenden Tangenten:

Spitzpunkt, ferner 18. und 21.

Vierfache Punkte:

5 mit zwei zusammenfallenden Tangenten: 3. 4. 5. 6. 7.

1 mit drei . . . . : 2.

2 mit vier . . . . : 8. und 9.

Die Anzahl der hier aufgezählten Arten von Punkten weicht, abgesehen von der Schnabelspitze und ihren Kombinationen, von derjenigen, die De Gua angiebt, nur insofern ab, als dieser mehrere aus einer Gleichung sich ergebende Punkte, wie z. B. die äufsere und innere parabolische Selbstberührung u. a. zu einer Spezies zusammenfafst.

Bedingungen für die Existenz ausgezeichneter Punkte der allgemeinen Kurven $n$ter Ordnung im Ursprung und im Unendlichen.

61. Auf Grund der seitherigen Untersuchungen sind nunmehr nach De Gua sämtliche Mittel gegeben, die umgekehrte Aufgabe zu lösen, die Frage nach den Bedingungen zwischen den Koeffizienten einer geg. Gleichung, damit die durch diese Gleichung dargestellte Kurve im Ursprung oder im Unendlichen ein vorgeschriebenes Verhalten aufweist.

a) Im Ursprung: Soll z. B. die vorliegende Kurve

$$f(x, y) = a + f_1(x, y) + f_2(x, y) + \cdots \qquad + f_n(x, y) = 0$$

einen Spitzpunkt daselbst besitzen, so müssen gemäfs 58, g aufser dem konstanten Glied sämtliche Koeffizienten der beiden niedersten Aggregate einzeln verschwinden, zu diesen 6 Bedingungen

$$a = 0, \qquad f_1(x, y) \equiv 0, \qquad f_2(x, y) \equiv 0$$

treten noch, damit $f_3(x, y) = 0$ eine dreifache Wurzel besitzt, die beiden Diskriminanten aus

$$f_3(x, y) = 0, \qquad f_3'(x, y) = 0, \qquad f_3''(x, y) = 0$$

also insgesamt acht Bedingungen.

b) Im Unendlichen: Soll sich daselbst die Kurve z. B. verhalten wie die Parabel des Descartes (vgl. 42, m), so sind die beiden Diskriminanten aus

$$f_n(x, y) = 0, \qquad f_n'(x, y) = 0, \qquad f_n''(x, y) = 0$$

nebst der Resultante von

$$f_{n-1}(x, y) = 0, \qquad f_{n-2}(x, y) = 0$$

und der Bedingung, die man erhält, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel der beiden letzten Gleichungen, die sich bekanntlich aus dem letzten Divisor des De Gua'schen Kettenbruchverfahrens ergiebt, in

$$f_n(x, y) = 0$$

einsetzt, die für die Existenz des vorgeschriebenen Verlaufs der Kurve im Unendlichen notwendigen und hinreichenden vier Bedingungen u. s. w. (vgl. auch 48.).

Analogie zwischen den Kurvenzweigen im Ursprung und im Unendlichen.

62. Die Erkenntnis, dafs die höchsten Terme bezw. Aggregate der nach fallenden Potenzen der Veränderlichen geordneten Kurvengleichung die unendlich fernen Punkte, die niedersten die Punkte im Ursprung charakterisieren, veranlafst De Gua, die Beziehungen zwischen beiden Arten von Punkten näher zu untersuchen.

Das Verhalten einer Kurve im Ursprung kann mit dem Verhalten einer anderen in einem durch seine Richtung gegebenen unendlich fernen Punkt nur unter genau denselben analytischen Voraussetzungen verglichen werden. Den eindeutig durch das Aggregat niederster Ordnung bestimmten Ursprungstangenten müssen daher festliegende Asymptoten entsprechen und da letztere am einfachsten durch den höchsten Term der nach fallenden Potenzen der Ordinate geordneten Kurvengleichung angegeben werden, wenn die Gleichung der Kurve auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, in welchem die Ordinatenaxe in die jeweilige Richtung der Asymptoten drehbar ist, so mufs, wenn einem $k$fachen Punkt der Kurve (I) k Asymptoten einer Kurve (II) derselben Ordnung entsprechen sollen, das niederste Aggregat in (I) mit dem höchsten Term in (II) vom selben Grad k sein, die Gleichungen der beiden Kurven haben somit die Form:

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + \cdots + f_{k+1}(x,y) + (b_k y^k + b_{k-1} y^{k-1} x + \cdots + b_1 y x^{k-1} + b_0 x^k) = 0$$

$$\text{(II)} \qquad \varphi(z, u) = (a_0 z^k + a_1 z^{k-1} + \cdots + a_{k-2} z + a_k) u^{n-k} + \varphi_{k+1}(z) u^{n-k-1} + \cdots\cdots + \varphi_{n-1}(z) \cdot u + \varphi_n(z) = 0.$$

Da sich in beiden Systemen die Ordinatenaxen $x = 0$ bezw. $z = 0$ entsprechen, so tritt für $b_k = 0$ im einen System der Wert $a_k = 0$ im andern, es entsprechen sich somit die Koeffizienten der höchsten Potenzen $\frac{y}{x}$ des

niedersten Aggregats in (I) und diejenigen der niedersten Potenzen des höchsten Terms in (II), insbesondere wird

für $b_0 = 0$ entsprechend $a_0 = 0$

oder

für $y = 0$ · · · · · $z = \infty$

m. a. W.: Der Ordinaten- bezw. Abscissenaxe als Ursprungstangente in (I) entspricht in (II) eine Asymptote durch den Ursprung bezw. im Unendlichen mit hyperbolischen bezw. parabolischen Ästen. Analog zeigt sich:

a) Haben, den Bedingungen eines Wendepunkts der Kurve (I) im Ursprung entsprechend, die höchsten Terme $\varphi_k(z) = 0$ und $\varphi_{k+1}(z) = 0$ in (II) eine gemeinschaftliche Wurzel $z = 0$, lautet also (II):

$$\text{(II)} \qquad 0 = (z^k + z^{k-1} + \cdots + z)\, u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + z)\, u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + z + 1)\, u^{n-k-2} + \cdots$$

so verhält sich die Kurve (II) in der Richtung der U-Axe wie

$$\text{(III)} \qquad u^{n-k} \cdot z + u^{n-k-2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 z + 1 = 0$$

d. h. wie die auf ein und derselben Seite der U-Axe nach entgegengesetzten Richtungen verlaufenden Zweige der kubischen Hyperbel und da dieser Verlauf der Äste aus demjenigen, durch welchen der gewöhnliche unendlich ferne Punkt der konischen Hyperbel charakterisiert wird, nur so zu erklären ist, dafs ein Zweig der letzteren die Asymptote überschritten hat, so ist der dem Wendepunkt des Ursprungs (I) entsprechende unendlich ferne Punkt in (II) ebenfalls als Wendepunkt zu bezeichnen. Ist insbesondere die Abscissenaxe in (I) Wendetangente, fehlen also die konstanten Glieder in $f_k\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ und $f_{k+1}\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, so sind entsprechend die höchsten Potenzen in $\varphi_k(z) = 0$ und $\varphi_{k+1}(z) = 0$ gleich Null zu setzen, (II) lautet daher

$$\text{(IIa)} \qquad 0 = (z^{k-1} + \cdots + 1)\, u^{n-k} + (z^k + \cdots + 1)\, u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + 1)\, u^{n-k-2} + \cdots$$

und verhält sich in der Richtung der U-Axe wie

$$\text{(IIIa)} \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-1} + u^{n-k-2} \cdot z^{k+2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^2 + z^3 = 0$$

d. h. wie die unendlich fernen Äste der II. kubischen Parabel. Diesen Verlauf der Aste erhält man, wenn die Asymptote des hyperbolischen Wendepunkts schliefslich ins Unendliche rückt, der unendlich ferne Punkt von (II) ist somit als parabolischer Wendepunkt zu bezeichnen.

b) Ist der Ursprung von (II) ein Flachpunkt, so mufs $z = 0$ auch noch Wurzel von $\varphi_{k+2}(z) = 0$ werden, daher

$$\text{(II)} \quad 0 = (z^k + \cdots + z)\, u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdots + z)\, u^{n-k-1} + (z^{k+2} + \cdots + z)\, u^{n-k-2} + (z^{k+3} + \cdots + 1)\, u^{n-k-3} + \cdots$$

$$\text{(III)} \qquad u^{n-k} \cdot z + u^{n-3} = 0 \qquad \text{oder} \qquad u^3 z + 1 = 0.$$



Die Äste verlaufen somit in der Richtung der U-Axe wieder wie beim gewöhnlichen hyperbolischen Punkt, nur mit stärkerer Annäherung, ganz entsprechend wie der Flachpunkt, abgesehen vom Grad der Krümmung, sich vom gewöhnlichen endlichen Punkt nicht uuterscheidet.

Ist wieder in (I) die Abscissenaxe Flachpunktstangente, so lautet (II) entsprechend

$$\text{(IIa)} \qquad 0 = (z^{k-1} + \cdots + 1)\, u^{n-k} + (z^k + \cdot\cdot + 1)\, u^{n-k-1} + (z^{k+1} + \cdot\cdot + 1)\, u^{n-k-2} + (z^{k+3} + \cdots + 1)\, u^{n-k-3} + \cdots$$

$$\text{(IIIa)} \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-1} + u^{n-k-3} \cdot z^{k+3} = 0 \quad \text{oder} \quad u^3 + z^4 = 0$$

d. h. die Kurve verläuft in der Richtung der U-Axe wie die Spitzpunktsparabel, also, vom Grad der Krümmung abgesehen, in derselben Art wie die Zweige der konischen Parabel.

Der unendlich ferne Punkt ist somit in beiden Fällen als Flachpunkt zu bezeichnen.

c) Den Bedingungen einer Spitze I. Art im Ursprung der Kurve (I) entsprechend hat der höchste Term in (II) die Doppelwurzel $z = 0$, daher

$$\text{(II)} \qquad 0 = (z^k + \cdot\cdot + z^2)\, u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdot\cdot + 1)\, u^{n-k-1} + \cdots$$

Annäherung:

$$\text{(III)} \qquad u^{n-k} \cdot z^2 + u^{n-k-1} = 0 \quad \text{oder} \quad u z^2 + 1 = 0.$$

Die Äste erstrecken sich somit zu beiden Seiten der U-Axe in derselben Richtung, also einer unendlich fernen Spitze I. Art zu.

Wenn die Abscissenaxe Rückkehrtangente in (I) ist, so lautet (II)

$$\text{(IIa)} \quad 0 = (z^{k-2} + z^{k-3} + \cdot\cdot + 1)\, u^{n-k} + (z^{k+1} + \cdot\cdot + 1)\, u^{n-k-1} + \cdots$$

Annäherung:

$$\text{(IIIa)} \qquad u^{n-k} \cdot z^{k-2} + u^{n-k-1} \cdot z^{k+1} = 0 \quad \text{oder} \quad u + z^3 = 0.$$

Die Äste verlaufen somit in der Richtung der U-Axe nach Art der I. kubischen Parabel, der unendlich ferne Punkt ist sonach eine parabolische Spitze I. Art, da, verglichen mit dem parabolischen Wendepunkt a), der zweite Ast aus der entgegengesetzten Richtung wie dort sich der unendlich fernen Asymptote nähert, u. s. w.

Setzt man diese Betrachtungen fort, so bestätigt sich durchweg der

Satz: Dieselben Kriterien, welche die verschiedenen einfachen, mehrfachen und singulären Punkte im Ursprung, überhaupt im Endlichen, charakterisieren, charakterisieren auch die unendlich fernen hyperbolischen und parabolischen Punkte als ebensolche einfache, mehrfache und singuläre Punkte, nur beziehen sich jene Kriterien im ersten Fall auf die niedersten Aggregate, im letzten Fall auf die höchsten Terme der Kurvengleichung.

Für die Beurteilung gleichartiger endlicher und unendlich ferner Punkte besteht somit merkwürdigerweise eine Wechselbeziehung zwischen Aggregaten und Termen, d. h. zwischen ungleichartigen Ausdrücken bezüglich der Ordnung der Kurvengleichung nach ihren Variabeln.

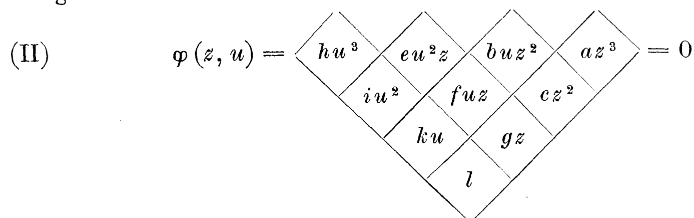
63. Um somit die Singularität einer Kurve im Ursprung ins Unendliche zu verlegen, ist algebraisch die Aufgabe zu lösen, die Gleichung der Kurve so umzuformen, daſs die höchsten Aggregate zu niedersten Termen werden und umgekehrt. Dies erreicht De Gua durch die Transformation

$$x = \frac{1}{z} \qquad y = \frac{u}{z},$$

womit z. B. die Gleichung dritten Grads

$$\text{(I)} \qquad f(x, y) = \begin{array}{ccccccc} hy^3 & & ixy^2 & & kx^2y & & lx^3 \\ & ey^2 & & fxy & & gx^2 & \\ & & by & & cx & & \\ & & & a & & & \end{array} = 0$$

übergeht in

(II) $\varphi(z, u) =$  $= 0$

welche Gleichung auf das analytische Dreieck gelegt zeigt, daſs letzteres in Bezug auf (I) eine Drehung erlitten hat, indem die Ecken a und l sich vertauscht haben (vgl. 12.), und daſs dadurch die horizontalen Reihen in (I), welche die Aggregate darstellen, zu linksseitigen Parallelreihen geworden sind, welche die Terme angeben, genauer: Gleichung (II) hat nach Aggregaten (z, u) geordnet die niedersten Terme (y) zu höchsten Aggregaten, nach z geordnet die höchsten Aggregate (x, y) zu niedersten Termen (u) und nach u geordnet die Terme der nach y geordneten Gleichung (I) in derselben Folge zu Termen, nnr daſs die höheren Glieder dieser Terme (I) die niederen Glieder der entsprechenden Terme (II) bilden, so daſs hyperbolische Zweige von (I), die in der Richtung der Ordinatenaxe verlaufen, in parabolische Zweige von (II) mit derselben Richtung übergehen und umgekehrt.

64. Aber auch geometrisch findet De Gua eine Erklärung für die oben ausgesprochene Übereinstimmung endlicher und unendlich ferner Punkte, auf Grund der von Newton erstmals aufgefundenen Methode der Erzeugung der Kurven durch Abbildung (Genesis curvarum per umbras, vgl. 12.) und es gelingt ihm, die algebraische Transformation durch perspektive Betrachtungen, wie folgt, zu interpretieren (Fig. 60):

Legt man durch einen bel. Punkt S, das sog. Projektionszentrum, die Parallelebenen zur Ebene Σ der geg. Kurve und zur Projektionsebene Φ, auf welche die geg. Kurve durch Strahlen von S aus abgebildet werden soll, so schneiden diese Ebenen die geg. Ebenen Φ und Σ nach zwei zur Schnittgeraden letzterer parallelen Geraden g und f, von welchen erstere das Bild der unendlich fernen Geraden in Σ, letztere dasjenige der unendlich fernen Geraden von Φ darstellt. Wählt man daher den Ursprung der geg. Kurve auf f, etwa als den Fufspunkt des von S auf f gefällten Lotes $SO = p$, nimmt man ferner die Gerade f zur Ordinatenaxe, die Projektion von p auf Σ zur Abscissenaxe und entsprechend in der Bildebene Φ die Gerade g zur U- und die Projektion der X-Axe zur Z-Axe, so bildet sich der Ursprung O der geg. Kurve als unendlich ferner Punkt der Kurve Φ und jeder ihrer unendlich fernen Punkte als Punkt der Ordinatenaxe U ab und es ist, wenn der projizierende Strahl SP des Kurvenpunkts P die Bildebene in P' trifft, die Ordinate $PB = y$ parallel der Ordinate $P'B' = u$ des Bildpunkts P'. Daher, wenn $SM = q$ die Entfernung des Projektionsmittelpunkts von der U-Axe bezw. vom Ursprung M der Projektionskurve bezeichnet,

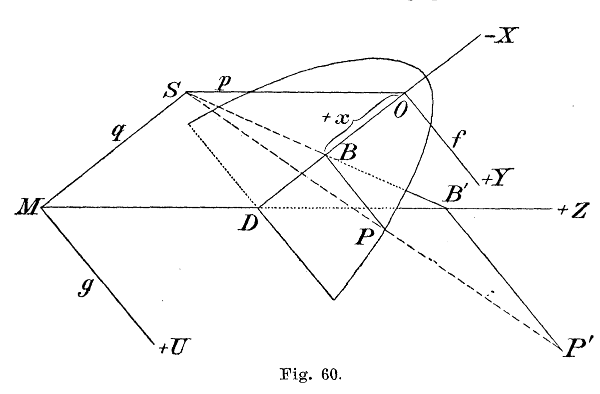


Fig. 60.

aus $\triangle SBO \sim \triangle DBB'$: $\quad \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{SO}{DB'}$,

woraus

$$\frac{BO}{BO + BD} = \frac{SO}{SO + DB'} \quad \text{oder} \quad \frac{BO}{DO} = \frac{SO}{MB'}$$

d. h.

$$(1) \qquad \frac{x}{q} = \frac{p}{z} \qquad \text{oder} \qquad x = pq \cdot \frac{1}{z}$$

aus $\triangle SBP \sim \triangle SB'P'$: $\quad \dfrac{BP}{B'P'} = \dfrac{SB}{SB'} = \dfrac{OB}{OD} = \dfrac{SO}{MB'}$

oder

$$\frac{y}{u} = \frac{p}{z} \qquad \text{oder} \qquad y = p \cdot \frac{u}{z} \tag{2}$$

Hiermit beweist De Gua erstmals, wenn auch zunächst noch in einem Sonderfall, dafs lineare Transformation und projektive Abbildung identisch sind d. h. dafs die Überführung der Gleichung einer Kurve durch lineare Transformation in eine andere Form gleichbedeutend ist mit der Abbildung der Kurve durch Zentralperspektive in eine andere Ebene des Raums. Da diese Art der Abbildung eindeutig ist d. h. da jedem Punkt der ursprünglichen Kurve auch nur ein einziger Punkt des Bildes zugeordnet ist und somit die Zahl der Schnittpunkte einer Kurve und einer Geraden auch in der Abbildung erhalten bleibt, so ändern sich die projektiven Eigenschaften der Kurven d. h. diejenigen, die durch Projektion nicht verloren gehen, also insbesondere die Eigenschaften der mehrfachen und singulären Punkte sowie die Ordnung der Kurve auch durch lineare Transformation nicht; nicht zu den projektiven Eigenschaften dagegen gehört die Mittelpunktseigenschaft (vgl. 30.), die somit auch durch lineare Transformation (wo im allgemeinen nur Doppelverhältnisse, nicht aber einfache übertragen werden) verloren geht ebenso wie die ursprüngliche Lage des Koordinatensystems. Zugleich folgt, dafs zwei durch lineare Transformation auf einander bezogene Kurven stets im Raum in zentralperspektive Lage gebracht werden können.

65. Auf Grund dieser Ergebnisse ersetzt De Gua behufs Untersuchung des Verlaufs der Zweige unendlich ferner mehrfacher und singulärer Punkte die ursprünglich angewandte lineare Transformation (vgl. 63. bezw. 62.) durch das bequemere Hilfsmittel der projektiven Abbildung. Den Schritt zur Einführung homogener Koordinaten, die für diese Untersuchungen ein noch einfacheres Hilfsmittel abgegeben hätten, macht De Gua nicht, obwohl einerseits die Betrachtung des analytischen Dreiecks wegen der Vertauschung zweier Dreiecksseiten (vgl. 63, I und II) zur Einführung der dritten Seite des Dreiecks als neuer Koordinatenaxe, also auch zur Einführung einer dritten Variabeln, Veranlassung bieten, andererseits das bei linearer Transformation stattfindende Auftreten gleicher Nenner, durch deren Fortschaffung sogar zuvor konstante Glieder mit Variabeln behaftet werden, den Gedanken der Einführung eines Proportionalitätsfaktors d. h. einer dritten Variabeln nahe legen konnte (vgl. 12.).

66. Beachtet man, dafs jeder Punkt eines Quadranten der Ebene Σ sich eindeutig in den entsprechenden Quadranten der Projektionsebene Φ abbildet und dafs gemäfs dem Hauptgesetz der Zentralperspektive entsprechende Geraden beider Ebenen sich in der Schnittgeraden letzterer treffen,

dafs ferner jeder Zweig der Kurve Σ, wenn er die Ordinatenaxe f schneidet, sich abbildet mit der Projektion der in jenem Schnittpunkt an den Zweig Σ gezogenen Tangente als Asymptote, welch letztere, falls der Zweig Σ die Ordinatenaxe selbst berührt, ins Unendliche rückt und den Verlauf der Bildkurve parabolisch gestaltet, so ergeben sich durch Projektion der auf f angenommenen mehrfachen und singulären Punkte die in 62. analytisch definierten Gestalten der Zweige der entsprechend gleichbenannten unendlich fernen hyperbolischen und parabolischen Punkte, abgesehen vom Grad der Krümmung, wie folgt, wenn

a) Die Ordinatenaxe f nicht Tangente in Σ:

1. Hyperbolische gewöhnliche Punkte: Ovalpunkt, Flach-, Spitzpunkt (vgl. 22.) mit Ästen nach Art der konischen Hyperbel.
2. Hyperbolische Wendepunkte: Wende-, Wendeflach-, Wendespitzpunkt (vgl. 23.) mit Ästen nach Art der kubischen Hyperbel auf derselben Seite der Asymptote (Abscissenaxe) nach entgegengesetzten Richtungen.
3. Hyperbolische Rückkehrpunkte: Spitze I. Art, Rückkehrflach-, Rückkehrspitzpunkt (vgl. 24.) mit Ästen nach Art der kubischen Hyperbel auf verschiedenen Seiten der Asymptote (Ordinatenaxe) nach derselben Richtung.
4. Hyperbolische mehrfache Punkte: Ein System von ebensoviel parallelen getrennten bezw. zusammenfallenden Asymptoten als die Vielfachheit angiebt mit ebensoviel hyperbolischen gewöhnlichen Punkten, Wende- und Rückkehrpunkten als der entsprechende endliche mehrfache Punkt derartige Zweige besitzt, z. B. besteht die hyperbolische Oskulation (vgl. 52.) aus vier beiderseitig den Enden einer Asymptote zustrebenden Ästen (Fig. 61) und kann daher ebensowohl durch Vereinigung zweier hyperbolischer Spitzen I. Art als zweier hyperbolischer Wendepunkte entstanden gedacht werden, das hyperbolische Embrassement ist dargestellt durch zwei Paare hyperbolischer Zweige, die auf entgegengesetzten Seiten einer Asymptote entgegengesetzten Richtungen zustreben (Fig. 62), während ein solches Paar allein die hyperbolische Schnabelspitze darstellen würde (Fig. 63).

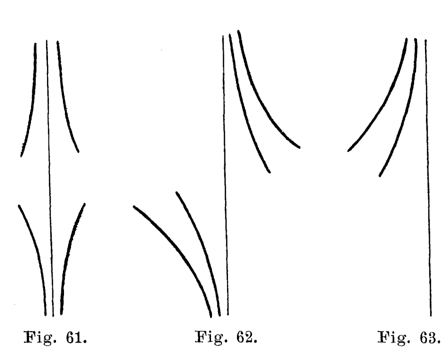


Fig. 61. Fig. 62. Fig. 63.

5. Hyperbolische isolierte Punkte: Ein System paralleler Asymptoten in imaginärer Entfernung vom Ursprung u. s. f.

b) Die Ordinatenaxe f ist Tangente in Σ:

1. Parabolische gewöhnliche Punkte: Äste wie bei der konischen Parabel.
2. Parabolische Wendepunkte: Äste wie bei der II. kubischen Parabel.
3. Parabolische Rückkehrpunkte: Äste wie bei der I. kubischen Parabel.
4. Parabolische Oskulation bezw. Embrassement: Vier Äste nach Art zweier sich die konvexe Scheitelseite zukehrender bezw. zweier parallel gestellter konischer Parabeln (Fig. 64, 65) u. s. f.

c) Liegt umgekehrt auf der Ordinatenaxe f ein hyperbolischer bezw.

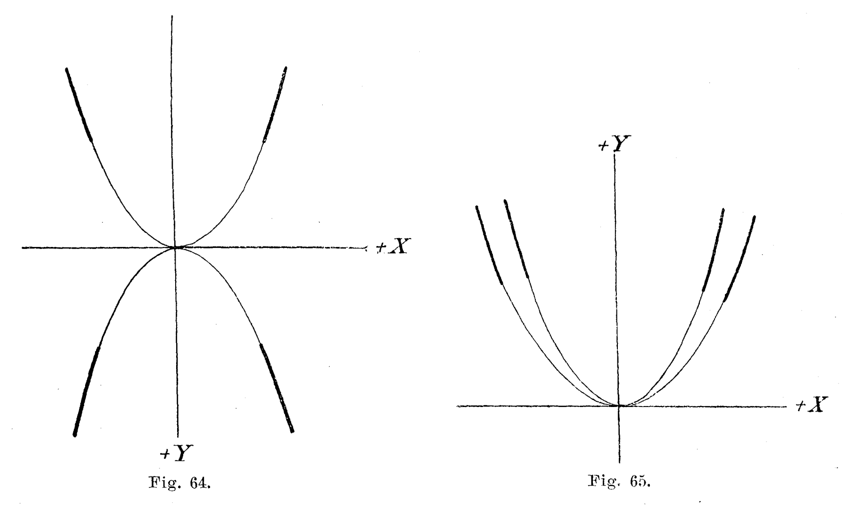


Fig. 64. Fig. 65.

parabolischer Punkt, so projiziert sich dieser auf die Bildebene als der entsprechende parabolische bezw. hyperbolische Punkt u. s. w.

67. De Gua hat somit erstmals gemäfs den Ausführungen 62. bis 66. die streng analytisch und synthetisch begründete heutige Auffassung der Identität der unendlich fernen und der endlichen Punkte d. h. dafs die unendlich fernen Äste einer algebraischen Kurve stets paarweise auftreten und sich in den unendlich fernen Punkten genau in derselben Weise vereinigen wie die in einem endlichen Punkt zusammentreffenden Teile eines Zweigs. Diese ganz hervorragende Leistung, durch welche De Gua die bis dahin bestandene Ausnahmestellung der unendlich fernen Punkte beseitigt, bereichert er noch um zwei auf die gestaltlichen Eigenschaften der Kurven dritter Ordnung bezügliche interessante Anwendungen der projektiven Abbildung, welches Verfahren sich ihm als ein ausgezeichnetes Mittel darbietet, Eigenschaften einer Kurve aus dem Unendlichen ins Endliche und umgekehrt zu übertragen: De Gua giebt den ersten rein synthetischen Beweis der Newton'schen Genesis curvarum tertii ordinis per umbras und entdeckt den klassischen Satz über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung.

Abbildung der Kurven dritter Ordnung nach De Gua.

68. Untersucht man die von Newton aufgestellten Figuren der Kurven dritter Ordnung auf ihre Wendepunkte, so zeigt sich, dafs mit Ausnahme zweier der fünf divergenten kubischen Parabeln, nämlich der Spitze I. Art und des Folium des Descartes, sämtliche Arten dieser Kurven, falls sie nicht einen Wendepunkt im Endlichen besitzen, als Ersatz hierfür einen hyperbolischen Punkt aufweisen, dessen Äste auf derselben Seite der Asymptote nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen, d. h. einen hyperbolischen Wendepunkt, von Newton noch als „branches hyperboliques à diamètres" bezeichnet (vgl. 29), da die Parallelsehnen zur Asymptote die Kurven nur noch in zwei Punkten schneiden, der zugehörige Durchmesser sich somit wie bei den Kegelschnitten bestimmt. Nimmt man also, da die fünf divergenten Parabeln die einzigen Kurven dritter Ordnung sind, die parabolische Wendepunkte besitzen, die Ordinatenaxe f (Fig. 60) zur Wendeasymptote bezw. Wendetangente der abzubildenden Kurven, so entsteht durch Projektion stets eine der fünf divergenten Parabeln, umgekehrt erzeugen letztere durch ihre Projektion sämtliche Kurven dritter Ordnung.

Satz von De Gua über die Wendepunkte der Kurven dritter Ordnung.

69. Auf Grund des Newton'schen Satzes: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendasymptoten, so mufs sie noch eine dritte haben (vgl. 29), ergiebt sich durch zentralprojektive Abbildung der diese drei unendlich fernen hyperbolischen Wendepunkte verbindenden unendlich fernen Geraden ins Endliche (Fig. 60) der

Satz von De Gua: Hat eine Kurve dritter Ordnung zwei Wendepunkte im Endlichen, so besitzt sie stets noch einen dritten, der mit den beiden ersten auf einer Geraden liegt.

70. Aufser diesem synthetischen Beweis findet sich Usages, pag. 314, ein analytischer

Erster Beweis von De Gua (1740):

Wählt man den einen der drei Wendepunkte zum Ursprung und die ihn mit dem zweiten Wendepunkt $(0, a)$ verbindende Gerade zur Ordinatenaxe Y, so trifft diese die Kurve dritter Ordnung noch in einem dritten Punkt $(0, b)$ und die Gleichung der Kurve lautet demnach für $x = 0$

$$y(y-a)(y-b) \equiv y^3 - (a+b)y^2 + aby = 0\,.$$

Ist somit c^2 der Koeffizient des linearen Gliedes in x, also $aby - c^2x$ das niederste Aggregat der nach beiden Variabeln geordneten Kurvengleichung, so mufs, da der Ursprung Wendepunkt sein soll, die aus diesem Aggregat sich



ergebende Wurzel $y = \frac{c^2}{ab} x$ Faktor des nächst höheren Aggregats der Kurvengleichung sein (vgl. 56); letzteres lautet daher, wenn wegen des Koeffizienten $(a+b)$ von y^2 der andere lineare Faktor zu $(a+b)y - rx$ genommen wird

$$-((a+b)\,y - rx)\left(y - \frac{c^2}{ab}x\right) \equiv -(a+b)y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2$$

und da die Koeffizienten des höchsten Aggregats bis auf denjenigen von y^3, der zu 1 angenommen wurde, beliebig gewählt werden können, so hat die Gleichung der Kurve dritter Ordnung mit einem Wendepunkt im Ursprung die Form

$$(1)\quad f(x,y) = y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 - (a+b)y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2 + aby - c^2x = 0\,.$$

Soll der Schnittpunkt $(0, a)$ der Kurve mit der Y-Axe ebenfalls Wendepunkt sein, so ist die Bedingung hierfür, daſs die beiden niedersten Aggregate der in diesen Punkt als Ursprung transformierten Kurvengleichung eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Nach dem Taylor'schen Satz erhält man, indem man x konstant und y veränderlich, also $dx = 0$ und $dy = a$ nimmt, die transformierte Gleichung in der Form:

$$(2)\quad f(x, y + dy) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3 = F(x,y),$$

wo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ab - 2(a+b)y + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)x + 3y^2 + 2fxy + gx^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2(a+b) + 6y + 2fx$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 6\,,$$

somit

$$\begin{aligned} F(x,y) = {} & aby - c^2x - (a+b)\,y^2 + \left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy - \frac{rc^2}{ab}x^2 \\ & + y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 \\ & + a^2b - 2a(a+b)y + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)x + 3ay^2 + 2afxy + agx^2 \\ & + a^2fx + 3a^2y - (a+b)a^2 + a^3, \end{aligned}$$

oder nach Aggregaten geordnet

$$\begin{aligned} (3)\quad F(x,y) = {} & (a^2 - ab)\,y + \left(a^2f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x \\ & + (2a - b)y^2 + \left(r^2 + 2af + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{ab}\right)x^2 \\ & + y^3 + fxy^2 + gx^2y + hx^3 \end{aligned}$$

und daher nach der Methode der Staffelrechnung:

$$(a^2 - ab)y + \left(a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x \quad \text{geht in}$$

$$\left|\begin{array}{l} (2a-b)y^2 + \left(r^2 + 2af + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{ab}\right)x^2 \\ (2a-b)y^2 + \frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)xy \end{array}\right| \frac{2a-b}{a(a-b)}y + \frac{\{\cdots\}}{a^2-ab}x$$

$$\left\{r + 2af + \frac{c^2(a+b)}{ab} - \frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)\right\}xy + \left(ag - \frac{rc^2}{ab}\right)x^2$$

$$\{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}xy + \frac{\{\cdots\}}{a^2-ab} \cdot \left(a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)x^2$$

somit der Rest

$$(4)\quad ag - \frac{rc^2}{ab} - \frac{1}{a^2-ab}\left\{r + 2af + \frac{c^2(a+b)}{ab} - \frac{2a-b}{a^2-ab}\left(a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right)\right\} \cdot \left[a^2 f - c^2 + a\left(r + \frac{c^2(a+b)}{ab}\right)\right] = 0$$

die Bedingung, dafs der Schnittpunkt $(0, a)$ der Kurve (1) mit der Y-Axe Wendepunkt ist. Formt man die Klammerfaktoren in (4) um, so findet man

$$\{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\} = -\frac{c^2(a^2 - ab + b^2) + a^2 f(r + bf)}{ab(a-b)}$$

$$[\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot] = \frac{a(abf + br + c^2)}{b}$$

und (4) geht über in

$$0 = ag - \frac{rc^2}{ab} + \frac{1}{a(a-b)} \cdot \frac{c^2(a^2 - ab + b^2) + a^2 b(r + bf)}{b(a-b)} \cdot \frac{c^2 + b(r + af)}{b}$$

$$= (a^2 b^2 g - bc^2 r)(a-b)^2 + [c^2(a^2 - ab + b^2) + a^2 b(r + bf)] \cdot [c^2 + b(r + af)]$$

$$= a^2 b^2 (a-b)^2 g - c^2[(a-b)^2 br - (bf + r)a^2 b - (af + r)(a^2 - ab + b^2)b] + c^4(a^2 - ab + b^2) + a^2 b^2 (af + r)(bf + r)$$

$$(4\text{a})\quad 0 = a^2 b^2 (g(a-b)^2 + (af + r)(bf + r)) + c^2 \cdot ab((af + r)a + (bf + r)b) + c^4(a^2 - ab + b^2).$$

Da diese Bedingungsgleichung für den Wendepunkt $(0, a)$ sich nicht ändert, wenn a mit b vertauscht wird, so hätte man (4a) auch erhalten, wenn man Gleichung (1) statt nach $(0, a)$ nach $(0, b)$ transformiert und für letzteren Punkt die Bedingung des Wendepunkts aufgestellt hätte, d. h. auch der dritte Schnittpunkt der Ordinatenaxe und der Kurve ist ein Wendepunkt q. e. d.

Sonderfälle: Liegt der dritte Schnittpunkt $(0, b)$ im Unendlichen, so fehlt die höchste Potenz y^3 in der Gleichung der Kurve dritter Ordnung,

letztere kann daher in diesem Fall für $x = 0$ in der Form genommen werden

$$-a(y-a)y \equiv -ay^2 + a^2y = 0\,.$$

Ist c^2 der Koeffizient des linearen Gliedes x, so mufs wieder, weil der Ursprung Wendepunkt sein soll, die Wurzel $y = \frac{c^2}{a^2}x$ des niedersten Aggregats Faktor des nächst höheren sein; ist daher der andere lineare Faktor $ay - rx$, so lautet das Aggregat der Glieder zweiter Dimension

$$-(ay-rx)\left(y - \frac{c^2}{a^2}x\right) \equiv -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a}x^2,$$

dann bestehen noch zwei Möglichkeiten, entweder der unendlich ferne Schnittpunkt ist parabolischer oder er ist hyperbolischer Art:

Erster Fall: Wird das Aggregat der Glieder dritter Dimension zu $fxy^2 + gx^2y + hx^3$ genommen, so folgt, da der Term $fx - a = 0$ der höchsten Potenz y^2 der nach fallenden Potenzen von y geordneten Kurvengleichung die zur Ordinatenaxe parallele Asymptote $x = \frac{a}{f}$ ergiebt, letztere aber für diesen Fall ins Unendliche rückt, dafs $f = 0$, d. h. dafs das Glied fxy^2 in der Gleichung der Kurve fehlt. Diese lautet daher

$$(1\,\text{a})\quad f(x,y) = gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0,$$

woraus, wenn wieder in den Schnittpunkt $(0, a)$ transformiert wird,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = gx^2 - 2ay + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)x + a^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

und somit die transformierte Gleichung

$$(2\,\text{a})\quad F(x,y) = gx^2y + x^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 - a^2y + arx = 0,$$

woraus die Bedingung, dafs dieser neue Ursprung $(0, a)$ Wendepunkt ist, mittels der Staffelrechnung

$$\begin{array}{r|l|l}
-a^2y + arx & -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 & \frac{1}{a}y - \frac{c^2}{a^3}x \\
 & -ay^2 + r\cdot xy & \\
\hline
 & \frac{c^2}{a}xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 & \\
 & \frac{c^2}{a}xy - \qquad \frac{c^2r}{a^2}\cdot x^2 & \\
\hline
\text{als Rest:} & \qquad\qquad agx^2 = 0 \quad \text{d. h.} \quad g = 0, &
\end{array}$$

hiermit geht (1a) über in

$$(1^*)\qquad 0 = hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0$$



Die Kurve verhält sich also im Unendlichen, gemäfs dem analytischen Dreieck, wie die zweite kubische Parabel

$$hx^3 - ay^2 = 0\,,$$

sie hat also im unendlich fernen Punkt der Y-Axe einen parabolischen Wendepunkt q. e. d.

Zweiter Fall: Transformiert man die Gleichung der Kurve

$$(1\text{b})\qquad f(x,y) = fxy^2 + gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)xy - \frac{rc^2}{a^2}x^2 + a^2y - c^2x = 0$$

wieder in den neuen Ursprung $(0, a)$ mittels

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2fxy + gx^2 - 2ay + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)x + a^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2fx - 2a\,,$$

so erhält man

$$F(x, y) = fxy^2 + gx^2y + hx^3 - ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a} + 2af\right)xy$$
$$+ \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 - a^2y + a(r + af)x$$

und die Bedingung, dafs $(0, a)$ ein Wendepunkt ist, ergiebt sich aus

$$-a^2y + (r+af)x \,\Big|\, -ay^2 + \left(r + \frac{c^2}{a} + 2af\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2 \,\Big|\, \frac{1}{a}y - \frac{1}{a^2}\left(\frac{c^2}{a} + af\right)x$$
$$\underline{-ay^2 \qquad + (r+af)xy}$$
$$\left(\frac{c^2}{a} + af\right)xy + \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right)x^2$$
$$\underline{\left(\frac{c^2}{a} + af\right)xy - \frac{1}{a}(r+af)\left(\frac{c^2}{a} + af\right)x^2}$$
$$\text{als Rest:}\quad \left(ag - \frac{rc^2}{a^2}\right) + \frac{1}{a}(r + af)\left(\frac{c^2}{a} + af\right) = 0,$$

oder

$$(2\text{b})\qquad a^2(f^2 + g) + f(ar + c^2) = 0\,.$$

Um die Art des unendlich fernen Punktes der Ordinatenaxe zu untersuchen, macht man die Asymptote $x = \frac{a}{f}$ zur neuen Ordinatenaxe, transformiert also (1b) in Bezug auf den neuen Ursprung $\left(\frac{a}{f}, 0\right)$, wobei diesmal x veränderlich und y konstant, also $dx = \frac{a}{f}$ und $dy = 0$ zu nehmen ist, dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy^2 + 2gxy + 3hx^2 + \left(r + \frac{c^2}{a}\right)y - \frac{2rc^2}{a^2}x - c^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2gy + 6hx - \frac{2rc^2}{a^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6h\,,$$

somit lautet die transformierte Gleichung

$$(1^{**})\quad F(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3$$

$$= fxy^2 + gx^2y + hx^3 + \left(r + \frac{c^2}{a} + \frac{2ag}{f}\right)xy - \left(\frac{rc^2}{a^2} + \frac{3ah}{f}\right)x^2$$

$$+ \frac{a^2(f^2+g) + f(ar+c^2)}{f^2}y - \frac{2c^2f^2r - 3a^3h}{af^3}x$$

$$+ \frac{a^3h + c^2f(a^2f+r)}{f^3} = 0\,.$$

Infolge der Bedingung (2b) verschwindet somit das in y lineare Glied, die Kurve verhält sich daher, weil auch das Glied ay^2 fehlt, in der Richtung der neuen Ordinatenaxe, gemäfs dem analytischen Dreieck, wie die kubische Hyperbel

$$xy^2 + \frac{a^3h + c^2f(a^2f+r)}{f^4} = 0,$$

der unendlich ferne Punkt der alten Ordinatenaxe ist somit ein hyperbolischer Wendepunkt unter der Bedingung, dafs die beiden anderen Schnittpunkte der Kurve mit der Ordinatenaxe ebenfalls Wendepunkte sind q. e. d.

Hiermit sind sämtliche Sonderfälle des Hauptsatzes über die Lage dreier Wendepunkte direkt bewiesen, denn der weitere Fall, zwei Wendepunkte im Unendlichen und der dritte im Endlichen, besteht nicht, es müssen alsdann alle drei Wendepunkte im Unendlichen liegen (vgl. 29).

71. Des geschichtlichen Interesses wegen sei hier angeschlossen der acht Jahre später erschienene, mit Hilfe der Differentialrechnung geführte

Beweis von Mac Laurin (1748):

Sind $y_1 = FP$, $y_2 = FQ$, $y_3 = FR$ die zu irgend einer Abscisse $OF = x$

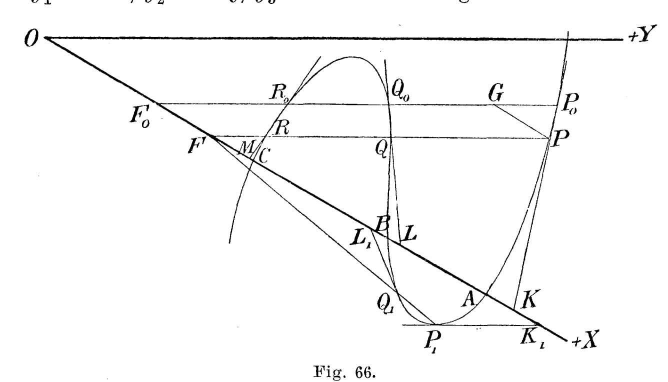


Fig. 66.

gehörigen Ordinaten der auf schiefwinkliges System bezogenen Kurve dritter Ordnung (Fig. 66)

$$y^3 + (ax+b)y^2 + (cx^2+ex+f)y + (gx^3+hx^2+kx+l) = 0$$

und $x_1 = OA$, $x_2 = OB$, $x_3 = OC$ die Abscissen der aus

$$gx^3 + hx^2 + kx + l = 0$$

sich ergebenden Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, so ist gemäſs 49.

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = g(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

oder

$$FP \cdot FQ \cdot FR = g \cdot FA \cdot FB \cdot FC,$$

woraus durch Logarithmieren und Differenzieren mit Beachtung, daſs g eine Konstante ist

$$\log FP + \log FQ + \log FR = \log g + \log FA + \log FB + \log FC$$

$$(1) \qquad \frac{dFP}{FP} + \frac{dFQ}{FQ} + \frac{dFR}{FR} = \frac{dFA}{FA} + \frac{dFB}{FB} + \frac{dFC}{FC}.$$

Ändert man die Richtung der Ordinatenaxe, so daſs nunmehr FP_1, FQ_1, FR_1 die zu $OF = x$ gehörigen Ordinaten sind, so ist wie oben

$$FP_1 \cdot FQ_1 \cdot FR_1 = g_1 \cdot FA \cdot FB \cdot FC$$

und daher

$$(2) \qquad \frac{dFP_1}{FP_1} + \frac{dFQ_1}{FQ} + \frac{dFR_1}{FR_1} = \frac{dFA}{FA} + \frac{dFB}{FB} + \frac{dFC}{FC}$$

und somit aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \frac{dFP}{FP} + \frac{dFQ}{FQ} + \frac{dFR}{FR} = \frac{dFP_1}{FP_1} + \frac{dFQ_1}{FQ_1} + \frac{dFR_1}{FR_1}.$$

Läſst man $OF = x$ um das Differential $dx = dOF = FF_0$ wachsen oder, wie die Figur zeigt, abnehmen, und zieht durch F_0 die zur Ordinate FP unendlich benachbarte parallele Ordinate, welche die Kurve in den zu P, Q, R unendlich benachbarten Punkten P_0, Q_0, R_0 schneidet, so daſs PP_0, QQ_0, RR_0 als die unendlich kleinen Sehnen betrachtet werden können, durch deren Verlängerung die Tangenten PK, QL, RM der Kurvenpunkte P, Q, R entstehen, so ist, wenn $PG \# FF_0$ gezogen wird

$$F_0G = PF = y \quad \text{also} \quad P_0G = dy = dPF$$

und somit

$$\frac{P_0G}{PG} = \frac{PF}{KF} \quad \text{oder} \quad \frac{P_0G}{PF} = \frac{PG}{KF} \quad \text{oder} \quad \frac{dPF}{PF} = \frac{dOF}{KF}.$$

Führt man diese Betrachtung an sämtlichen sechs Kurvenschnittpunkten der Geraden FP und FP_1 durch, so erhält man

$$\frac{dFP}{FP} = \frac{dOF}{FK} \qquad \frac{dFP_1}{FP_1} = \frac{dOF}{FK_1}$$

$$\frac{dFQ}{FQ} = \frac{dOF}{FL} \qquad \frac{dFQ_1}{FQ_1} = \frac{dOF}{FL_1}$$

$$\frac{dFR}{FR} = \frac{dOF}{FM} \qquad \frac{dFR_1}{FR_1} = \frac{dOF}{FM_1},$$

wo K_1, L_1, M_1 die Schnittpunkte von OF mit den in P_1, Q_1, R_1 gezogenen Tangenten sind, und hieraus durch Addition unter Berücksichtigung von (3)

$$\frac{1}{FK} + \frac{1}{FL} + \frac{1}{FM} = \frac{1}{FK_1} + \frac{1}{FL_1} + \frac{1}{FM_1}. \tag{4}$$

Läſst man die Gerade FP_1 sich drehen bis sie mit FO zusammenfällt, dann wird

$$FK_1 = FA, \qquad FL_1 = FB, \qquad FM_1 = FC$$

und

$$\frac{1}{FK} + \frac{1}{FL} + \frac{1}{FM} = \frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} + \frac{1}{FC} \tag{5}$$

somit, da sowohl das Axensystem als auch die Abscisse OF beliebig gewählt wurden und diese Betrachtung sich für jede algebraische Kurve in derselben Weise durchführen läſst,

Satz von Mac Laurin: Zieht man von einem beliebigen festen Punkt (F) auf einer, eine algebraische Kurve $n$ter Ordnung in n Punkten schneidenden festen Geraden (OF) beliebige Transversalen, welche die Kurve in ebensoviel Punkten schneiden, so ist die Summe der reziproken Werte der auf der festen Geraden vom festen Punkt aus gemessenen Abschnitte, die durch die Tangenten in den Kurvenschnittpunkten einer solchen Transversale erzeugt werden, konstant, nämlich gleich der Summe der reziproken Werte der auf der festen Geraden durch die Kurvenschnittpunkte einerseits und den festen Punkt andererseits begrenzten Strecken.

Oder, da die Summe der reziproken Werte von n Strecken durch die Anzahl der Strecken dividiert, das harmonische Mittel der Strecken darstellt, hier aber die Anzahl der Strecken stets dieselbe ist, so kann man auch sagen: Das harmonische Mittel aus den auf der festen Geraden durch die Tangenten in den Schnittpunkten der Transversalen einerseits und dem festen Punkt der Geraden andererseits begrenzten Abschnitte ist konstant.

Dieser Satz von Mac Laurin ist die Verallgemeinerung der zweiten allgemeinen Eigenschaft sämtlicher algebraischer Kurven, die Newton in der Enumeratio aufführt. Sie betrifft die Asymptoten und lautet:

Hat eine Kurve $n$ter Ordnung n Asymptoten, so sind die arithmetischen Mittel aus den Abschnitten, welche einerseits durch die Asymptoten andererseits durch die Kurve auf einer beliebigen Geraden abgeschnitten werden, gleich, m. a. W.: Die Summen der von den n Asymptoten und ihren zugehörigen Kurvenzweigen begrenzten Abschnitte einer eine Kurve $n$ter Ordnung in n Punkten schneidenden Geraden sind bezüglich des Schnittpunkts dieser Geraden mit ihrem zugehörigen Durchmesser auf beiden Seiten der Geraden gleich (vgl. hiermit den Sonderfall der konischen Hyperbel).

Da jede der Tangenten PK, QL, RM die Kurve dritter Ordnung in

einem weiteren Punkt U, V, W schneidet, so ist in dem besonderen Fall, wenn die Verbindungsgerade UV zweier dieser Schnittpunkte, als feste Gerade betrachtet, die beliebig gewählte FP in S, die dritte Tangente RM in W' und die Kurve in dem weiteren Schnittpunkt W'' trifft, nach dem Satz von Mac Laurin

$$\frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW'} = \frac{1}{SU} + \frac{1}{SV} + \frac{1}{SW''}$$

somit

$$SW' = SW''$$

d. h. es fällt W' und somit auch W mit dem Kurvenpunkt W'' zusammen; die Schnittpunkte U, V, W der Kurve mit den in P, Q, R gezogenen Tangenten liegen somit in einer Geraden und man erhält den weiteren

Satz: Zieht man in den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit einer Kurve dritter Ordnung die Tangenten, so liegen deren Schnittpunkte mit der Kurve ebenfalls in einer Geraden.

Fallen die Schnittpunkte U, V, W der Tangenten mit den jeweiligen Berührungspunkten P, Q, R zusammen, werden also P, Q, R zu Wendepunkten, so deckt sich die Gerade UVW mit der Geraden PQR d. h. die drei Wendepunkte liegen in einer Geraden.

72. *Dritter Beweis mittels des Schnittpunktrestsatzes.*

Ordnet man die vollständige Gleichung einer algebraischen Kurve $n$ter Ordnung nach steigenden Aggregaten beider Veränderlichen, so ist die Anzahl sämtlicher Glieder der Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Da die Gestalt der Kurve von den Koeffizienten der Glieder abhängt, aber durch Division der Gleichung mit einem der Koeffizienten, meist demjenigen der höchsten Potenz einer der Variabeln, eben diese Potenz den bestimmten Zahlenkoeffizienten 1 erhält, so ist demnach die Anzahl der noch willkürlichen Koeffizienten oder, da die Wahl eines Koeffizienten der Angabe eines Punkts äquivalent ist, die Anzahl der beliebig zu wählenden Punkte, durch welche die Kurve $n$ter Ordnung bestimmt ist

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Legt man daher durch die n^2 Schnittpunkte zweier Kurven $n$ter Ordnung $f(x, y) = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ eine beliebige dritte Kurve derselben Ordnung

$$F(x, y) = f + \lambda \cdot \varphi = 0,$$

wo λ ein von den Schnittpunkten der Kurven f und φ durchaus unabhängiger noch beliebig zu wählender konstanter Faktor ist, so genügen ge-

mäfs dem Obigen zur eindeutigen Bestimmung der Kurve F, wenn dem Faktor λ ein bestimmter Wert gegeben wird d. h. wenn die Kurve F durch einen beliebigen, von den Schnittpunkten der Kurven f und φ verschiedenen Punkt aufserhalb gelegt wird, noch weitere $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte, die unter den n^2 Schnittpunkten, durch welche F hindurchgeht, beliebig ausgewählt werden können. Daraus folgt, dafs von den n^2 Schnittpunkten zweier Kurven n ter Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ dieser Schnittpunkte die übrigen

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Schnittpunkte mitbestimmt sind.

Hat man somit zwei Kurven dritter Ordnung, die sich in neun Punkten schneiden, und legt man durch acht dieser Schnittpunkte und einen beliebigen weiteren Punkt eine dritte Kurve dritter Ordnung, so geht diese auch durch den neunten Schnittpunkt der beiden ersten Kurven. Das ganze Kurvenbüschel dritter Ordnung, das man durch acht der neun Schnittpunkte zweier Kurven dritter Ordnung legen kann, schneidet sich also in einem einzigen weiteren Punkt, dem neunten Schnittpunkt der beiden geg. Kurven dritter Ordnung. Zieht man daher in den Schnittpunkten einer Geraden g mit einer bel. Kurve dritter Ordnung die drei Tangenten, so können diese als zerfallende Kurve dritter Ordnung betrachtet werden und schneiden die geg. Kurve insgesamt in neun Punkten, nämlich in den drei auf g liegenden Berührungspunkten und drei weiteren hiervon getrennten gewöhnlichen Punkten. Legt man also durch acht dieser Schnittpunkte eine neue Kurve dritter Ordnung, in diesem Fall die doppelt zu zählende Gerade g und die Verbindungsgerade zweier der drei gewöhnlichen Schnittpunkte, so mufs diese neue Kurve dritter Ordnung auch durch den neunten Schnittpunkt gehen d. h. auch der dritte gewöhnliche Schnittpunkt liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden ersten. Hiermit sind die Schlufsfolgerungen auf diejenigen am Ende des Mac Laurin'schen Beweises zurückgeführt.

Auch in der Elementargeometrie läfst sich der Schnittpunktsrestsatz mit Vorteil verwenden, insbesondere da, wo es sich um den Nachweis handelt, dafs drei Punkte auf einer Geraden liegen, wie z. B. beim Beweis vom

Satz des Pascal.

Bezeichnet man die auf einander folgenden Seiten eines einer Kurve zweiter Ordnung einbeschriebenen beliebigen Sechsecks mit den sechs ersten Ziffern der Zahlenreihe, so können die Geradentripel (1, 3, 5) und (2, 4, 6) als zerfallende Kurven dritter Ordnung betrachtet werden, durch sechs ihrer Schnittpunkte geht aber der Kegelschnitt, somit mufs die den Kegelschnitt

zur Kurve dritter Ordnung ergänzende Verbindungsgerade zweier der drei noch aufserhalb des Kegelschnitts liegenden Schnittpunkte auch durch den dritten gehen.

D. Singuläre Punkte aufserhalb des Ursprungs.

73. Verlegt man den Ursprung in den zu untersuchenden singulären Punkt (p, q) der Kurve $f(x, y) = 0$ mittels der Transformation

$$x = p + z \qquad y = q + u,$$

so gelten für die transformierte Gleichung

$$\text{(I)} \qquad F(z, u) = f(p, q) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{dx} z + \frac{\partial f}{\partial y} u\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} zu + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u^2\right) + \cdots,$$

wo an Stelle von x und y überall die Werte z und u zu setzen sind, sämtliche Schlufsfolgerungen in 55.

Gewöhnliche Tangenten.

74. $f(p, q) = 0$ ist die Bedingung, dafs Punkt (p, q) auf der Kurve $F(z, u) = 0$ d. h. auf der Kurve $f(x, y) = 0$ liegt. Für irgend einen Wert p der Abscisse x erhält man aus $f(p, y) = 0$ die zugehörige Ordinate $y = q$ des Kurvenpunkts (p, q).

Die Richtung $\frac{dy}{dx}\left(\text{früher} = \frac{m}{n}\right)$ der Tangente in diesem Punkt ergiebt sich (gemäfs 55.), wenn wieder an Stelle von z und u, da die Richtungen der Koordinaten sich bei der Transformation nicht geändert haben, dx und dy gesetzt wird, aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

zu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wo in den partiellen Differentialquotienten für x und y die Koordinaten des Berührungspunkts (p, q) zu setzen sind.

Maxima und *Minima.*

75. Ist die Tangente des Punkts (x, y) parallel zur Abscissenaxe, hat also die Ordinate dieses Punkts im Vergleich zu den Ordinaten der nächst benachbart gelegenen Kurvenpunkte einen gröfsten oder kleinsten Wert, so ist nach den früheren Bezeichnungen

$$(1) \qquad \frac{m}{n} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

ist die Tangente parallel zur Ordinatenaxe, also die Abscisse ein Maximum oder Minimum, so mufs sein

$$(2) \qquad \frac{n}{m} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{dx}{dy} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Es bestimmen sich somit die am höchsten und tiefsten gelegenen Punkte der Kurve bezüglich der Abscissenaxe aus

$$f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

bezüglich der Ordinatenaxe aus

$$f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

vorausgesetzt, dafs ein derart ermittelter Kurvenpunkt nicht beiden partiellen Differentialquotienten zugleich genügt (wie im Fall eines Doppelpunkts, siehe 76.). Die näheren Unterscheidungsmerkmale, ob ein Maximum oder ein Minimum statthat, giebt De Gua nicht an. Zur Aufsuchung derselben ist aber auch seine Methode zu differenzieren, bei welcher dx und dy konstant genommen werden, also alle höheren Differentiale von x und y verschwinden, nicht geeignet, da jene Kriterien bekanntlich zunächst eben von jenen höheren Differentialen und zwar von denjenigen gerader Ordnung abhängen und sich aus der expliziten Form

$$(3) \qquad y = \varphi(x)$$

der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ leichter entwickeln lassen, wie folgt:

Ist die Ordinate eines Kurvenpunkts (x, y) ein Extrem, so berechnet sich seine Abscisse gemäfs oben als Wurzel der Bedingungsgleichung

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \varphi'(x) = 0.$$

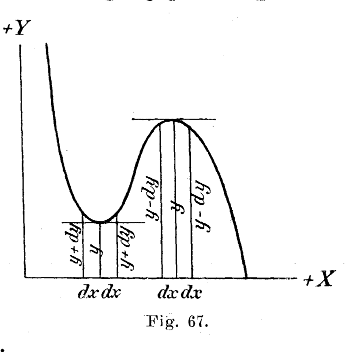


Fig. 67.

Nun mufs im Falle des Maximum bezw. Minimum die Ordinate sowohl des unendlich benachbarten vorhergehenden als auch diejenige des unendlich benachbarten folgenden Kurvenpunkts abnehmen bezw. wachsen d. h. für positive sowohl als negative Werte von dx mufs dy im Fall des Maximum negativ, im Fall des Minimum positiv sein (Fig. 67). Für einen unendlichen benachbarten Kurvenpunkt ist aber

$$y + dy = \varphi(x + dx)$$

oder nach Taylor

$$= \varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{1!}\,dx + \frac{\varphi''(x)}{2!}\,dx^2 + \frac{\varphi'''(x)}{3!}\,dx^3$$

also mit Berücksichtigung von (4) der differentielle Zuwachs der Ordinate dieses Punkts

$$(5) \qquad dy = \frac{\varphi''(x)}{2!}\,dx^2 + \frac{\varphi'''(x)}{3!}\,dx^3 + \cdots$$

Das Vorzeichen von dy hängt somit, da dx^2 unabhängig vom Vorzeichen von dx stets positiv ist und die höheren Potenzen von dx im Vergleich zur niedersten verschwinden, nur von denjenigen von $\varphi''(x)$ ab, es besteht somit ein Maximum bezw. Minimum, wenn für den aus (4) bestimmten Wert der Abscisse $\varphi''(x)$ negativ bezw. positiv wird. Verschwindet jedoch $\varphi''(x)$, so bestimmt der Term $\varphi'''(x)\,dx^3$ das Vorzeichen der rechten Seite (5), dieses Vorzeichen wechselt aber gleichzeitig mit demjenigen von dx infolge der ungeraden Potenz dieses Differentials, also besteht im Falle $\varphi''(x) = 0$ weder Maximum noch Minimum, sondern ein Wendepuukt mit horizontaler Tangente (Fig. 68). Verschwindet auch noch $\varphi'''(x)$, so erhält dy das Vorzeichen von $\varphi''''(x)$, da dx^4 als gerade Potenz stets positiv ist, man hat also wieder Maximum bezw. Minimum, je nachdem $\varphi''''(x)$ negativ bezw. positiv ist, und wieder Wendepunkt (höherer Art), wenn $\varphi''''(x) = 0$ wird, daher

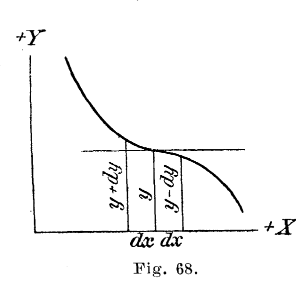


Fig. 68.

Satz: Die aus $\varphi'(x) = 0$ zu berechnenden Abscissen aller bezüglich der Abscissenaxe am höchsten und tiefsten gelegenen Punkte der Kurve $y = \varphi(x)$ bestimmen nur dann solche Punkte, wenn die nächst höhere Abteilung, welche für den betreffenden Wert der Abscisse nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist und zwar sind die Ordinaten dieser Punkte Maxima oder Minima, je nachdem diese Ableitung gerader Ordnung negativ oder positiv ist.

Um diese bezüglich der Ordinaten geltenden Kriterien auf die implizite Form der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$ zu übertragen, hat man diese tota nach x zu differenzieren, wobei dx und dy als variabel zu betrachten sind. Es ist, da das Verschwinden eines Integrals $f(x, y) = 0$ auch das Verschwinden seiner totalen Differentiale nach sich zieht:

$$0 = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$0 = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

somit

$$(6) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und daher, mit Berücksichtigung von (1)

$$(7) \qquad \varphi''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Es entspricht somit dem negativen Wert von $\varphi''(x)$ gleiches Vorzeichen, dem positiven Wert entgegengesetztes Vorzeichen der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, daher

Satz: Die Ordinaten der mittels $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sich bestimmenden Punkte der Kurve $f(x, y) = 0$ sind Maxima bezw. Minima, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ für die betreffenden Koordinatenwerte gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen annehmen und nicht verschwinden.

Analog ergiebt sich vertauscht:

Die Abscissen der aus $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich bestimmenden Kurvenpunkte sind Maxima bezw. Minima, je nachdem $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für die betreffenden Koordinatenwerte gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben und nicht verschwinden.

Verschwinden die partiellen Differentialquotienten, deren Vorzeichen die Kriterien für die Extreme abgeben, so handelt es sich entweder um Doppelpunkte oder um Wendepunkte und, wenn noch weitere Kennzeichen wieder auf Maxima und Minima im eigentlichen Sinne hinweisen, um Flachpunkte mit horizontaler Tangente, für die durch Bildung des vierten totalen Differentials von $f(x, y) = 0$ zu untersuchen wäre, ob sie ihre konkave oder konvexe Seite der Abscissenaxe zukehren u. s. f.

Doppelpunkte.

76. Mit Berücksichtigung von (74) folgen aus (73, I) gemäß (55):

$$(1) \qquad f(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

als Bestimmungsgleichungen eines Doppelpunkts der Kurve $f(x, y) = 0$. Die Existenz eines solchen Punkts ist somit an eine Bedingung zwischen

den Koeffizienten der geg. Gleichung geknüpft, die sich durch Elimination von x und y aus den drei Gleichungen (1) ergiebt.

Gemäſs denselben Artikeln folgt ferner: Die Richtungen $\frac{dy}{dx}$ der Tangenten eines Doppelpunkts sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 0, \tag{2}$$

wobei in den partiellen Differentialquotienten für x und y die Koordinatenwerte des Doppelpunkts zu setzen sind. Je nachdem diese Wurzeln reell und getrennt, reell und zusammenfallend oder imaginär konjugiert sind, d. h. je nachdem bei der Auflösung der quadratischen Gleichung (2) der unter der Wurzel auftretende Radikant, die sog. Diskriminante

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \gtreqless 0 \tag{3}$$

ist der Doppelpunkt ein gewöhnlicher Doppelpunkt oder eine Spitze I. Art oder ein isolierter Punkt I. Art. Im Falle der Spitze besteht somit noch eine zweite Bedingung zwischen den Koeffizienten der geg. Gleichung.

Die Spitzen I. Art ergeben sich somit direkt als gemeinschaftliche Wurzeln der vier Gleichungen:

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

mit zwei Bedingungen in den Koeffizienten.

Um Selbstberührungspunkte der Kurve $f(x, y) = 0$ zu finden, muſs gemäſs 58, a die Doppelwurzel von (2) noch einfache Wurzel des nächst höheren Differentials sein; man hat also auſser (1) noch weitere drei Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \left(\frac{dy}{dx}\right) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{6}$$

wobei (6) die Ableitung von (2a) nach $\frac{dy}{dx}$ ist; dann bilden die durch Einsetzen des Wertes von $\frac{dy}{dx}$ aus (6) in (5) und (2a) erhaltenen Eliminate d. h. die Resultante aus (6) und (5) und die durch (3) dargestellte Diskriminante von (2a) zusammen mit (1) ein System von fünf Gleichungen in x und y, von welchen zwei zur Ermittelung der Selbstberührungspunkte genügen, während die anderen durch Einsetzen der gefundenen Koordinaten drei Bedingungen in den Koeffizienten der Kurvengleichung für das Auftreten eines Selbstberührungspunkts der Kurve ergeben.

Die Art der Selbstberührung wird bestimmt durch Verlegung des Ursprungs in den ermittelten Selbstberührungspunkt und Untersuchung gemäfs 58a.

Bezüglich der Aufsuchung der Spitzen II. Art siehe das Verfahren von Euler (Mém. de Berlin 1749, pag. 216).

Dreifache Punkte.

77. Dieselben ergeben sich aus zwei der sechs Bestimmungsgleichungen:

$$(1)\quad f(x, y) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Das Auftreten eines dreifachen Punkts ist somit an vier Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung geknüpft.

Die Richtungen der Tangenten sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(2)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3 = 0$$

mit der im zweiten Beispiel 55. gegebenen Determination.

Handelt es sich um direkte Aufsuchung eines Spitzpunkts, so folgt aus der Bedingung der dreifachen Wurzel von (2) das Verschwinden der ersten und zweiten Ableitung dieser Gleichung nach $\frac{dy}{dx}$; man hat also aufser den Gleichungen (1) die weiteren:

$$(2a)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$$

$$(3)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 2\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$(4)\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die durch Einsetzen von $\frac{dy}{dx}$ aus (4) in (2a) und (3) erhaltenen Eliminate bilden mit (1) ein System von acht Gleichungen in x und y zur Bestimmung der Spitzpunkte, deren Existenz somit an sechs Bedingungen in den Koeffizienten der Kurvengleichung geknüpft ist. Die Richtung der Tangente eines Spitzpunkts (p, q) ergiebt sich aus (4) zu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}}{\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}}$$

für $x = p$ und $y = q$.

Vierfache Punkte.

78. In ähnlicher Weise wie der Spitzpunkt ergiebt sich die höchste Singularität des vierfachen Punkts, der Rückkehrspitzpunkt, aus einem



System von 13 Gleichungen, nämlich den drei Eliminaten von $\frac{dy}{dx}$ aus dem vierten Differential

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 4\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6\,\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4\,\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$$

und dessen drei Ableitungen nach $\frac{dy}{dx}$, den neun durch die partiellen Differentialquotienten von $\frac{\partial f}{\partial x}$ bis $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ dargestellten Gleichungen und der Kurvengleichung $f(x, y) = 0$. Das Auftreten eines Rückkehrspitzpunkts ist somit an 11 Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Gleichung gebunden u. s. f.

k fache Punkte.

79. Dieselben bestimmen sich gemäfs dem Vorhergehenden aus der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ und den gleich Null gesetzten

$$2 + 3 + 4 + \cdots \quad + k = \frac{(k+2)(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2} - 1$$

partiellen ersten, zweiten $\cdots$ $(k-1)$ten Differentialquotienten. Das Auftreten eines k fachen Punkts ist somit geknüpft an $\frac{k(k+1)}{2} - 3$ Bedingungen zwischen den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung.

Die k Tangenten des k fachen Punkts sind die Wurzeln des k ten Differentials

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} + \binom{k}{1}\frac{\partial^k f}{\partial x^{k-1}\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \cdots\cdots\cdots + \binom{k}{k}\frac{\partial^k f}{d y^k}\left(\frac{dy}{dx}\right)^k = 0$$

und sind je nach der Beschaffenheit dieser Wurzeln reell und getrennt, teilweise zusammenfallend und imaginär konjugiert u. s. f. Die nähere Untersuchung führt man durch Parallelverschiebung des Ursprungs in den k fachen Punkt.

80. Auf die Äquivalenz eines k fachen Punkts mit der Anzahl der in ihm sich vereinigenden Doppelpunkte bezw. Spitzen I. Art geht De Gua nicht näher ein (vgl. 54.), obwohl diese Kenntnis für das richtige Verständnis der geometrischen Erzeugung eines k fachen singulären Punkts unentbehrlich ist. Da der k fache Punkt die höchste Singularität einer Kurve $(k+1)$ter Ordnung darstellt, so kann diese Kurve neben dem k fachen Punkt keinen Doppelpunkt mehr besitzen. Der k fache Punkt vereinigt somit in sich die Maximalzahl

$$\frac{(\overline{k+1}-1)(\overline{k+1}-2)}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

von Doppelpunkten der Kurve $(k+1)$ter Ordnung, daher

Satz: Der k fache Punkt ist äquivalent $\frac{k(k-1)}{2}$ Doppelpunkten.

81. Für die eben benützte Maximalzahl von Doppelpunkten einer Kurve n ter Ordnung C_n sei hier des historischen Interesses wegen der erste von Mac Laurin herrührende Beweis angeschlossen (Geom. organica, pag. 187). Es scheint, dafs Mac Laurin ähnlich wie später De Bragelongne zunächst empirisch auf diese Zahl kam, indem er wohl in den ihm bekannten Maximalzahlen 1 und 3 der Doppelpunkte der Kurven dritter und vierter Ordnung die Anfangsglieder der arithmetischen Reihe zweiter Ordnung $1, 3, 6, 10 \cdot \cdot$, in welcher das $(n-2)$ te Glied die höchste Zahl von Doppelpunkten einer C_n darstellt, vermutete, denn er beweist die Richtigkeit der von ihm zu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ angenommenen Maximalzahl von Doppelpunkten einer C_n indirekt, indem er durch diese Doppelpunkte eine C_{n-2} legt, dann können zur eindeutigen Bestimmung von C_{n-2}, wozu $\frac{(n-2)(\overline{n-2}+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$ Punkte erforderlich sind (vgl. 72.), aufser den vorhandenen Doppelpunkten der C_n, die für C_{n-2} einfache Punkte sind, weitere

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{(n-2)(n-1)}{2} = n-2$$

einfache Punkte auf C_n beliebig gewählt werden, die zusammen mit den als Schnittpunkten von C_n und C_{n-2} doppelt zu zählenden Doppelpunkten die Gesamtzahl

$$2 \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 2 = n(n-2)$$

aller Schnittpunkte dieser beiden Kurven ergeben. Besitzt also C_n einen Doppelpunkt mehr, so kann C_{n-2} nur noch durch weitere $(n-2)-1$ einfache Punkte der C_n hindurchgehen, die Gesamtzahl aller Schnittpunkte beider Kurven wäre alsdann

$$2\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\right) + n - 3 = n(n-2) + 1$$

was unmöglich ist.

Man bezeichnet die hier von Mac Laurin erstmals benützten Kurven, welche durch die Doppelpunkte gegebener Kurven hindurchgehen, nach dem Vorgang von Herrn von Brill, als adjungierte Kurven. Sie spielen in der analytischen Geometrie, soweit es sich um Schnittpunktsätze handelt, eine wichtige Rolle, so dienen sie insbesondere zur direkten Ermittelung der Maximalzahl von Doppelpunkten einer C_n und sind mit dem von Clebsch begründeten Begriff des Geschlechts algebraischer Kurven eng verknüpft. Es zeigt sich nämlich, dafs, wenn unter den $m \cdot n$ Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven m- und n ter Ordnung $(m > n)$ d Doppelpunkte der Kurve niederer Ordnung sich befinden, eine gewisse Anzahl p dieser Schnittpunkte

durch die übrigen $m \cdot n - p$ Schnittpunkte mitbestimmt ist (vgl. 72.) und zwar ist diese Zahl

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \tag{a}$$

merkwürdigerweise durchaus unabhängig von der Ordnung m der anderen Schnittkurve, vorausgesetzt, daſs $m \overline{\overline{>}} n$ ist; die Zahl p repräsentiert somit, auch wenn C_n mit den verschiedensten Kurven $m$ter Ordnung in ein Schnittverhältnis tritt, dennoch stets eine einzig und allein C_n angehörige Eigenschaft und wird daher von Clebsch als Geschlecht der Kurve bezeichnet.

Da n sich nicht ändert, so ist p ein Minimum, wenn d ein Maximum ist, und umgekehrt. Soll C_n nicht zerfallen, so kann p nie negativ werden; man erhält also für den kleinsten Wert $p = 0$ die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Kurve $n$ter Ordnung zu

$$D = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{b}$$

Als Geschlecht der Kurve bezeichnet man daher auch den Unterschied zwischen der höchst möglichen und der wirklich vorhandenen Zahl von Doppelpunkten. Eine Kurve, welche die Maximalzahl von Doppelpunkten besitzt, heiſst Kurve vom Geschlecht Null, auch rationale Kurve, da sich ihre Koordinaten explizit als rationale Funktionen desselben Grads einer neuen Veränderlichen darstellen lassen, so daſs an Stelle der ursprünglichen Gleichung $f(x, y) = 0$ die neuen Gleichungen treten

$$x = \varphi_n(\lambda) \qquad y = \psi_n(\lambda).$$

Wendepunkte und Flachpunkte.

82. Gemäſs 55. folgt für 73. I, daſs für jeden Wendepunkt das erste Differential eine Wurzel des zweiten sein muſs. Die Richtung der Wendetangente bestimmt sich aus dem ersten Differential zu

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{1}$$

und die Koordinaten der Wendepunkte ergeben sich daher nach Substitution dieser Wurzel (1) in das zweite Differential aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{2}$$

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

83. Ist (1) auch noch eine Wurzel des dritten Differentials, besteht also auſser (2) noch die Gleichung

$$(4) \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 - 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3 = 0$$

so ergeben sich aus den Gleichungen (4), (2), (3) die Koordinaten des Flachpunkts mit einer Bedingung zwischen den Koeffizienten der Kurvengleichung (3), u. s. w.

Vergleich der analytischen und der Differentialmethode bezüglich der Aufsuchung besonderer Kurvenpunkte.

84. Während nach dem damaligen Stand der Wissenschaft für die Ermittelung ausgezeichneter Kurvenpunkte auf differentiellem Weg eine einheitliche Methode fehlte und die Untersuchung fast jedes einzelnen Falles das Aufsuchen neuer Hilfsverfahren erforderlich machte, so dafs man schliefslich deren fünf besafs:

1. das schon von Leibniz eingeführte Differentialdreieck zur Bestimmung der Tangentenrichtung $\frac{dy}{dx}$,

2. das ebenfalls von Leibniz angegebene und später von Fontenelle (Géom. de l'Inf., Paris 1727) genauer begründete Verfahren zur Untersuchung der Konvexität und Konkavität, das zu den Kriterien $d^2y = 0$ bezw. ∞ für Wende- und Rückkehrpunkte führte,

3. das ebenfalls von Leibniz aufgefundene und von De l'Hospital weiterhin bekannt gemachte Verfahren zur Ermittelung der Maxima und Minima,

4. das von Bernoulli und De l'Hospital angegebene und von Saurin weiter entwickelte Verfahren zur Ermittelung unbestimmter Werte,

5. die Methode der Subtangentenkurve von De l'Hospital, ein zweites Verfahren zur Ableitung der Kennzeichen für Wende- und Rückkehrpunkte,

gelingt es De Gua, die Kriterien für sämtliche besonderen Kurvenpunkte eindeutig und hinreichend in einfachster Weise mit gänzlicher Vermeidung des Begriffs des Unendlichkleinen einzig und allein mit Hilfe der Analysis des Descartes ebenfalls in Differentialausdrücken sogar der impliziten Form der Kurvengleichung aus einer einzigen Transformation $F(u, z) = 0$ in 73, I. allgemein zu entwickeln.

Die anschliefsenden kritischen Vergleiche der streng begründeten Regeln De Guas mit den aus den Prinzipien der Differentialrechnung abgeleiteten, aufser für mehrfache Punkte nur noch für Wende-, Rückkehr-, Flach- und Spitzpunkte bekannten, meist ungenügenden Kriterien (Usages pg. 268 ff.) bilden einen glänzenden Beweis für die Überlegenheit der Analysis des Descartes gegenüber der Differentialmethode in analytischen Fragen, die nicht wie die Quadratur und Rektifikation, ihrem Wesen nach die analytische



Behandlung überhaupt ausschließen, weil die auftretenden Differentialausdrücke wirkliche Differentiale d. h. unendlich kleine Zuwachsgrößen darstellen, während sie bei den Untersuchungen De Guas die Rolle unbestimmter Größen im Sinne der Methode der unbestimmten Koeffizienten von Descartes übernehmen.

Doppelpunkt.

85. Das im Journal des Sçavans 1703 erstmals von Saurin angegebene Kriterium für die Doppelpunkte $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ scheint von ihm bei Tangentenbestimmungen zufällig aufgefunden worden zu sein, wenigstens begründet er dasselbe erst nachträglich (Acad. de Paris 1723) durch die Existenz einer Doppelwurzel der Kurvengleichung für x sowohl als y mit Benützung der Huddeschen Regel, die er mit dem Prozeſs der Differentation nach zwei Variabeln identifiziert (vgl. 17.). Eine eigentliche differentielle, auf den Begriff des Unendlichkleinen gestützte Ableitung des obigen Kriteriums aus der Eigenschaft des Doppelpunkts, daſs jede durch ihn gehende Gerade zwei unendlich benachbarte Punkte verbindet, ihr Richtungskoeffizient also unbestimmt ist, so lange sie nicht durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geht d. h. zur Tangente wird, giebt Saurin nicht. Seine Auffassung des Problems auch für k fache Punkte ist durchweg algebraischer Natur und die Berechnung der Tangenten aus dem k ten Differential eine induktive Verallgemeinerung des De l'Hospitalschen Verfahrens der wiederholten Differentiation zur Ermittelung unbestimmter Werte.

Hiermit verglichen gebührt der strengen Ableitung der De Gua'schen Kriterien der Vorzug. Nichts destoweniger ist das Saurinsche Kriterium für Doppelpunkte eindeutig und hinreichend und stimmt mit demjenigen von De Gua überein, sobald es in der Form geschrieben wird

$$0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$

wodurch ein etwaiger Irrtum, wie er bei der Form $\frac{0}{0}$ möglich ist und u. a. von Guisnée thatsächlich begangen wurde, als ob dx und dy selbst verschwinden würden, ausgeschlossen ist.

Über die Unvollständigkeit bezw. Ungenauigkeit der Kriterien mehrfacher Punkte siehe 9, 11.

Wende- und Rückkehrpunkte.

86. Die Zweideutigkeit und Unvollständigkeit der von Leibniz und De l'Hospital aufgestellten Differentialkriterien $d^2y = 0$ für Wende- und $d^2y = \infty$ für Rückkehrpunkte bringt schon Guisnée zum Ausdruck (Acad. de Paris

1706, pg. 50); auch De Gua weist auf die bestehenden Schwierigkeiten hin z. B. für den Fall einer vertikalen Tangente, wo das Kriterium $d^2y = \infty$ nicht nur einen Rückkehrpunkt, sondern mit gleichem Recht einen Wende- oder einen gewöhnlichen Berührungspunkt bezeichnet, so daſs für diese drei Arten von Punkten in dieser besonderen Lage überhaupt kein differentielles Unterscheidungsmerkmal zu bestehen scheint, da auch der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \infty$ ist. Aber selbst wenn die Differentialkriterien für die Wende- und Rückkehrpunkte in möglichster Vollständigkeit und Eindeutigkeit aufgestellt werden, eine Aufgabe, der sich erstmals De Gua unterzieht, so ermangeln sie der Einfachheit und Übersichtlichkeit, durch welche sich die Kriterien De Guas auszeichnen.

Zur Lösung der letztgenannten Aufgabe benutzt De Gua das Verfahren von De l'Hospital (vgl. 7.): Nimmt man die vom Ursprung aus gemessenen Abschnitte, welche die Tangenten einer Kurve auf der Abscissenaxe erzeugen, die sog. Subtangenten

$$(1) \qquad u = \pm(y \cdot \operatorname{ctg} \varphi - x) = \pm\left(y \cdot \frac{dx}{dy} - x\right) = \pm \frac{y\,dx - x\,dy}{dy}$$

wo (x, y) die Koordinaten des Berührungspunkts sind, zu neuen Ordinaten (unter Beibehaltung der zugehörigen Abscissen der Berührungspunkte), so bilden die erhaltenen Endpunkte eine neue Kurve, die Subtangentenkurve, welche die Beziehungen zwischen den Abscissen und Subtangenten der Punkte der ursprünglichen Kurve graphisch darstellt. De l'Hospital findet nun, daſs für Wendepunkte Maxima und Minima der Subtangente, für Rückkehrpunkte solche der Abscisse auftreten, und bestimmt, obwohl seine für Maxima wie für Minima ohne Unterschied aufgestellten Kriterien $dy = 0$ oder ∞ keine näheren Angaben enthalten, wann der eine oder der andere dieser Werte zu nehmen ist, das Kriterium für

$$\text{Wendepunkte aus } \frac{d \,\text{subtang}}{dx} = 0 \quad \text{zu } d^2y = 0$$

$$\text{Rückkehrpunkte aus } \frac{d \,\text{subtang}}{dx} = \infty \quad \text{zu } d^2y = \infty.$$

Dieser nicht zu verleugnenden Willkürlichkeit gegenüber giebt De Gua folgende scharfe Begründung:

Da die beiden einem Wendepunkt unendlich benachbarten Punkte einer Kurve dieselbe Subtangente haben, die jedoch von derjenigen durch die Wendetangente abgeschnittenen nur unendlich wenig verschieden ist, so entspricht jedem Wendepunkt der ursprünglichen Kurve ein bezüglich der Abscissenaxe höchst oder tiefst gelegener Punkt der Subtangentenkurve, bestimmt durch $\frac{du}{dx} = 0$; dagegen gehören zu den unendlich benachbarten



Punkten eines Rückkehrpunkts verschiedene Subtangenten, die eine bezüglich der dem Rückkehrpunkt selbst zugehörigen Subtangente, die wegen des Zusammenfallens der beiden Tangenten des Rückkehrpunkts doppelt zu zählen ist, um dasselbe Differential gröfser als die andere kleiner, den Rückkehrpunkten der ursprünglichen Kurve entsprechen daher die Maxima und Minima der Subtangentenkurve bezüglich der Ordinatenaxe, bestimmt durch $\frac{du}{dx} = \infty$. Entwickelt man daher unter Berücksichtigung der für Maxima und Minima bestehenden Einschränkung, dafs dx konstant ist, das Differential der Subtangente

$$d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = \frac{dy\,(dy\,dx - dx\,dy - x\,d^2y) - (y\,dx - x\,dy)\,d^2y}{dy^2} = -\frac{y\,dx\,d^2y}{dy^2}$$

$$(2) \qquad = -\frac{\frac{d^2y}{dy^2}}{y} \cdot dx,$$

so folgt für Wendepunkte $d^2y = 0$, für Rückkehrpunkte $d^2y = \infty$ im Vergleich zu $\frac{dy^2}{y}$, welch letzterer Wert, an dessen Stelle wegen des konstanten dx auch $\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ genommen werden darf, im allgemeinen, wenn keine besondere Lage vorliegt, für Wendepunkte sowohl wie für Rückkehrpunkte endlich ist (für letztere zunächst $\frac{0}{0}$) und daher nicht in Betracht kommt.

Zugleich ergiebt sich aus (2), dafs die geg. Kurve in einem bestimmten Punkt (x, y) die konvexe oder die konkave Seite der Abscissenaxe zuwendet, je nachdem der Zuwachs der Subtangente (auf der Abscissenaxe gemessen) positiv oder negativ ist d. h. da dx konstant und dy^2 stets positiv ist, je nachdem

$$y\,d^2y \quad \text{oder} \quad y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \lessgtr 0\,.$$

87. Eine Ausnahmestellung nehmen zunächst diejenigen Wendepunkte ein, welche die Ordinate zur Tangente haben, für welche also $\frac{dy}{dx} = \infty$ und somit auch $\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \infty$ ist. Da in diesem Fall die beiden dem Wendepunkt unendlich benachbarten Punkte auf der Ordinate des Wendepunkts liegen, so gehören zu einer einzigen Abscisse x drei zusammenfallende Subtangenten u und da erst die beiden nächsten, um ein weiteres Differential entfernten Kurvenpunkte mit den Abscissen $x + dx$ und $x - dx$ wieder gleiche Subtangenten besitzen, die jedoch von derjenigen des Wendepunkts selbst um unendlich wenig verschieden sind, so entspricht diesem besonderen Wendepunkt der geg. Kurve ein Rückkehrpunkt der Subtangentenkurve.

Die Richtigkeit dieser Schlufsfolgerung wird bestätigt beispielsweise durch die Aufstellung der Subtangentenkurve der Kurve dritter Ordnung

$$f(x, y) = a^2(x - a) - (y - a)^3 = 0, \tag{3}$$

die in (a, a) einen Wendepunkt mit der Tangente $x = a$ besitzt. Setzt man den Wert von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{3(y-a)^2}$$

in den Ausdruck für die Subtangente

$$u = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}},$$

so ergiebt sich die Subtangentenkurve $\varphi(z, u) = 0$ durch Elimination von x und y aus dem System:

$$(y - a)^3 = a^2(x - a) \tag{3}$$

$$u = \frac{3y(y-a)^2 - a^2 x}{a^2} \tag{4}$$

$$x = z. \tag{5}$$

Um jedoch die Natur des dem Wendepunkt (a, a) entsprechenden Punkts der Subtangentenkurve zu ermitteln, verlegt man den Ursprung in letzteren Punkt. Für $x = a$ und $y = a$ mufs also sein $u = 0$ und $z = 0$; man erhält daher die transformierte Gleichung der Subtangentenkurve durch Elimination von x und y aus

$$(y - a)^3 = a^2(x - a) \tag{3}$$

$$u - a = \frac{3y(y-a)^2 - a^2 x}{a^2} \tag{4'}$$

$$z + a = x, \tag{5'}$$

wie folgt: Aus $(4') + (5')$ ergiebt sich

$$a^2(u + z) = 3y(y - a)^2$$

oder

$$\begin{aligned} a^2(u + z) &= 3y(y-a)^2 - 3a(y-a)^2 + 3a(y-a)^2 \\ &= 3(y-a)^3 + 3a(y-a)^2 \\ &= 3a^2 z + 3a\sqrt[3]{a^4 z^2} \end{aligned}$$

oder

$$a(u - 2z) = 3\sqrt[3]{a^4 z^2}$$

oder

$$(u - 2z)^3 - 27az^2 = 0$$

d. h. der Ursprung ist ein Rückkehrpunkt.

Die Differentialkriterien eines Wendepunkts, dessen Ordinate Tangente ist, lauten somit

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = \infty\,,$$

sie sind dieselben wie für den gewöhnlichen Ovalpunkt und den Rückkehrpunkt, wenn die Ordinaten Tangenten sind, und doch müssen für diese drei durchaus verschiedenen Arten von Punkten auch differentielle Unterschiede bestehen, die eben, wie es scheint, in dieser Form der Darstellung der Differentiale nicht zum Ausdruck kommen. Die einzig mögliche Erklärung für diese Erscheinung besteht somit darin, dafs die Differentialquotienten je nach der Art des betreffenden Punkts von verschiedener Ordnung ∞ werden. Vergleicht man diesbezüglich die Scheitel der drei Parabeln

$$y^2 = x \qquad y^3 = x \qquad y^3 = x^2$$

und bildet man die Quotienten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \infty^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \infty^{\frac{2}{3}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} = \infty^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \infty^{\frac{3}{2}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} = \infty^{\frac{5}{3}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}} = \infty^{\frac{4}{3}},$$

woraus allgemein (oder auch durch Ableitung von $y^m = Ax^n$) für den

Ovalpunkt	Wendepunkt	Rückkehrpunkt
$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}}$	$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}}$	$\frac{dy}{dx} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}}}$
$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{gerade}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{ungerade}}{\text{ungerade}}}$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty^{\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}}$,

so ergiebt sich aus dieser Tabelle der Exponentialbrüche von ∞ die Art der aus $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$ bestimmten Punkte der Kurve $f(x, y) = 0$, falls für diese Punkte auch noch der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

Dagegen bestimmen sich aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

die Rückkehrpunkte, deren Tangenten parallel der Abscissenaxe sind, und aus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

die Wendepunkte, deren Tangenten parallel der Abscissenaxe sind, letztere erhält man nach dem De Gua'schen Verfahren (vgl. 82.), weil $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und

somit, wenn kein Doppelpunkt bestehen soll, $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht ebenfalls verschwinden darf, aus

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

und entsprechend ergeben sich diejenigen Wendepunkte, welche die Ordinate zur Tangente haben, aus

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

so z. B. hat die oben behandelte Kurve dritter Ordnung

$$f(x, y) = (y - a)^3 - a^2(x - a) = 0$$

zufolge

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(y - a) = 0$$

den Wendepunkt (a, a) mit der Tangente $x = a$.

88. Die Übereinstimmung der in 87. entwickelten Differentialkriterien der Wendepunkte mit den von De Gua in 82. aufgestellten ergiebt sich aus dem in 75. als Gleichung (6) entwickelten zweiten vollständigen Differential

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot d^2 y \cdot$$

Demgemäfs ist für Wendepunkte

$$(1\text{a}) \qquad d^2 y = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0$$

und somit, da bei beliebiger Lage des Wendepunkts $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht verschwindet oder unendlich wird

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = 0$$

und daher auch das Integral

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

also besteht thatsächlich die von De Gua erstmals aufgestellte Bedingung einer gemeinschaftlichen Wurzel des nach seiner Methode gebildeten ersten (3) und zweiten Differentials (2).

Als Beispiel für den Nachweis der Übereinstimmung seiner Methode der Aufsuchung von Wendepunkten an beliebiger Stelle mit derjenigen von Leibniz bezw. De l'Hospital behandelt De Gua die verlängerte Cycloide, deren Differentialgleichung lauten möge

$$(3\text{a}) \qquad (7a - 3x)\, dx - 3\sqrt{2ax - x^2}\, dy = 0.$$

Nach De Gua ist somit

$$(4) \qquad - 3\,dx^2 - 3 \cdot \frac{2a - 2x}{2\sqrt{2\,ax - x^2}}\,dx\,dy = 0$$

oder da gemäfs der Voraussetzung dx endlich ist

$$(4\,\mathrm{a}) \qquad \sqrt{2\,ax - x^2}\,dx + (a - x)\,dy = 0$$

und somit durch Elimination von dx und dy aus (3a) und (4a)

$$\frac{\sqrt{2\,ax - x^2}}{x - a} = \frac{7\,a - 3\,x}{3\sqrt{2\,ax - x^2}},$$

woraus

$$x = \frac{7}{4}\,a.$$

Nach De l'Hospital erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7\,a - 3\,x}{3\sqrt{2\,ax - x^2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-3\sqrt{2\,ax - x^2} - \dfrac{(7\,a - 3\,x)(2\,a - 2\,x)}{2\sqrt{2\,ax - x^2}}}{2\,ax - x^2} = 0,$$

somit

$$3\,(2\,ax - x^2) + (7\,a - 3\,x)(a - x) = 0,$$

woraus

$$x = \frac{7}{4}\,a.$$

Verschwindet $\frac{\partial f}{\partial y}$, was nicht blofs bei Rückkehrpunkten, sondern bei sämtlichen mehrfachen Punkten, ferner bei den schon oben (vgl. 87.) untersuchten Oval- und Wendepunkten statt hat, deren Tangenten der Ordinatenaxe parallel sind, so folgt aus dem vollständigen zweiten Differential (1), dafs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 = 0$$

und somit der aus (1) berechnete Wert für d^2y, nämlich

$$(1\,\mathrm{a}) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{0}{0}$$

d. h. unbestimmt, worin sich eben die Allgemeinheit des De Gua'schen Kriteriums ausdrückt, dafs es ein allen Arten von Doppelpunkten gemeinsames Kriterium ist. Um den Wert des Bruches (1a) für die einzelnen Fälle des Doppelpunkts zu ermitteln, benützt De Gua drei besondere Kurven dritter Ordnung, nämlich mit

1. Doppelpunkt im Ursprung:

$$x^3 + a\,(x^2 - y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2 + 2\,ax \qquad\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x + 2\,a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ay = \pm 2ax\sqrt{1+\frac{x}{a}} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x+2a}{2a\sqrt{1+\frac{x}{a}}}\Bigg|_{x=0} = \pm 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a.$$

Da der unbestimmte Bruch (1a) seinen Wert durch Division des Zählers mit dx^2 nicht ändert, so ist der Zähler desselben

$$Z = 6x + 2a - 2a(\pm 1)^2 = 6x$$

und da

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Bigg|_{x=0} = \pm 2ax$$

so folgt

$$d^2y = \pm \frac{6x}{2ax} = \pm \frac{3}{a} \quad \text{d. h. endlich.}$$

2. Rückkehrpunkt im Ursprung:

$$x^3 - a(x+y)^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2a(x+y) = 3x^2 - 2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2a(x+y) = -2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2a$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{-2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=0} = -\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = -1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

somit

$$Z = (6x - 2a) - 4a(-1) - 2a(-1)^2 = 6x$$

und daher

$$d^2y = \frac{6x}{-2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3}{\sqrt{a}\cdot x^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{x=0} = \infty$$

in Übereinstimmung mit der Forderung von Leibniz bezw. De l'Hospital.

3) Isoliertem Punkt im Ursprung:

$$x^3 - a(x^2 + y^2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2ax \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ay = \pm 2ax\sqrt{\frac{x}{a} - 1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x - 2a}{\pm 2a\sqrt{\frac{x}{a} - 1}}\Bigg|_{x=0} = \pm\sqrt{-1} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2a$$

somit

$$Z = (6x - 2a) - 2a\left(\pm\sqrt{-1}\right)^2 = 6x$$

und da

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=0} = \pm 2\,ax\sqrt{-1}$$

so folgt

$$d^2y = \frac{6\,x}{\pm 2\,ax\sqrt{-1}} = \frac{3\sqrt{-1}}{a} \text{ d. h. imaginär.}$$

Hiermit stellt also De Gua mit Hilfe der eigenen Differentialmethode die Kriterien für die Doppelpunkte im nächst höheren zweiten Differential d^2y auf, wobei sich in Übereinstimmung mit der Subtangentenmethode zeigt, dafs d^2y nur im Fall der Koinzidenz der Tangenten unendlich wird. Um also die Art eines aus $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ bestimmten mehrfachen Punkts einer Kurve $f(x, y) = 0$ festzustellen, ist zu untersuchen, ob für diesen Punkt $\frac{d^2y}{dx^2}$ endlich, unendlich oder imaginär wird, dem entsprechend ist der Punkt ein gewöhnlicher Doppel-, ein Rückkehr- oder ein isolierter Punkt. Wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ ebenfalls unbestimmt, so giebt das dritte Differential d^3y den Entscheid, da es sich alsdann um einen dreifachen Punkt handelt, in welcher Weise möge im Folgenden nur für die höchste Singularität des dreifachen Punkts durchgeführt werden. Jedenfalls zeigt die vorstehende kurze, auf wenige ausgezeichnete Punkte beschränkte differentielle Untersuchung, dafs, wenn schon die auf d^2y gegründeten Kriterien grofse Schwierigkeiten zu überwinden bieten, vollends, sobald es sich um implizite Funktionen höherer Ordnung handelt, die übersichtlichen eindeutigen und hinreichenden Kriterien De Guas, die (vgl. 55 und 73 ff.) für jeden beliebigen vorliegenden Fall nach analytischer Methode rasch aufgestellt werden können, den Vorzug verdienen.

Spitzpunkt und Flachpunkt.

89. Die Unvollständigkeit und Zweideutigkeit der von Maupertuis (vgl. 9.) für Spitz- und Flachpunkt aufgestellten Differentialkriterien zeigt De Gua mittels der Subtangentenkurve.

Da im Spitzpunkt drei Tangenten sich vereinigen, so gehören zur Abscisse des Spitzpunkts drei gleiche Subtangenten, die, beliebige Lage des Spitzpunkts vorausgesetzt, weder Maxima noch Minima sind. Dem Spitzpunkt entspricht daher ein Wendepunkt der Subtangentenkurve, dessen Ordinate Tangente ist, somit bestehen gemäfs 87. die Bedingungen

$$d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = \infty \qquad \text{und} \qquad d^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = \infty$$

oder

$$(1) \qquad d^2y = \infty \qquad \text{und} \qquad d^3y = \infty$$

aus welchen sich zusammen mit der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ die Spitzpunkte derselben ermitteln. Voraussetzung ist dabei noch, daſs für einen solchen Punkt d^2y, analog $\frac{du}{dx}$, von der Ordnung des Exponentialbruchs $\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ unendlich wird.

Schneidet eine gewöhnliche Tangente die geg. Kurve beiderseitig in noch je einem Punkt und vereinigen sich diese beiden Punkte mit dem Berührungspunkt der Tangente, so entsteht der Flachpunkt. Vom Berührungspunkt aus gerechnet ändert daher nach beiden Seiten hin, auf Grund dieser Entstehung, die Tangente erst beim übernächsten Punkt ihre Richtung d. h. zu drei unendlich wenig verschiedenen Abscissen gehört nur eine Subtangente oder: dem Flachpunkt entspricht ein Wendepunkt der Subtangentenkurve mit einer zur Abscissenaxe parallelen Tangente, wofür gemäſs 87. die Bedingungen lauten

$$d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = 0 \qquad \text{und} \qquad d^2\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) = 0$$

oder

$$(2) \qquad d^2y = 0 \qquad \text{und} \qquad d^3y = 0$$

welches Ergebnis auch aus der Überlegung folgt, daſs die Ordinaten von vier konsekutiven Kurvenpunkten, nämlich

$$\begin{aligned} &y \\ &y + dy \\ y + dy + d(y + dy) = {}&y + 2\,dy + d^2y \\ y + 2\,dy + d^2y + d(y + 2\,dy + d^2y) = {}&y + 3\,dy + 3\,d^2y + d^3y, \end{aligned}$$

wenn diese Punkte auf einer Geraden, der Tangente, liegen sollen, dem Proportionallehrsatz zufolge eine arithmetische Reihe $y, y + dy, y + 2\,dy, y + 3\,dy$ bilden müssen, was nur möglich ist, wenn gleichzeitig

$$(2) \qquad d^2y = 0 \qquad \text{und} \qquad d^3y = 0.$$

Die Existenz eines jeden aus den Gleichungen (2) und der Gleichung der Kurve $f(x, y) = 0$ bestimmten Flachpunkts ist somit an eine Bedingung zwischen den Koeffizienten der gegebenen Gleichung geknüpft.

IV. Abschnitt.

Übungen.

Untersuchung der Kurven dritter Ordnung $y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$.

Verhalten im Ursprung.

90. Man erhält

für $x = 0$ drei gleiche Werte $y = 0$

„ $y = 0$ drei verschiedene Werte $x(x^2 - ax + b^2) = 0$

d. h. der Ursprung ist ein Wendepunkt mit der Ordinatenaxe als Tangente. Die Abscissenaxe schneidet die Kurve aufser im Ursprung noch in zwei weiteren reellen Punkten falls $a^2 > 4b^2$.

Mehrfache Punkte.

91. Eine Kurve dritter Ordnung kann höchstens einen Doppelpunkt besitzen. Derselbe ergiebt sich aus

$$f(x, y) = y^3 - x(x^2 - ax + b^2) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \quad 3x^2 - 2ax + b^2 = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \quad 3y^2 = 0 \tag{3}$$

welches System sich reduziert auf

$$x(x^2 - ax + b^2) = 0$$
$$3x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

woraus entweder oder

$$(4) \quad \begin{Bmatrix} 3x^2 - 2ax + b^2 = 0 \\ x = 0 \end{Bmatrix} \qquad (5) \quad \begin{Bmatrix} 3x^2 - 2ax + b^2 = 0 \\ x^2 - ax + b^2 = 0 \end{Bmatrix}$$

Der erste Fall ist nur möglich, wenn $b = 0$, alsdann verschwindet der Wendepunkt, an seine Stelle tritt ein Doppelpunkt mit zwei zusammenfallenden Tangenten $x^2 = 0$ d. h. ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente die Ordinatenaxe ist.

Im zweiten Fall ergiebt sich der Doppelpunkt als gemeinschaftliche Wurzel zweier quadratischer Gleichungen (5). Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden der Resultante dieser Gleichungen, die sich berechnet aus

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x^2 - ax + b^2 & 3x^2 - 2ax + b^2 & 3 & \\
 & 3x^2 - 3ax + 3b^2 & & \\
\hline
 & ax - 2b^2 & x^2 - ax + b^2 & \frac{x}{a} + \frac{1}{a}\left(\frac{2b^2}{a} - a\right) \\
 & & x^2 - \frac{2b^2}{a}x & \\
\hline
 & & \left(\frac{2b^2}{a} - a\right)x + b^2 & \\
 & & \left(\frac{2b^2}{a} - a\right)x - \frac{2b^2}{a}\left(\frac{2b^2}{a} - a\right) & \\
\hline
\end{array}$$

zu

$$\frac{4b^4}{a^2} - b^2 = 0$$

oder

(6) $$b^2(2b + a)(2b - a) = 0$$

Hieraus folgt:

1) für $b = 0$ geht der letzte Divisor $ax - 2b^2 = 0$, der die gemeinschaftliche Wurzel der Gleichungen (5) darstellt, über in $ax = 0$, woraus entweder $x = 0$ d. h. der erste Fall (4) oder $a = 0$, woraus

$$y^3 = x^3$$

oder

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) = 0$$

also ein Zerfallen der Kurve in eine Gerade und einen auf ihr liegenden isolierten Punkt I. Art. Es ist somit nur möglich

2) dafs $\quad 2b \pm a = 0 \quad$ oder $\quad a = \pm 2b$

und daher die gemeinschaftliche Wurzel aus

$$ax - \frac{2a^2}{4} = 0 \qquad \text{zu} \qquad x = \frac{a}{2}.$$

In beiden Fällen $\pm 2b$ ergiebt sich derselbe Punkt der Abscissenaxe als Doppelpunkt. Die Tangenten desselben bestimmen sich aus dem zweiten De Gua'schen Differential

$$6y\,dy^2 + (2a - 6x)\,dx^2 = 0 \qquad \text{für } x = \frac{a}{2},\ y = 0$$

zu

$$dx^2 = 0$$

d. h. zwei mit der Ordinatenaxe zusammenfallende Tangenten, also ein Rückkehrpunkt.

Wendepunkte.

92. Eliminiert man $\frac{dy}{dx}$ als gemeinschaftliche Wurzel des ersten und zweiten Differentials nach De Gua aus

$$(7) \qquad d_1 \equiv 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - (3x^2 - 2ax + b^2) = 0$$

$$(8) \qquad d_2 \equiv 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (a - 3x) \qquad = 0$$

entweder mittels der Staffelrechnung oder durch Einsetzen des Werts aus (7) in (8), so folgt

$$(9) \qquad y\,[3y^3(3x - a) - (3x^2 - 2ax + b^2)] = 0$$

woraus entweder

a) $\qquad y = 0$

und somit wegen (1) $\qquad 0 = x(x^2 - ax + b^2)$

also aufser dem Ursprung zwei weitere reelle Wendepunkte auf der Abscissenaxe unter der Voraussetzung $a^2 > 4b^2$; oder mit Berücksichtigung von (1)

b) $\qquad 3(x^3 - ax^2 + b^2x)(3x - a) - (3x^2 - 2ax + b^2)^2 = 0$

vereinfacht

$$(10) \qquad (a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 = 0,$$

eine quadratische Gleichung, deren Diskriminante

$$b^4(12b^2 - 3a^2) \lesseqgtr 0$$

je nachdem $a^2 \gtrless 4b^2$ d. h. werden im Fall a) die beiden aufserhalb des Ursprungs liegenden Wendepunkte der Abscissenaxe imaginär, so erhält man hierfür aus (10) die reellen Abscissen zweier anderer Wendepunkte. Um zu untersuchen, ob diese neuen Wendepunkte ebenfalls imaginär sind, oder reell werden können, hat man ihre Ordinaten y zu berechnen. Dies geschieht durch Elimination von x aus dem System

$$(10) \qquad (a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 = 0$$

$$(1) \qquad x^3 - ax^2 + b^2x - y^3 = 0$$

nach dem Kettenbruchverfahren wie folgt:

$$(a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 \left| \begin{array}{l} x^3 - ax^2 + b^2x - y^3 \\ x^3 - \frac{ab^2}{a^2 - 3b^2}x^2 + \frac{b^4}{a^2 - 3b^2}x \end{array} \right| \frac{x}{a^2 - 3b^2} + \frac{a(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}$$

$$\overline{a \cdot \frac{4b^2 - a^2}{a^2 - 3b^2}x^2 + \frac{b^2(a^2 - 4b^2)}{a^2 - 3b^2}x - y^3}$$

$$a \cdot \frac{4b^2 - a^2}{a^2 - 3b^2}x^2 - \frac{a^2b^2(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}x + \frac{ab^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}$$

$$\overline{\frac{3b^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2}x - \left(\frac{ab^4(4b^2 - a^2)}{(a^2 - 3b^2)^2} + y^3\right)} \text{ geht in}$$

$$\left| \begin{array}{l} (a^2 - 3b^2)x^2 - ab^2x + b^4 \\ (a^2 - 3b^2)x^2 - \left(\cdots\right)\frac{(a^2 - 3b^2)^3 \cdot x}{3b^4(4b^2 - a^2)} \end{array} \right| \frac{(a^2 - 3b^2)^3 x}{3b^4(4b^2 - a^2)} + \left\{\cdots\right\}\frac{(a^2 - 3b^2)^2}{3b^4(4b^2 - a^2)}$$

$$\left\{\frac{a(a^2-6b^2)}{3}+\frac{(a^2-3b^2)^3y^3}{3b^4(4b^2-a^2)}\right\}x+b^4$$

$$(11)\quad \frac{\left\{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right\}x-\left(\frac{ab^4(4b^2-a^2)}{(a^2-3b^2)^2}+y^3\right)\cdot\left\{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right\}\cdot\frac{(a^2-3b^2)^2}{3b^4(4b^2-a^2)}}{b^4+\left(\frac{ab^4(4b^2-a^2)}{(a^2-3b^2)^2}+y^3\right)\cdot\left\{\frac{a(a^2-6b^2)}{3}+\frac{(a^2-3b^2)^3}{3b^4(4b^2-a^2)}\cdot y^3\right\}\cdot\frac{(a^2-3b^2)^2}{3b^4(4b^2-a^2}}=0$$

oder durch Reduktion

$$\frac{9b^8(4b^2-a^2)+a^2b^4(4b^2-a^2)(a^2-6b^2)}{3(a^2-3b^2)^2}+\frac{a}{3}(a^2-6b^2)y^3+\frac{a}{3}(a^2-3b^2)y^3$$
$$+\frac{(a^2-3b^2)^3}{3b^4(4b^2-a^2)}y^6=0,$$

woraus schliefslich

$$(11\text{a})\quad b^8(4b^2-a^2)^2+ab^4(4b^2-a^2)(2a^2-9b^2)y^3+(a^2-3b^2)^3\cdot y^6=0$$

d. h. eine in y^3 quadratische Gleichung, die höchstens zwei reelle Wurzeln liefert und da die Kubikwurzeln der letzteren, d. h. die Ordinaten y, selbst wieder reell sind, so folgt, dafs die geg. Kurve dritter Ordnung endliche reelle Wendepunkte höchstens in der Zahl drei besitzt, einer derselben liegt stets im Ursprung.

Mittelpunkte.

93. Sie bestimmen sich gemäfs 30. aus

$$(1)\qquad f(x,y)=y^3-(x^3-ax^2+b^2x)=0$$

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2a-6x=0$$

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=by\qquad =0$$

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

zu $x=\frac{a}{3}$, $y=0$, welche Werte in (1) eingesetzt, die Bedingung ergeben

$$(15)\qquad a(9b^2-2a^2)=0$$

also entweder $a=0$, womit auch $x=0$ d. h. der Ursprung ist Mittelpunkt oder $2a^2=9b^2$, dann bleibt $x=\frac{a}{3}$, der Mittelpunkt liegt alsdann auf der Abscissenaxe.

Unendliche Zweige.

94. Da das Aggregat der Glieder höchster Ordnung

$$y^3-x^3=0$$

eine einzige reelle Wurzel $y-x=0$ besitzt, so hat die Kurve auch nur ein Paar hyperbolische Zweige in der Richtung $y=x$. Soll die Asymptote durch den Ursprung gehen, so mufs $y-x=0$ eine Wurzel des nächst

niederen Aggregats sein, was nur möglich ist, wenn $a = 0$ wird, b aber endlich bleibt, da sonst die Kurve zerfällt. Die Annäherung der Kurve an die Asymptote erfolgt alsdann gemäfs 40. a nach Art der konischen Hyperbel.

Um die Lage der Asymptote, deren Richtung $y = x$ ist, zu ermitteln, verlegt man den Ursprung in den Schnittpunkt $(0, q)$ der Asymptote mit der Ordinatenaxe, weil alsdann nur y zu ändern ist. Dies geschieht mittels der Transformation

$$y' = y - q \qquad \text{oder} \qquad y = q + y',$$

womit die Gleichung der Kurve, wenn die neue Ordinate y' wieder mit y bezeichnet wird, übergeht in

$$(y + q)^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$$

oder nach Aggregaten geordnet

$$(16) \qquad \varphi(x, y) \equiv y^3 - x^3 + 3qy^2 + ax^2 + 3q^2y - b^2x + q^3 = 0.$$

Soll also die Asymptote durch den neuen Ursprung gehen, so mufs $y = x$ eine Wurzel des Aggregats zweiter Dimension sein, somit

$$(17) \qquad 3qx^2 + ax^2 = 0, \qquad \text{woraus} \qquad q = -\frac{a}{3}$$

d. h. die Asymptote schneidet die Ordinatenaxe in der Entfernung $-\frac{a}{3}$ vom alten Ursprung.

Hat auch noch das folgende Aggregat die Wurzel $y = x$, ist also

$$(18) \qquad \frac{3a^2}{9}x - b^2x = 0 \qquad \text{woraus} \qquad a^2 - 3b^2 = 0,$$

so wird unter dieser Bedingung die Asymptote zur Wendeasymptote, die zu ihr parallele Sehnenschar besitzt daher einen Durchmesser nach Art der Kegelschnitte, da jede Sehne der Schar die Kurve nur noch in zwei endlichen Punkten schneidet (vgl. 29.). Letzteres Ergebnis folgt auch, wenn die Ordinatenaxe um den neuen Ursprung gedreht wird, bis sie mit der Asymptote zusammenfällt, wobei (16) übergeht in

$$F(z, u) = \varphi(x, y) + \frac{1}{1!}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}dx^3,$$

wo an Stelle von x, y, dx, q die Werte $nu, nu, z, -\frac{a}{3}$ zu setzen sind $\left(m = n \text{ weil } \frac{x}{y} = 1\right)$, somit

$$F(z, u) = nu^3 - anu^2 + \frac{a^2}{3}nu - \frac{a^3}{27} - nu^3 + anu^2 - b^2n \cdot u$$
$$+ (-3n^2u^2 + 2anu - b^2)z + \frac{1}{2}(-6nu + 2a)z^2 + \frac{1}{6}(-6)z^3$$
$$(19) \qquad = 3n^2 \cdot zu^2 + \left(3nz^2 - 2anz + n \cdot \frac{3b^2 - a^2}{3}\right)u + z^3 - az^2 + b^2z + \frac{a^3}{27},$$

woraus für $z = 0$ sich ergiebt

$$\frac{n}{3}(3b^2 - a^2)\,u + \frac{a^3}{27} = 0$$

d. h. zwei Schnittpunkte fallen naturgemäfs ins Unendliche und der dritte

$$u = -\frac{a^3}{9n(3b^2 - a^2)}$$

ebenfalls, sobald

$$(18) \qquad 3b^2 - a^2 = 0.$$

Ist aber $a = 0$, so folgt $u = 0$ d. h. die Asymptote geht durch den Ursprung in Übereinstimmung mit 94, oben.

Klassifikation.

95. Nach den von Newton in der Enumeratio gemachten Angaben, die später zuerst von Stirling, dann von Nicole bewiesen wurden (siehe Abschnitt I), läfst sich durch geeignete Wahl des Koordinatensystems die Gleichung einer beliebigen Kurve dritter Ordnung auf eine der vier Normalformen bringen

$$\text{I.} \quad xy^2 + y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\text{II.} \quad xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\text{III.} \quad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$\text{IV.} \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

(vgl. hierzu 114 ff.). Nun hat die Gleichung (19) der auf eine ihrer Asymptoten als Ordinatenaxe bezogenen vorliegenden Kurve dritter Ordnung

$$F(z, u) = 3n^2 \cdot zu^2 + 3n \cdot z^2u - 2an \cdot zu + \frac{(3b^2 - a^2)\,n}{3}u + z^3 - az^2 + b^2z + \frac{a^3}{27}$$

bereits eine Form, die der Normalform I am nächsten kommt, da somit, wenn die bestehende teilweise Übereinstimmung nicht gestört werden soll, nur noch zwei Bestimmungen über die Lage des Koordinatensystems beliebig getroffen werden dürfen, nämlich eine Verschiebung des Ursprungs auf der Ordinatenaxe und eine Drehung der Abscissenaxe Z, so wird man, um die vollständige Übereinstimmung mit der Normalform I zu erreichen, jene Verschiebungs- und Drehungswinkelgröfse so wählen, dafs die Glieder z^2u und zu verschwinden. Geht man daher (siehe Fig. 69) mittels

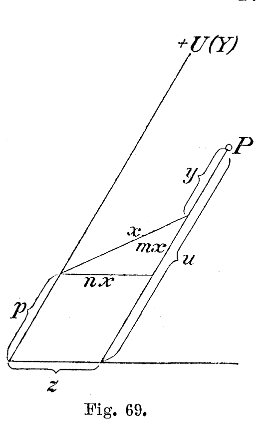


Fig. 69.

$$u = p + y + mx \qquad \text{und} \qquad z = nx$$

zu den neuen Koordinaten x, y über, so lautet mit $(p + y)$, nx, mx an Stelle von u, z, du die transformierte Gleichung

$$\Phi(x, y) = F(z, u) + \frac{1}{1!}\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} du^3,$$

wobei

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 6n^2 \cdot zu + 3nz^2 - 2anz + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^3} = 6n^2 \cdot z$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} = 0,$$

somit

$$\Phi(x, y) = 3n^2x(p + y)^2 + 3n^3x^2(p + y) - 2an^2x(p + y)$$
$$+ n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)(p + y) + n^3x^3 - an^2x^2 + b^2nx + \frac{a^3}{27}$$
$$+ \left(6n^3x(p + y) + 3n^3x^2 - 2an^2x + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right) mx$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot 6n^3m^2x^3$$

$$(20) \quad = 3n^3xy^2 + 3n^3(1 + 2m)x^2y + 2n^2(3pn - a)xy + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)y$$
$$+ n^3(1 + 3m + 3m^2)x^3 + n^2(3np - a + 6mnp - 2am)x^2$$
$$+ n\left(3n^2p^2 - 2anp + b^2 + m\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right)x + n\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)p + \frac{a^3}{27}$$

und daher

$$3n^3(1 + 2m) = 0 \qquad \text{und} \qquad 2n^2(3pn - a) = 0$$

woraus die einzig möglichen Werte

$$m = -\frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad p = \frac{a}{3n}$$

mit welchen die transformierte Gleichung (20) übergeht in

$$\Phi(x, y) \equiv xy^2 + \frac{3b^2 - a^2}{9n^2}y + \frac{1}{12}x^3 + \frac{3b^2 - a^2}{18n^2}x + \frac{a(9b^2 - 2a^2)}{81n^3} = 0$$

oder

$$(21) \quad xy^2 + \frac{3b^2 - a^2}{9n^2}y = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{a^2 - 3b^2}{18n^2}x + \frac{a(2a^2 - 9b^2)}{81n^3}.$$

Da das Glied x^3 in (21) unabhängig sowohl von den Koeffizienten der geg. Gleichung (1) wie von n stets negativ ist, so sind (vgl. Opuscula Newtoni Enumeratio, pag. 258. 5) sämtliche durch Variation der Konstanten a und b entstehenden Kurven dritter Ordnung

$$(1) \qquad y^3 = x^3 - ax^2 + b^2x$$

defektive Hyperbeln dritter Ordnung d. h. Hyperbeln, die zum Unterschied gegen die konische Hyperbel nur eine einzige Asymptote besitzen, die entweder gewöhnliche Asymptote oder Wendeasymptote sein kann.

Die Kassinoide

(1) $$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0.$$

Ursprung und Axen.

96. Da x und y nur im Quadrat vorkommen, so erhält man für jedes beliebige x bezw. y zwei Wertepaare $\pm y$ bezw. $\pm x$ d. h. die Kurve liegt zu beiden Axen symmetrisch. Wegen des fehlenden Zeichenwechsels in der nach y^2 geordneten Gleichung

(1a) $$y^4 + 2(b^2 + x^2)y^2 + x^4 - 2b^2x^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

sind jedoch die beiden zu einem bestimmten x gehörigen Werte y^2 von entgegengesetztem Zeichen, von den vier Wurzeln y selbst sind also nur zwei reell, die beiden anderen imaginär d. h. die Parallelen zur Ordinatenaxe schneiden die Kurve stets nur in zwei zur Abscissenaxe symmetrischen Punkten.

$y = 0$ giebt aus $x^4 - 2b^2x^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$

die vier Wurzeln $x_{1,2} = \pm a \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{2b^2 - a^2}$,

man erhält also vier bezw. zwei symmetrisch liegende Schnittpunkte auf der Abscissenaxe, je nachdem $a^2 \lesseqgtr 2b^2$; ist $a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so fallen zwei der vier Schnittpunkte in den Ursprung, letzterer ist also ein Doppelpunkt und ist $a^2 = b^2$, so liegen auf der Abscissenaxe zwei zum Ursprung symmetrische Punkte I. Art $(\pm a, 0)$.

Ordnet man die geg. Gleichung nach x, also

(1b) $$x^4 + 2(y^2 - b^2)x^2 + y^4 + 2b^2y^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

so zeigt sich je nach dem Wert von y ein Zeichenwechsel oder nicht d. h. die beiden Wurzeln x^2 können sowohl gleiches als entgegengesetztes Vorzeichen haben m. a. W. die Parallelen zur Abscissenaxe treffen die Kurve entweder in vier reellen oder vier imaginären oder zwei reellen und zwei imaginären Punkten.

$x = 0$ giebt aus $y^4 + 2b^2y^2 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$

die vier Wurzeln $y_{1,2} = \pm a\sqrt{-1} \qquad y_{3,4} = \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}$,

man erhält also, und zwar unter der Voraussetzung $a^2 > 2b^2$ nie mehr als zwei reelle zum Ursprung symmetrische Schnittpunkte auf der Ordinaten-

axe; ist $a^2 < 2b^2$, so schneidet die Kurve die Ordinatenaxe überhaupt nicht und ist $a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so fallen die beiden reellen Schnittpunkte in den Ursprung, letzterer ist alsdann ein Doppelpunkt (siehe oben). Man erhält demnach zunächst folgende gestaltliche Verschiedenheiten der vorliegenden Kurve:

$a^2 < 2b^2$, so schneiden die Parallelen zur Abscissenaxe die Kurve in je vier Punkten, die Kurve besteht somit aus zwei getrennten Ovalen ohne Wendepunkte, jedes von der auf der Abscissenaxe gemessenen Länge $\pm a \mp \sqrt{2b^2 - a^2}$ (Fig. 70).

$a^2 = b^2$, so wird diese Länge null d. h. die Kurve besteht nur noch aus zwei isolierten Doppelpunkten $(\pm a, 0)$.

$a^2 = 2b^2$ oder $a = 0$, so vereinigen sich die Ovale zu einer Lemniskate mit Doppelpunkt im Ursprung, siehe 97.

$a^2 > 2b^2$, so verschwindet die Lemniskate und die Kurve wird zu einem Oval mit vier Wendepunkten, siehe 99.

Doppelpunkte.

97. Gemäfs dem Vorhergehenden tritt ein Doppelpunkt im Ursprung auf, sobald $2b^2 = a^2$ oder $a = 0$, die entstehende Lemniskate hat alsdann die Gleichung

$$y^4 + 2y^2x^2 + x^4 + 2b^2(y^2 - x^2) = 0. \tag{2}$$

Die Tangenten des Doppelpunkts ergeben sich aus dem Aggregat der Glieder zweiter Ordnung zu

$$(x - y)(x + y) = 0,$$

jeder dieser Faktoren kann aber zugleich als Wurzel des fehlenden Aggregats der Glieder dritter Dimension betrachtet werden, daher sind die Winkelhalbierenden des Axenkreuzes Wendetangenten des Doppelpunkts im Ursprung.

Nach dem allgemeinen Verfahren erhält man die Doppelpunkte aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 - b^2) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2 + b^2) = 0 \tag{4}$$

$x = 0$ in (3) giebt aus (4) entweder $y = 0$ oder $y = \pm b\sqrt{-1}$

$x = \pm\sqrt{b^2 - y^2}$ in (3) giebt aus (4) $y = 0$ oder $b = 0$, allein für $b = 0$ würde aus der geg. Gleichung folgen $x^2 + y^2 = 0$, was unmöglich ist.

$y = 0$ in (4) giebt aus (3) entweder $x = 0$ oder $x = \pm b$.

$y = \pm\sqrt{-b^2 - x^2}$ in (4) kommt als imaginär nicht in Betracht.



Daher kann es sich nur um zwei Fälle handeln, den Ursprung und die Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe.

1. Für den Ursprung folgt aus der geg. Gleichung (1)

$$a^2(2b^2 - a^2) = 0$$

d. h. die Bedingung, unter welcher der Ursprung Doppelpunkt wird, ist entweder $2b^2 = a^2$ oder $a = 0$.

2. Für die Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe folgt als Doppelpunktsbedingung aus (1) in Übereinstimmung mit dem Früheren

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad a^2 = b^2.$$

Zur Feststellung der Art der gefundenen Doppelpunkte dient das zweite Differential nach De Gua. Es ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 - b^2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + b^2)$$

daher

$$(5) \quad d_2 \equiv (x^2 + 3y^2 + b^2)\,dy^2 + 4xy\,dx\,dy + (3x^2 + y^2 - b^2)\,dx^2 = 0,$$

woraus für

$$(5\text{a}) \quad x = \pm b,\ y = 0 \cdots\cdots dx^2 + dy^2 = 0 \quad \text{d. h. konjugierte Punkte}$$

$$(5\text{b}) \quad x = 0, \quad y = 0 \cdots\cdots dx^2 - dy^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

d. h. der Ursprung ist im letzteren Fall ein wirklicher Doppelpunkt mit den Winkelhalbierenden des Axenkreuzes als Tangenten.

Da in (1) Glieder dritter Dimension nicht auftreten, so wird man auch das dritte Differential d_3 auf die Wurzeln $\frac{dy}{dx}$ untersuchen. Es ist

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 24x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 8y \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 8x \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24y$$

somit

$$d_3 = x\,dx^3 + y\,dx^2 dy + x\,dx\,dy^2 + y\,dy^3,$$

welche Gröfse für $x = 0$, $y = 0$ identisch verschwindet, die Wurzeln (5b) von d_2 können daher auch als Faktoren von d_3 betrachtet werden d. h. die beiden Tangenten des Ursprungs sind Wendetangenten;

$$\text{für } x = \pm b,\ y = 0 \text{ wird } d_3 = 24b\,(dx^2 + dy^2)\,dx,$$

also sind auch für diese beiden Punkte die Wurzeln (5a) von d_2 zugleich Wurzeln von d_3, die isolierten Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe können daher als Schnittpunkte je zweier imaginär konjugierter Wendetangenten betrachtet werden und da

$$d_4 = 24\,dy^4 + 48\,dx^2 dy^2 + 24\,dx^4 = 24\,(dx^2 + dy^2)^2$$

so sind für diese Punkte die Wurzeln von d_2 sogar noch Wurzeln von d_4. Würde man also mittels der Taylorschen Reihe und den Werten $\pm b, 0, z, u$ an Stelle von x, y, dx, dy die Gleichung der vorliegenden Kurve auf einen der beiden Punkte $\pm b$ der Abscissenaxe als neuen Ursprung beziehen, so ließe sich die transformierte Gleichung, da das konstante Glied und das erste Differential, letzteres identisch, verschwinden, mit $z^2 + u^2 (\equiv dx^2 + dy^2)$ durchdividieren d. h. die transformierte Gleichung spaltet sich in zwei quadratische Faktoren oder die vorliegende Kurve zerfällt in zwei Kegelschnitte. Thatsächlich geht (1) für $a^2 = b^2$ über in

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 + 2b^2(y^2 - x^2) + b^4$$
$$\equiv (x^2 + y^2 + 2bx + b^2)(x^2 + y^2 - 2bx + b^2),$$

die Kurve zerfällt also in zwei Kreise vom Halbmesser 0 mit den Mittelpunkten $\pm b$ auf der Abscissenaxe oder in vier imaginär konjugierte Gerade

$$y = \pm (x + b)\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad y = \pm (x - b)\sqrt{-1}.$$

Da bei Herstellung der auf einen der Doppelpunkte $(\pm b, 0)$ als Ursprung bezogenen transformierten Gleichung das zweite Differential d_2 d. h. das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in (u, z) identisch verschwindet, wenn $b = 0$ ist, was $z = 0$, $u = 0$, $a = 0$ nach sich ziehen würde, so folgt, daß alsdann die Kurve im Ursprung einen dreifachen Punkt hätte, allein unter dieser Voraussetzung verschwindet auch d_3 identisch und die Gleichung der Kurve reduziert sich auf

$$(x^2 + y^2)^2 = 0$$

d. h. die Kurve wird zu einem isolierten vierfachen Punkt II. Art mit zwei zusammenfallenden Paaren imaginär konjugierter Tangenten.

Wendepunkte und Flachpunkte.

98. Bildet man die Bedingungsgleichungen, daß für Wendepunkte $\frac{dy}{dx}$, aus d_1 berechnet, eine Wurzel von d_2 und für Flachpunkte auch noch eine Wurzel von d_3 ist, so kommt, beginnend mit dem einfacheren d_3, durch Einsetzen von

$$dy = -\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = -x(x^2 + y^2 - b^2)\lambda \qquad dx = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + b^2)\lambda$$

$$\begin{aligned} d_3 \equiv & -xy^3(x^2+y^2+b^2)^3 + xy^3(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) \\ & - x^3y(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) + x^3y(x^2+y^2-b^2)^3 \\ = & -xy(x^2+y^2+b^2)\{y^2(x^2+y^2+b^2)^2 + x^2(x^2+y^2-b^2)^2\} \\ & + xy(x^2+y^2-b^2)\{y^2(x^2+y^2+b^2)^2 + x^2(x^2+y^2-b^2)^2\} \\ = & \, 2b^2xy\{y^2(x^2+y^2+b^2)^2 + x^2(x^2+y^2-b^2)^2\} \\ = & \, 2b^2xy\{y^2(x^2+y^2)^2 + x^2(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2+x^2)(y^2-x^2) + b^4(x^2+y^2)\} \end{aligned}$$

$$(6) \quad d_3 \equiv 2b^2xy(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} = 0$$

$$\begin{aligned}
d_2 &\equiv x^2(x^2+3y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2)^2 - 4x^2y^2(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) \\
&\qquad + y^2(3x^2+y^2-b^2)(x^2+y^2+b^2)^2 \\
&= x^2(x^2+b^2+y^2+2y^2)(x^2+y^2-b^2)^2 - 4x^2y^2(x^2+y^2+b^2)(x^2+y^2-b^2) \\
&\qquad + y^2(x^2+y^2-b^2+2x^2)(x^2+y^2+b^2)^2 \\
&= (x^2+y^2)\{x^2(x^2+y^2-b^2)^2 + y^2(x^2+y^2+b^2)^2\} \\
&\quad + b^2\{x^2(x^2+y^2-b^2)^2 - y^2(x^2+y^2+b^2)^2\} \\
&\quad + 2x^2y^2\{(x^2+y^2-b^2)^2 - 2(x^2+y^2-b^2)(x^2+y^2+b^2) + (x^2+y^2+b^2)^2\} \\
&= (x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} + b^2\{x^2(x^2+y^2)^2 \\
&\quad - 2b^2x^2(x^2+y^2) + b^4x^2 - y^2(x^2+y^2)^2 - 2b^2y^2(x^2+y^2) - b^4y^2\} + 8b^4x^2y^2 \\
&= (x^2+y^2)^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} \\
&\qquad + b^2x^2\{(x^2+y^2)^2 - 2b^2(x^2+y^2) + b^4 + 4b^2y^2\} \\
&\qquad - b^2y^2\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(x^2+y^2) + b^4 - 4b^2x^2\}
\end{aligned}$$

$$(7)\quad d_2 \equiv [(x^2+y^2)^2 + b^2(x^2-y^2)]\{(x^2+y^2)^2 + 2b^2(y^2-x^2) + b^4\} = 0.$$

Da der gemeinschaftliche Faktor beider Differentiale d_2 und d_3, die geschweifte Klammer, nach y^2 geordnet:

$$y^4 + 2(x^2+b^2)y^2 + (x^2-b^2)^2 = 0$$

wegen des fehlenden Zeichenwechsels für alle Werte von x nur negative Wurzeln y^2, also nur imaginäre Wurzeln y ergiebt, ausgenommen für $x^2 - b^2 = 0$ oder $x = \pm b$, in welchem Fall $y = 0$ und aus der Kurvengleichung (1) die Bedingung $a^2 = b^2$ folgt, so kommen als Flachpunkte nur die Punkte $(\pm b, 0)$ in Betracht, allein für diese Koordinaten verschwindet sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial y}$, die betreffenden Punkte erfüllen also Bedingungen, die den mehrfachen Punkten, nicht aber dem Flachpunkt als einfachem Kurvenpunkt zugehören: sie sind nach den obigen Untersuchungen isolierte Punkte I. Art. Die geschweifte Klammer liefert somit als Faktor von d_3 überhaupt keinen Flachpunkt. Von den übrigen Faktoren des Differentials d_3 würde $y = 0$ mit der eckigen Klammer in d_2 kombiniert den Ursprung als Flachpunkt ergeben unter der Bedingung $2b^2 - a^2 = 0$ oder $a^2 = 0$ gemäſs (1), dieser Punkt genügt jedoch wieder den Bedingungen mehrfacher Punkte, er ist gemäſs den Untersuchungen in 97. ein Doppelpunkt mit Wendetangenten. Da endlich die Faktoren $x^2 + y^2 = 0$ und $b^2 = 0$, der eckigen Klammer (6) zufolge, sich gegenseitig bedingen und gemäſs 97. einen vierfachen isolierten Punkt II. Art ergeben, so bleibt nur noch zu untersuchen, ob der letzte Faktor $x = 0$ des Differentials d_3 einen Flachpunkt bestimmt. Für diesen Wert folgt aus der eckigen Klammer (6) entweder $y = 0$ oder $y = \pm b$. Der erste Fall ist als ausgeschlossen bereits

erledigt. Im zweiten Fall dagegen verschwindet nur $\frac{\partial f}{\partial x}$, nicht $\frac{\partial f}{\partial y}$; die Punkte $(0, \pm b)$ der Ordinatenaxe sind somit thatsächlich Flachpunkte mit Tangenten parallel der Abscissenaxe, unter der aus (1) folgenden Bedingung

$$3b^4 + 2a^2b^2 - a^4 = 0$$

oder

$$(3b^2 - a^2)(a^2 + b^2) = 0$$

die sich, da $a^2 + b^2$ nie verschwinden kann, wenn die Kurvengleichung reelle Koeffizienten haben soll, reduziert auf

$$a^2 = 3b^2. \tag{7}$$

Die Kurve hat alsdann das Aussehen eines elliptischen Ovals ohne Wendepunkte (siehe unten).

99. Da die geschweifte Klammer in d_2 entweder imaginäre Punkte oder Doppelpunkte liefert, so bestimmen sich die Wendepunkte der geg. Kurve aus dem anderen Faktor von d_2 und der geg. Kurvengleichung, also aus

$$(x^2 + y^2)^2 + b^2(x^2 - y^2) = 0 \tag{7a}$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) + 2a^2b^2 - a^4 = 0 \tag{1}$$

d. h. wenn $x^2 = z$ und $y^2 = u$ gesetzt wird, analytisch als die Schnittpunkte zweier Parabeln

$$(z + u)^2 + b^2(z - u) = 0 \tag{7b}$$

$$(z + u)^2 - 2b^2(z - u) + 2a^2b^2 - a^4 = 0 \tag{8}$$

da in beiden Gleichungen (7b) und (8) die Diskriminante der Glieder höchster Dimension verschwindet. Berechnet man die Schnittpunkte direkt aus (7a) und (1) mit

$$x^2 + y^2 = v \qquad \text{und} \qquad x^2 - y^2 = w,$$

so folgt

$$x^2 = -\frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{6b^2} + \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} \tag{9}$$

$$y^2 = \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{6b^2} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} \tag{10}$$

daher besitzt die geg. Kurve

1. keine Wendepunkte, wenn $a^2 < 2b^2$: die Kurve besteht aus zwei getrennten Ovalen;

2. zwei Wendepunkte im Ursprung, wenn $a^2 = 2b^2$: die Kurve ist eine Lemniskate;

3. vier zu beiden Axen symmetrische Wendepunkte, wenn

$$\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} > \frac{a^2(a^2 - 2b^2)}{6b^2}$$

oder

$$3b^4 + 2a^2b^2 - a^4 > 0$$

oder

$$(3b^2 - a^2)(a^2 + b^2) > 0$$

oder da $a^2 + b^2$ stets positiv, also auch

$$3b^2 - a^2 > 0$$

d. h.

$$a^2 < 3b^2;$$

4. keine Wendepunkte, dafür zwei Flachpunkte, wenn $a^2 = 3b^2$, die Kurve bildet ein elliptisches Oval.

Vertauscht man in (7a) die Werte x und y d. h. bezieht man die durch (7a) dargestellte Kurve auf ein Koordinatensystem mit vertauschten Axen, so zeigt sich, daſs die neue Gleichung

$$(11) \qquad (x^2 + y^2)^2 - b^2(x^2 - y^2) = 0$$

einen Sonderfall der Gleichung (1) und zwar wegen $a = 0$ die Gleichung einer Lemniskate mit dem Parameter $\frac{b}{2}\sqrt{2}$ statt b darstellt. Die Wendepunkte der Kassinoide sind somit die Schnittpunkte mit einer zur Abscissenaxe der Kassinoide senkrecht gestellten Lemniskate.

Variation der Gestalt. (Fig. 70.)

100. Da a sowohl als b nur in gerader Potenz in (1) vorkommen, so hängt die Gestalt der Kassinoide auch nur von den absoluten Werten dieser beiden Konstanten ab. Auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen erleidet somit die Kassinoide für $a = 0$ bis ∞ folgende stetig in einander übergehende Verwandlungen:

Fig. 70.

$a = 0$ eine Lemniskate,
$a^2 < b^2$ zwei Ovale ohne Wendepunkte,
$a^2 = b^2$ zwei isolierte Punkte I. Art,
$a^2 > b^2$ die ursprünglichen Ovale ohne Wendepunkte,
$a^2 = 2b^2$ die ursprüngliche Lemniskate,
$a^2 > 2b^2$ ein Oval mit vier zu beiden Axen symmetrischen Wendepunkten, die zunächst einen gröſsten Abstand von der Ordinatenaxe erreichen, dann sich derselben wieder nähern,
$a^2 = 3b^2$ ein elliptisches Oval mit zwei durch Vereinigung je zweier Wendepunkte entstandenen Flachpunkten in den Schnittpunkten mit der Ordinatenaxe,
$a^2 > 3b^2$ ein elliptisches Oval ohne Wende- und ohne Flachpunkte,

$a^2 = \infty$ dann geht Gleichung (1), da Gröfsen, die von niederer Ordnung ∞ sind, gegen solche von höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, über in

$$(x^2 + y^2)^2 - a^4 = 0$$

oder

$$(x^2 + y^2 - a^2)(x^2 + y^2 + a^2) = 0$$

d. h. die Kassinoide zerfällt in zwei Kreise mit unendlich grofsen Halbmessern, der eine reell, der andere imaginär $\infty \sqrt{-1}$.

101. Um den genauen Wert von a^2 zu ermitteln, für welchen die Wendepunkte der Kassinoide eine gröfste Entfernung von der Ordinatenaxe haben, ist in dem Ausdruck (9) für x^2 die Gröfse a als variabel zu betrachten, dann wird x^2 und somit auch x ein Maximum, wenn

$$\frac{dx^2}{da} = \frac{-4a^3 + 4ab^2}{6b^2} + \frac{a^2}{6\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} = 0$$

oder

$$2(a^2 - b^2)\left(2a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} - b^2\right) = 0$$

somit, da $a^2 > 2b^2$ sein mufs (siehe 100.)

$$2a\sqrt{\frac{a^2 - 2b^2}{3}} - b^2 = 0$$

oder

$$4a^4 - 8a^2b^2 - 3b^4 = 0$$

woraus, da a^2 stets positiv ist, die eindeutige Bedingung sich ergiebt

$$a^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{7}\right)b^2$$

und daher der Maximalabstand der Wendepunkte von der Ordinatenaxe aus

$$(9)\quad x^2 = -\frac{b^2}{6}\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} - 1\right) + \frac{b^2}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{7} - 1\right)}$$

$$= -\frac{b^2}{8} + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{8}$$

zu $\quad x = \pm \frac{b}{4}\sqrt{2}.$

Untersuchung der Kurven vierter Ordnung:

(1) $\qquad y^4 - 6axy^2 - 8a^2y^2 + a^2x^2 = 0 \qquad$ und

(2) $\qquad x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$

102. De Gua behandelt die vorliegenden beiden Kurven vierter Ordnung nur zwecks der Untersuchung des gegenseitigen Verhaltens der sich

im Ursprung durchschneidenden Zweige in Bezug auf Konvexität und Konkavität. Hierzu benötigt er die parabolischen Näherungskurven im Ursprung, die sich bei der gegebenen Form der Gleichungen (1) und (2) aus dem analytischen Dreieck nicht oder nur teilweise bestimmen lassen, weshalb die Richtung der Koordinaten entsprechend zu ändern ist.

103. Ändert man bei der Kurve (1) die Richtung der Ordinaten durch die bekannte Transformation

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

so lautet unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6ay^2 + 2a^2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a^2 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$$

die Gleichung der transformierten Kurve (1a)

$$F(z,u) \equiv m^4u^4 - 6am^2n\cdot u^3 - a^2(8m^2 - n^2)u^2 - 2a(3m^2u^2 - anu)z + a^2z^2 = 0.$$

Berührt somit die Ordinatenaxe einen der Zweige des Ursprungs, der ein Doppelpunkt ist, da die Glieder niederster Ordnung von der zweiten Dimension sind, so müssen sich für $z = 0$ drei Werte $u = 0$ ergeben, das Glied u^2 mufs also verschwinden, daher

$$8m^2 - n^2 = 0,$$

woraus die Richtungen der Tangenten des Doppelpunkts

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

in Übereinstimmung mit dem, aus dem Aggregat niederster Dimension von (1)

$$a^2x^2 - 8a^2y^2 = 0$$

sich bestimmenden Tangentenpaar des Doppelpunkts im Ursprung

$$(x - 2\sqrt{2}\cdot y)(x + 2\sqrt{2}\cdot y) = 0.$$

Gleichung (1a) auf das analytische Dreieck gelegt ergiebt, dafs die Kurve sich im Ursprung verhält wie

$$2a^2n\cdot zu - 6anm^2\cdot u^3 = 0$$

oder

$$u(az - 3m^2u^2) = 0$$

oder (da $u = 0$ nur die Eigenschaft des Doppelpunkts ausdrückt, unter allen schneidenden Geraden auch von der Abscissenaxe in zwei Punkten getroffen zu werden) wie die beiden konischen Parabeln

$$z = \frac{3m^2}{a}u^2, \tag{3}$$

von welchen die eine auf die durch $m = \frac{n}{2\sqrt{2}}$, die andere auf die durch

$m = -\frac{n}{2\sqrt{2}}$ bestimmte Doppelpunktstangente als Ordinatenaxe bezogen ist. Beide Parabeln verlaufen somit, da ihr Parameter vom Vorzeichen von m unabhängig ist, in denselben Quadranten beider Koordinatensysteme, sie kehren daher beide der positiven Seite der gemeinsamen Abscissenaxe die konkave Seite zu, wodurch die Gestalt des Doppelpunkts eindeutig bestimmt ist. (Fig. 71).

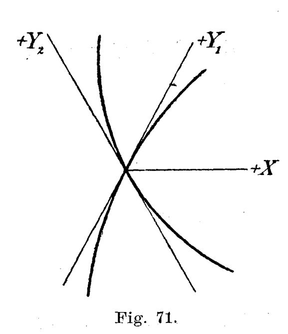


Fig. 71.

104. Bei Kurve (2) handelt es sich um einen dreifachen Punkt im Ursprung mit dem Tangententripel

$$ax^2y - by^3 = 0$$

oder

$$y\left(y - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x\right)\left(y + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x\right) = 0.$$

Da die geg. Gleichung (2) aus dem analytischen Dreieck für einen der Zweige des dreifachen Punkts die parabolische Näherungskurve

$$x^2 - ay = 0$$

ergiebt, welche die Abscissenaxe zur Scheiteltangente hat, so ist für die diesmalige Transformation zur Aufsuchung auch der übrigen Näherungsparabeln eine Richtungsänderung der Abscissen vorzuziehen. Um jedoch die Koordinaten u und z in der gewohnten Verbindung mit m und n beibehalten zu können, vertauscht man Abscissen- und Ordinatenaxe des neuen Systems, dann lauten die Transformationsgleichungen (Fig. 72)

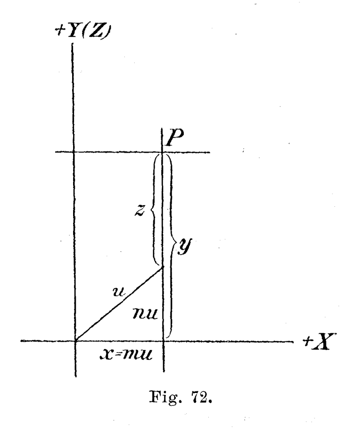


Fig. 72.

$$x = mu \qquad y = nu + z,$$

wodurch Gleichung (2) mittels der Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -ax^2 + 3by^2 \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6by$$

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = 6b \qquad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

übergeht in (2a)

$$\Phi(z, u) \equiv m^4u^4 + (bn^3 - am^2n)\,u^3 + (3bn^2 - am^2)\,u^2z + 3bn \cdot uz^2 + bz^3 = 0.$$

Soll daher die U-Axe einen der Zweige des Ursprungs berühren, so müssen sich für $z = 0$ vier Werte $u = 0$ ergeben, der Koeffizient von u^3 mufs also

verschwinden und bestimmt dadurch die Richtungen des Tangententripels im Ursprung:

$$bn^3 - am^2n = 0$$

oder

$$n\left(n - \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m\right)\left(n + \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m\right) = 0.$$

Nach dem analytischen Dreieck verhält sich nun die Kurve im Ursprung wie die konische Parabel

$$m^4u^2 + (3bn^2 - am^2)z = 0,$$

daher sind die auf die Tangenten des dreifachen Punkts als jeweilige Ordinatenaxen und Scheiteltangenten bezogenen Näherungsparabeln der Zweige des dreifachen Punkts

$$\text{für } n = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m \quad \cdots\cdots \quad u^2 = -\frac{2a}{m^2} \cdot z$$

$$n = 0 \quad \cdots\cdots \quad u^2 = \frac{a}{m^2} \cdot z$$

$$n = -\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot m \quad \cdots\cdots \quad u^2 = -\frac{2a}{m^2} \cdot z,$$

von welchen die erste und dritte der negativen, die mittlere der positiven Z-Axe die konkave Seite zukehren, wodurch die Gestalt des dreifachen

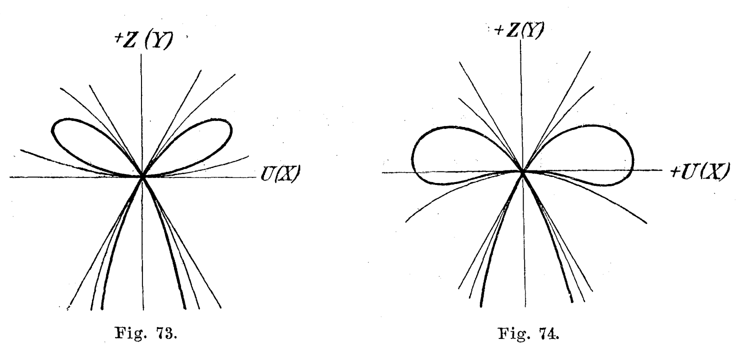


Fig. 73. Fig. 74.

Punkts, die sich, wenn alle drei Näherungsparabeln nach derselben Seite der Abscissenaxe konkav wären, wesentlich ändern würde (Fig. 74), eindeutig bestimmt ist (Fig. 73).

Untersuchung der Kurve dritter Ordnung;

$$(1) \qquad xy^2 + ey = cx + d.$$

105. Die durch diese Gleichung dargestellten kubischen Hyperbolismen (Opusc. Newt. Enum., pg. 26) behandelt De Gua, um zu zeigen, dafs, behufs Ermittelung des aus der vorliegenden Gleichung (1) auch unter Anwendung

des analytischen Dreiecks nicht unmittelbar zu ersehenden Verlaufs der Zweige eines unendlich fernen mehrfachen Punkts, bezüglich seiner Asymptoten ein ähnliches Verfahren anzuwenden ist, wie das in 104. beschriebene, durch welches die Gestalt endlicher mehrfacher Punkte bestimmt wurde, nur treten an Stelle der konischen Näherungsparabeln die konischen hyperbolischen Asymptotenkurven. Der Koeffizient der höchsten Potenz der nach x geordneten Gleichung (1):

$$(y^2 - c)x + ey - d = 0 \tag{1a}$$

ergiebt die zur Abscissenaxe parallelen Asymptoten

$$y + \sqrt{c} = 0 \qquad \text{und} \qquad y - \sqrt{c} = 0,$$

also einen unendlich fernen Doppelpunkt in der Richtung der Abscissenaxe. Bezieht man die Kurve durch Parallelverschiebung zur Ordinatenaxe um die Strecke q mittels der Gleichungen

$$x = z \qquad y = u + q (= y + dy)$$

auf jene Asymptoten als neue Abscissenaxen und bildet man

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0,$$

so lautet die transformierte Gleichung

$$F(z, u) \equiv u^2 z - cz + eu - d + (2uz + e) q + q^2 z = 0$$

oder, nach z geordnet,

$$F(z, u) \equiv (u^2 + 2qu + q^2 - c) z + eu + eq - d \quad = 0 \tag{2}$$

woraus, wenn $u = 0$ Faktor des Koeffizienten von z werden soll, die Bedingung

$$q^2 - c = 0$$

und daher die eine oder andere der Asymptoten Abscissenaxe, je nachdem

$$q = \pm \sqrt{c}$$

in Übereinstimmung mit dem direkten Ergebnis aus (1). Da nach dem analytischen Dreieck die Kurve in den unendlich fernen Punkten der neuen Abscissenaxe sich verhält wie die konischen Hyperbeln

$$2q \cdot uz + eq - d = 0$$

oder

$$uz = \frac{-eq + d}{2q},$$

so ist für die Asymptote (Z-Axe) in der Entfernung von der X-Axe

$$q = \sqrt{c} \cdot\cdot \text{ die Näherungskurve } uz = \frac{-e\sqrt{c} + d}{2\sqrt{c}} \tag{3}$$

(4) $\qquad q = -\sqrt{c} \cdot \cdot$ die Näherungskurve $uz = -\frac{e\sqrt{c}+d}{2\sqrt{c}}$,

jenachdem $d \gtrless e\sqrt{c}$ oder $d^2 \gtrless ce^2$ verläuft die erste dieser zwei Hyperbeln im I. und III. bezw. II. und IV. Quadranten des ersten Koordinatensystems, die zweite Hyperbel dagegen befindet sich stets im II. und IV. Quadranten

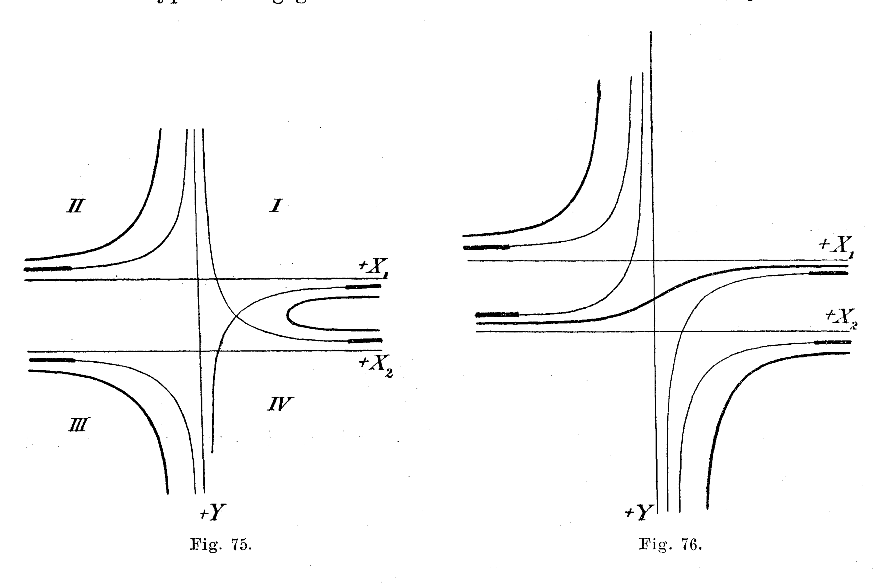


Fig. 75. Fig. 76.

des zweiten Koordinatensystems; man erhält daher für die kubischen Hyperbolismen nur die durch die Figuren 75 und 76 dargestellten zwei Arten des Verhaltens der unendlich fernen Zweige in der Richtung der parallelen Asymptoten. Die Hyperbolismen selbst sind kräftig eingezeichnet.

Untersuchung der parabolischen Kurven:

(1) $$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \cdots + px^n.$$

106. Mit der Beschreibung der durch diese Gleichung dargestellten parabolischen Kurven allgemeinster Art befafst sich erstmals Newton, deshalb, weil die nach Potenzen von x fortschreitende Reihe für y ihm die Interpolation der Reihen, die Quadratur der Kurven nebst einer ganzen Anzahl anderer für die damalige Zeit schwieriger Aufgaben zu lösen gestattet. Er beschränkt sich jedoch auf die blofse Angabe, dafs diese Kurven sich im Unendlichen verhalten wie

$$y = px^n$$

und abgesehen vom Grad der Krümmung, nur in zwei Typen auftreten, ent-

weder wie die gewöhnliche konische Parabel oder wie die I. kubische Parabel (Wendeparabel), je nachdem n gerade oder ungerade ist.

Da $\frac{\partial f}{\partial y}$ nie verschwindet, so besitzen die Kurven keine mehrfachen Punkte, auch keine Tangenten parallel zur Ordinatenaxe, dagegen bestehen, wenn die vorliegende Kurve n ter Ordnung ist, $n-1$ Kulminationspunkte bezüglich der Abscissenaxe, deren Abscissen sich berechnen als die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b + 2cx + 3ex^2 + \cdots + np \cdot x^{n-1} = 0. \tag{2}$$

Da ferner alle höheren partiellen Differentialquotienten nach y, vom zweiten einschliefslich an, verschwinden, so reduzieren sich die höheren Differentiale nach De Gua auf

$$d_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 \quad d_3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 \quad d_4 = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 \text{ u. s. f.};$$

soll daher der aus

$$d_1 = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

berechnete Wert von $\frac{dy}{dx}$ eine Wurzel des zweiten, eine solche des zweiten und dritten Differentials u. s. f. sein, so ist dies nur möglich, wenn die betreffenden Differentiale verschwinden, daher bestimmen sich die

(A) Wendepunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

(B) Flachpunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$

Wendeflachpunkte aus $f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = 0,$

erstere ohne, Flachpunkte mit einer und Wendeflachpunkte mit zwei Bedingungen in den Koeffizienten der geg. Kurvengleichung.

Für die parabolische Kurve dritter Ordnung z. B. ist

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \qquad 2c + 6ex = 0, \tag{4}$$

sie besitzt somit einen Wendepunkt mit den Koordinaten

$$x = -\frac{c}{3e} \qquad y = a - \frac{9bce - 2c^3}{27e^2}.$$

Für die parabolische Kurve vierter Ordnung hat man

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \qquad 2c + 6ex + 12fx^2 = 0, \tag{6}$$

die Kurve besitzt daher zwei reelle getrennte Wendepunkte oder zwei zusammenfallende d. h. einen Flachpunkt oder gar keinen Wendepunkt, je nachdem die Diskriminante

$$3e^2 - 8fc \gtreqless 0.$$

Die Abscisse des Flachpunkts berechnet sich unter vorstehender Bedingung aus (6) zu

$$x = -\frac{e}{4f}$$

in Übereinstimmung mit dem Wert, der sich ergiebt aus

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6e + 24fx = 0. \tag{7}$$

Zugleich folgt aus (A) bezw. (B), dafs die parabolischen Kurven n ter Ordnung höchstens $n-2$ reelle Wendepunkte und höchstens $n-3$ reelle Flachpunkte besitzen und dafs jeder Wendeflachpunkt eine ungerade, jeder Flachpunkt eine gerade Anzahl von Wendepunkten in sich vereinigt.

Systematik der Kurven II. und III. Ordnung.

107. Die Aufzählung der Kurven zweiter und dritter Ordnung, die sich auf Betrachtungen der Diskriminante d. h. derjenigen Funktion stützt, die das reelle Gebiet vom imaginären trennt, giebt De Gua Anlafs zu einem erstmaligen, rein analytischen Beweis des steten Verlaufs einer algebraischen Kurve im ganzen Gebiet ihrer Ebene. Soll ein bis dahin reeller Zweig in einem seiner Punkte plötzlich aufhören d. h. die eine der beiden Koordinaten dieses Punkts imaginär werden, so ist dies nur möglich, wenn diese Koordinate, etwa die Abscisse, sich aus der Gleichung der Kurve in einer der drei Formen berechnet:

$$x = \frac{\pm\sqrt[n]{a-b}}{R} \qquad x = \frac{R}{\pm\sqrt[n]{a-b}} \qquad x = \frac{R \pm \sqrt[n]{a-b}}{Q},$$

wo R, Q, a, b reelle Gröfsen sind, n ein gerader Wurzelexponent und $b > a$ ist. Hieraus folgt, dafs imaginäre Koordinaten nur konjugiert und in gerader Anzahl auftreten können und da der Übergang von $b < a$ zu $b > a$ nur durch $b = a$ hindurch statthaben kann, für welchen Fall sich je zwei gleiche Werte

$$x = 0 \qquad x = \infty \qquad x = \frac{R}{Q}$$

ergeben, so setzt sich die Kurve an der Grenze zwischen reell und imaginär vom ursprünglichen Endpunkt aus stets reell fort entweder in der Richtung der Abscisse dieses Punkts oder erstreckt sich der Zweig ins Unend-

liche oder ist jener Endpunkt ein mehrfacher Punkt, was ebenfalls mit einem Aufhören der Kurve im Widerspruch steht.

Einteilung der Kurven II. Ordnung.

(1) $$f(x, y) = ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0.$$

108. Da das Aggregat der Glieder höchster Dimension

(2) $$ey^2 + fxy + gx^2 = 0$$

je nachdem $4eg - f^2 \lesseqgtr 0$ zwei reelle verschiedene oder zwei reelle gleiche oder zwei imaginär konjugierte Wurzeln $\frac{y}{x}$ hat, so ergiebt sich eine Dreiteilung der Kurven zweiter Ordnung hinsichtlich ihrer unendlich fernen Punkte.

Erster Fall.

109. Im Falle der Doppelwurzel von (2) bestehen folgende Möglichkeiten:

a) Die Doppelwurzel ist Faktor des linearen Aggregats, dann hat (1) die Form:

$$(\alpha x + \beta y)^2 + A(\alpha x + \beta y) = B$$

oder

$$\left(\alpha x + \beta y + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}\right)\left(\alpha x + \beta g + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}\right) = 0$$

d. h. die Kurve zerfällt in zwei Gerade.

b) Die Doppelwurzel ist kein Faktor des linearen Aggregats, dann läfst sich die Gestalt der Kurve am besten diskutieren, wenn ihre Gleichung durch besondere Annahme des Koordinatensystems auf die möglichst einfache Form gebracht wird. Ändert man daher die Richtung der Koordinaten ab in diejenige nach dem unendlich fernen Punkt der Kurve mittels der bekannten Transformation

$$x = nu + z = (x + dx) \qquad y = mu$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy + 2gx + c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2g$$

so lautet die transformierte Gleichung

(3) $$F(z, u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (bm + cn + fmz + 2gnz)u + a + cz + gz^2 = 0;$$

soll daher die neue Ordinatenaxe die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen d. h. für $z = 0$ ein Wert $u = \infty$ sich ergeben, so folgt

$$em^2 + fmn + gn^2 = 0,$$

woraus sich mit Berücksichtigung von $4eg - f^2 = 0$ der Winkel des neuen Koordinatensystems bestimmt zu

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{n} = -\frac{f}{2e},$$

womit (3) übergeht in

$$\begin{aligned}
F(z, u) &\equiv \left(bm + cn - \frac{f^2}{2e}nz + 2gnz\right)u + a + cz + gz^2 \\
&= \left(bm + cn + \frac{4eg - f^2}{2e}n \cdot z\right)u + a + cz + gz^2 \\
&= (bm + cn)u + a + cz + gz^2 \\
&= \frac{(2ce - bf)n}{2e}u + a + cz + gz^2
\end{aligned}$$

oder, wenn an Stelle von u und z wieder die Koordinatenbezeichnungen y und x genommen werden

$$(4) \qquad F(x, y) \equiv gx^2 + cx + hy + a = 0.$$

Um das konstante Glied zu entfernen, verschiebt man den Ursprung in den Schnittpunkt der Kurve mit der Ordinatenaxe d. h. setzt

$$y = y' + p,$$

dann wird aus (4), wenn die neuen Ordinaten y' wieder als y geschrieben werden

$$0 = gx^2 + cx + h(y + p) + a = gx^2 + cx + hy + hp + a$$

und somit aus

$$hp + a = 0$$

die Verschiebungsgröſse

$$p = -\frac{a}{h}$$

und daher die neue Form der Kurvengleichung

$$(5) \qquad \psi(x, y) \equiv gx^2 + cx + hy = 0.$$

Endlich läſst sich noch durch Drehung der Abscissenaxe das lineare Glied in x wegschaffen, dies geschieht durch die Transformation

$$x = nu \qquad y = mu + z\,(= y + dy),$$

wobei der einfachen Rechnung wegen die Abscissenaxe als U-Axe und die Ordinatenaxe als Z-Axe bezeichnet wird, unter Benutzung von

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = h,$$

womit (5) übergeht in

$$\psi(z, u) \equiv gn^2 \cdot u^2 + (hm + cn)u + hz = 0,$$

welche Gleichung sich, wenn die Drehung der Abscissenaxe um die aus

$$hm + cn = 0$$

bestimmte Winkelgröfse $\frac{m}{n} = -\frac{c}{h}$ erfolgt, vereinfacht in

$$gn^2u^2 + hz = 0$$

und daher, wenn die Ordinaten wieder mit y bezeichnet werden, die einfachste Form besitzt

$$\Phi(x, y) \equiv gx^2 + hy = 0. \tag{6}$$

Aus dieser Gleichung folgt: Die Ordinatenaxe, die nach dem unendlich fernen Punkt der Kurve weist, ist ein Durchmesser der Kurve, da für alle negativen Werte von y, und die Kurve verläuft, wenn g und h gleiches Vorzeichen haben, nur in der Richtung der negativen Ordinatenaxe, sich stets zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von x ergeben. Die durch den Koeffizienten der höchsten Potenz von y dargestellte, zur Ordinatenaxe parallele Asymptote bezw. das Asymptotenpaar hat die Gleichung

$$0 \cdot x + h = 0 \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{h}{0} = \infty$$

d. h. die unendlich ferne Gerade ist Asymptote. Die Kurve heifst Parabel.

Zweiter Fall.

110. Im Falle zweier reeller und getrennter Wurzeln von (2) erhält man eine einfachere Form der Kurvengleichung, wenn die Richtungen der Koordinaten in diejenigen der Asymptoten abgeändert werden. Man erreicht dies, indem man zuerst die Ordinatenaxe in die Richtung der einen Asymptote dreht, mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu$$

und alsdann die Abscissenaxe parallel der anderen Asymptote stellt, mittels

$$u = kr + s \qquad z = h \cdot r,$$

also durch die gleichzeitige Transformation

$$x = ns + (nk + h)r = (x + dx)$$
$$y = ms + mk \cdot r \quad = (y + dy),$$

wo nunmehr r und s die den Asymptoten parallelen Koordinaten sind. Mit Benutzung von

$$\frac{\partial f}{\partial x} = fy + 2gx + c \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2g \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{f}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ey + fx + b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e$$

lautet die transformierte Gleichung



$$(7)\qquad f(r,s) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)\,s^2 + \big((fm + 2gn)(nk + h) + (2em + fn)\,mk\big)\,rs + \big(g\,(nk + h)^2 + f\,(nk + h)\,mk + m^2k^2\big)\,r^2 + (bm + cn)\,s + \big(c\,(nk + h) + bmk\big)\,r + a = 0,$$

soll daher jede der Koordinatenaxen die Kurve in einem unendlich fernen Punkt treffen d. h. sowohl für $s = 0$ ein Wert $r = \infty$ als auch umgekehrt für $r = 0$ ein Wert $s = \infty$ sich ergeben, so mufs sein

$$g\,(nk + h)^2 + f\,(nk + h)\,mk + m^2k^2 = 0$$
$$em^2 + fmn + gn^2 = 0,$$

woraus sich die beiden Drehungen $\frac{m}{n}$ und $\frac{h}{k}$ bestimmen. Dann geht (7) über in die Form

$$(8)\qquad A \cdot rs + B \cdot r + C \cdot s + a = 0,$$

verschiebt man daher noch den Ursprung in den Schnittpunkt der Asymptoten mittels

$$r = r' + p \qquad\qquad s = s' + q$$

und bestimmt p und q durch die Bedingungen, dafs die Koeffizienten der linearen Glieder r' und s' verschwinden, so erhält man, wenn die neuen Koordinaten r' und s' wieder mit x und y bezeichnet werden:

$$(9)\qquad xy + K = 0$$

als einfachste Gleichungsform derjenigen Kurvengattung zweiter Ordnung, für welche $4eg - f^2 < 0$ d. h. derjenigen Kurven, welche zwei reelle getrennte Asymptoten besitzen. Diese Kurven heifsen Hyperbeln. Der Ursprung des Koordinatensystems ist Mittelpunkt der Kurve, da alle Geraden $y = \lambda x$ je zwei gleiche und entgegengesetzte Werte sowohl von x als von y ergeben.

111. Da gemäfs den früheren Untersuchungen in 32. alle Kurven zweiter Ordnung, für welche $4eg - f^2 \gtrless 0$ ist, einen Mittelpunkt besitzen, so hätte sich im vorliegenden Fall für die Ableitung einer einfachsten Gleichungsform noch ein weiterer Weg geboten: die Bezugnahme auf die Durchmesser der Kurve als Koordinatenaxen. Transformiert man daher den Ursprung in den Mittelpunkt der Kurve, dessen Koordinaten gemäfs 32. sind

$$p = \frac{bf - 2ce}{4eg - f^2} \qquad\qquad q = \frac{cf - 2bg}{4eg - f^2}$$

mittels $\qquad x + p = (x + dx) \qquad y + q = (y + dy)$

an Stelle von x und y, so lautet die transformierte Gleichung (1)

$$F(x,y) \equiv ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a$$
$$+ (fy + 2gx + c)p + (2ey + fx + b)q + gp^2 + fpq + gq^2$$
$$\equiv ey^2 + fxy + gx^2 + \frac{b(4eg - f^2) + f(bf - 2ce) + 2e(cf - 2bg)}{4eg - f^2}\, y$$
$$+ \frac{c(4eg - f^2) + g(bf - 2ce) + f(cf - 2bg)}{4eg - f^2}\, x$$
$$+ \frac{g(bf - 2ce)^2 + f(bf - 2ce)(cf - 2bg) + e(cf - 2bg)^2}{(4eg - f^2)^2} + a = 0$$
$$(10) \qquad \equiv ey^2 + fxy + gx^2 + L = 0.$$

Die linearen Glieder verschwinden somit in Übereinstimmung mit der Eigenschaft des neuen Ursprungs als Mittelpunkt, dafs jede durch ihn gehende Gerade in zwei zu ihm symmetrischen Punkten schneidet, sich also für $y = \lambda x$ aus (10) eine sowohl in x wie in y rein quadratische Gleichung ergeben mufs. Behält man die ursprüngliche Richtung der Abscissen bei, ändert dagegen diejenige der Ordinaten mittels

$$x = nu + z \qquad\qquad y = mu$$

unter Benutzung von

$$\frac{\partial F}{\partial x} = fy + 2gx \qquad\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2g$$

so kann die transformierte Gleichung

$$\varphi(z, u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + (fm + 2gn)zu + gz^2 + L = 0,$$

wenn die neue Ordinatenaxe U um die aus

$$(11) \qquad fm + 2gn = 0 \qquad \text{zu} \qquad \frac{m}{n} = -\frac{2g}{f}$$

bestimmte Winkelstellung zur Abscissenaxe gebracht wird, vereinfacht werden in

$$\Phi(z, u) \equiv (em^2 + fmn + gn^2)u^2 + gz^2 + L = 0$$

oder nach Einsetzen von (11)

$$\frac{g(4eg - f^2)n^2}{f^2}\, u^2 + gz^2 + L = 0$$

oder

$$(12) \qquad \frac{n^2(4eg - f^2)}{f^2}\, u^2 + z^2 + C = 0$$

oder, wenn die Abscissen und Ordinaten wieder mit x und y bezeichnet werden, unter Berücksichtigung von $4eg - f^2 < 0$

$$(12\text{a}) \qquad x^2 - A \cdot y^2 + C = 0.$$

Da für jedes beliebige x zwei gleiche und entgegengesetzte Werte

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2 + C}{A}}$$

aber für y nur wenn $y > \sqrt{\frac{C}{A}}$ zwei ebensolche Werte $x = \pm \sqrt{Ay^2 - C}$ sich ergeben, so folgt, daſs die Koordinatenaxen konjugierte Durchmesser sind, daſs die Kurve mit vier Ästen sich ins Unendliche erstreckt und nicht geschlossen ist. Sie ist eine Hyperbel.

Ihre Asymptoten sind, da die Faktoren des höchsten Aggregats in (12a) als Faktoren des fehlenden linearen Aggregats betrachtet werden können, die Ursprungsgeraden

$$x - \sqrt{A} \cdot y = 0 \qquad \text{und} \qquad x + \sqrt{A} \cdot y = 0.$$

112. Für die allgemeine Gleichung (1) können unter der Bedingung $4eg - f^2 < 0$ d. h. wenn sie eine Hyperbel darstellt, noch folgende Sonderfälle eintreten:

a) Einer der Faktoren des höchsten Aggregats sei Faktor des linearen Aggregats, also die Gleichung von der Form

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + k(\alpha x + \beta y) + a = 0,$$

dann geht die eine der Asymptoten durch den Ursprung, nämlich

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Verschwindet noch das konstante Glied, so zerfällt die Kurve in das Geradenpaar

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y + k) = 0.$$

b) Beide Faktoren des höchsten Aggregats seien zugleich Faktoren des linearen Aggregats, was nur möglich ist, wenn letzteres verschwindet, dann hat (1) die Form

$$ex^2 + fxy + gx^2 + a = 0$$

oder

$$(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + a = 0$$

d. h. beide Asymptoten gehen durch den Ursprung, liegen aber nicht symmetrisch zum Axenkreuz, ihre Gleichungen lauten

$$\alpha x + \beta y = 0 \qquad \text{und} \qquad \gamma x + \delta y = 0.$$

Dritter Fall.

113. Im Falle imaginärer Wurzeln von (2) d. h. imaginärer Asymptotenrichtungen ist nur die in 111. behandelte Art der Transformation möglich. Die auf konjugierte Durchmesser als Koordinatenaxen bezogene Gleichung der Kurve (12) lautet alsdann mit Berücksichtigung von $4eg - f^2 > 0$:

(12b) $$x^2 + Ay^2 + C = 0,$$

was nur möglich ist, wenn C negativ ist. Da sich die reellen Werte der Abscissen nur zwischen $\pm\sqrt{C}$ und diejenigen der Ordinaten nur zwischen $\pm\sqrt{\frac{C}{A}}$ sich bewegen, so ist die Kurve eine geschlossene. Sie heifst Ellipse, im Sonderfall Kreis.

Bezüglich der allgemeinen Gleichung (1) kann hier nur der eine Sonderfall eintreten, dafs die imaginär konjugierten Linearfaktoren des höchsten Aggregats gleichzeitig Faktoren des linearen Aggregats sind d. h. dafs letzteres überhaupt fehlt, dann lautet die Gleichung der Ellipse

$$ey^2 + fxy + gx^2 + a = 0.$$

Sie hat zwei imaginär konjugierte Asymptoten, deren reeller Durchschnittspunkt der Ursprung ist.

Einteilung der Kurven III. Ordnung:

$$(1)\quad f(x,y) \equiv hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0.$$

114. Da das Aggregat der Glieder höchster Dimension als Gleichung dritten Grads mit reellen Koeffizienten entweder eine oder drei reelle Wurzeln $\frac{y}{x}$ besitzt, denn imaginäre Wurzeln können nur konjugiert d. h. in gerader Anzahl auftreten, so erstreckt sich jede Kurve dritter Ordnung mit mindestens zwei, höchstens sechs Zweigen ins Unendliche. Die Kurven dritter Ordnung sind somit keine geschlossenen Kurven und es ergiebt sich hinsichtlich des Verhaltens im Unendlichen auf Grund der Wurzeln der Gleichung

$$hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 = 0$$

folgende Vierteilung:

I. Fall: Drei reelle verschiedene Wurzeln.

II. Fall: Drei reelle Wurzeln, zwei derselben gleich.

III. Fall: Eine reelle Wurzel, die beiden anderen imaginär konjugiert.

IV. Fall: Drei reelle gleiche Wurzeln.

Da an der Lage des Koordinatensystems, auf welches die allgemeine Gleichung (1) bezogen ist, insgesamt vier Änderungen vorgenommen werden können, für jede Axe eine Drehung und eine Parallelverschiebung, so ist es möglich, durch geeignete Wahl dieser Transformationen stets vier Glieder der allgemeinen Gleichung zu eliminieren.

I. Fall.

115. Giebt man den Ordinaten die Richtung $\frac{m}{n}$ einer Asymptote und setzt also

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

so verschwindet das Glied u^3 bezw. y^3, wenn nach vollzogener Transformation die neuen Koordinaten im Folgenden durchweg wieder mit x und y bezeichnet werden; verschiebt man ferner den Ursprung in den Schnittpunkt von Abscissenaxe und Asymptote mittels

$$x = x' + p$$

und ordnet die transformierte, neu bezeichnete Gleichung nach fallenden Potenzen von y, so mufs das konstante Glied des Faktors der höchsten Potenz y^2 verschwinden, damit sich dieser Faktor, weil er die zur Ordinatenaxe parallelen Asymptoten darstellt, auf $x = 0$ reduziert. Die allgemeine Gleichung (1) verliert somit das Glied y^2. Nunmehr dreht man die Abscissenaxe mittels

$$x = nu \qquad y = mu + z$$

um eine Gröfse $\frac{m}{n}$, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy^2 ergiebt, wobei zu berücksichtigen ist, dafs diesmal in der transformierten Gleichung u und z mit den vertauschten Koordinaten x und y zu bezeichnen sind (vgl. 109, 5), endlich verschiebt man die neue Abscissenaxe um eine Strecke q, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy bestimmt, nachdem $y = y' + q$ gesetzt wurde, dann erhält man in Bezug auf dieses neue Koordinatensystem als Gleichung der allgemeinsten Kurve dritter Ordnung mit drei reellen und getrennten Asymptoten von verschiedener Richtung

$$\text{(Ia)} \qquad Lx^3 + Jxy^2 + Gx^2 + By + Cx + A = 0,$$

die durch Umstellen und Division mit J die Newtonsche Normalform I annimmt:

$$\text{(I)} \qquad xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

In Bezug auf diese Normalform ist somit der Fall I. charakterisiert durch

$a > 0$: Unter dieser Bedingung haben die Kurven (1a) drei reelle verschiedene Asymptoten:

$$x = 0 \qquad y + \sqrt{a} \cdot x = 0 \qquad y - \sqrt{a} \cdot x = 0$$

also eine Asymptote mehr denn die konische Hyperbel und werden daher von Newton als Hyperbolae redundantes bezeichnet.

Das Verhalten dieser Kurven in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe wird nach dem analytischen Dreieck angegeben durch

$$xy^2 + ey = 0 \qquad \text{oder} \qquad xy + e = 0$$

eine Hyperbel, deren Ordinaten $y = -\frac{e}{x}$ gemäfs der nach y quadratischen Gleichung (1a) die Summen der Ordinaten $y_1 + y_2$ der endlichen Schnittpunkte darstellen, in welchen die zur Ordinatenaxe parallelen Geraden die

Kurve treffen. An Stelle des geradlinigen Durchmessers, der durch Verbindung der Mitten einer Parallelschar von Sehnen entsteht, welche die Kurve in drei endlichen Punkten schneiden, tritt somit in diesem Fall, wenn der dritte Schnittpunkt ins Unendliche rückt, die Hyperbel

$$xy + \frac{e}{2} = 0$$

als Durchmesser.

Innerhalb der durch (I) dargestellten Kurvengattung dritter Ordnung kann selbst wieder eine Unterscheidung getroffen werden, einmal hinsichtlich gemeinschaftlicher Faktoren der beiden höchsten Aggregate, sodann hinsichtlich vorhandener Wendeasymptoten (vgl. 29.) oder Mittelpunkte (vgl. 33.).

Da der Faktor $x = 0$ des Aggregats dritter Dimension in (I) zugleich Faktor von bx^2 ist, auf welches Glied sich das Aggregat zweiter Dimension reduziert, so bestehen hier

1. Kurven mit einer Asymptote durch den Ursprung, die hier Ordinatenaxe ist. Diese Kurven haben unter den drei Asymptoten

a) keine Wendeasymptote, wenn $e \neq 0$,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$, daher ihre Gleichung

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

c) drei Wendeasymptoten, wenn außer $e = 0$ noch $b^2 - 4ac = 0$, daher die Gleichung dieser Kurven von der Form

$$xy^2 = x(\alpha x + \beta)^2 + d.$$

2. Kurven mit drei Asymptoten durch den Ursprung, sobald $b = 0$, da alsdann nicht nur der zweite, sondern gleichzeitig auch der dritte Faktor des höchsten Aggregats als Faktor des verschwindenden Aggregats zweiter Dimension zu betrachten ist. Diese Kurven, bei welchen somit das Dreieck der drei Asymptoten zum Punkt zusammenschrumpft, haben die Gleichung

$$xy^2 + ey = ax^3 + cx + d$$

und sie besitzen

a) keine Wendeasymptote, wenn $e \neq 0$, und einen Mittelpunkt oder nicht, je nachdem $d = 0$ oder nicht,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$, aber keinen Mittelpunkt, da die Gleichung dieser Kurven, wenn auch noch $d = 0$ wäre, zerfallen würde,

c) drei Wendeasymptoten, wenn außer $e = 0$ noch $4ac = 0$ d. h. $c = 0$, da für $a = 0$ zwei Wurzeln des höchsten Aggregats gleich würden (vgl. 116.). Diese Kurven haben keinen Mittelpunkt und ihre Gleichung lautet

$$xy^2 = ax^3 + d.$$

II. Fall.

116. Für $a = 0$ hat das Aggregat der Glieder höchster Dimension in (I) die Doppelwurzel $y = 0$. Die Gleichung dieser Kurvengattung kann daher als Sonderfall von (I) betrachtet werden und lautet

$$\text{(II)} \qquad xy^2 + ey = bx^2 + cx + d.$$

Bezüglich gemeinschaftlicher Faktoren, Wendeasymptoten und Mittelpunkte ist analog 115. folgende Unterscheidung möglich:

1. $b \neq 0$, dann haben die beiden höchsten Aggregate nur einen gemeinschaftlichen Faktor $x = 0$. Nach dem analytischen Dreieck verhalten sich diese Kurven in den unendlich fernen Punkten der Ordinatenaxe wie

$$xy^2 + ey = 0 \quad \text{oder} \quad xy = -e \quad \text{die konische Hyperbel}$$

und

$$xy^2 - bx^2 = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = bx \quad \text{die konische Parabel.}$$

Die durch (II) dargestellten Kurven besitzen daher nur eine endliche Asymptote, die Ordinatenaxe. Dieselbe ist

a) eine gewöhnliche Asymptote, wenn $e \neq 0$,

b) eine Wendeasymptote, wenn $e = 0$; die Annäherung dieser Kurven an die Ordinatenaxe erfolgt nach Art der kubischen Hyperbel

$$xy^2 = d.$$

2. $b = 0$, also sämtliche Faktoren der beiden höchsten Aggregate gemeinschaftlich, dann ergiebt sich aus der nach y bezw. x geordneten Gleichung:

$$xy^2 + ey - (cx + d) = 0$$
$$(y + \sqrt{c})(y - \sqrt{c})x + (ey - d) = 0,$$

dafs diese Kurven drei Asymptoten besitzen, nämlich die Ordinatenaxe und zwei Parallelen zur Abscissenaxe; letztere sind

a) reell und getrennt für $c > 0$. Je nachdem ein Mittelpunkt vorhanden ist oder die Ordinatenaxe Wendeasymptote wird, können hier selbst wieder Kurven unterschieden werden

α) ohne Wendeasymptote und ohne Mittelpunkt, wenn $e \neq 0$ und $d \neq 0$,

β) mit Wendeasymptote und ohne Mittelpunkt, wenn $e = 0$ und $d \neq 0$,

γ) ohne Wendeasymptote und mit Mittelpunkt, wenn $e \neq 0$ und $d = 0$,

b) reell und zusammenfallend für $c = 0$, also nur zwei endliche Asymptoten, die eine derselben doppelt zu rechnen. Hier finden sich nur Kurven ohne Mittelpunkt und

α) ohne Wendeasymptote (Ord.-Axe), wenn $e \neq 0$,

β) mit Wendeasymptote, wenn $e = 0$, also ihre Gleichung diejenige der kubischen Hyperbel

$$xy^2 = d,$$

c) imaginär konjugiert für $c < 0$ d. h. sie verschwinden; bezüglich Wendeasymptote und Mittelpunkt dieselbe Unterscheidung wie bei a).

Die letzten drei durch $a = 0$ und $b = 0$ charakterisierten Gruppen von Kurven dritter Ordnung stehen mit den Kegelschnitten in nahem Zusammenhang. Aus ihrer Gleichung

$$xy^2 + ey = cx + d \tag{IIa}$$

folgt

$$y = \frac{-e \pm \sqrt{4cx^2 + 4dx + e^2}}{2x}$$

oder

$$y = \frac{\eta}{x},$$

wo mit η die Ordinaten der Kegelschnitte

$$(2\eta + e)^2 = 4cx^2 + 4dx + e^2$$

oder

$$cx^2 - \eta^2 + dx - e\eta = 0$$

bezeichnet sind, d. h. man erhält die Ordinaten y der durch (IIa) dargestellten Kurven dritter Ordnung durch Division der Ordinaten zugehöriger Kegelschnitte mit den bezüglichen Abscissen und zwar sind diese Kegelschnitte gemäſs 108 ff.:

Hyperbeln für $c > 0$ wegen $4 \cdot c \cdot (-1) < 0$
Parabeln für $c = 0$ „ $4 \cdot 0 \cdot (-1) = 0$
Ellipsen für $c < 0$ „ $4 \cdot (-c) \cdot (-1) > 0$,

daher heiſst Newton die vorliegenden drei Kurvengruppen dritter Ordnung Hyperbolismen der Hyperbel bezw. der Parabel bezw. der Ellipse.

III. Fall.

117. Dafür, daſs das Aggregat der Glieder höchster Dimension in (I) zwei imaginär konjugierte Wurzeln besitzt, ist die Bedingung $a < 0$, die Gleichung dieser Kurven lautet daher

$$xy^2 + ey = -ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Die Kurven besitzen nur noch eine reelle Asymptote, die Ordinatenaxe, also eine Asymptote weniger denn die konische Hyperbel, weshalb sie Newton als defektive Hyperbeln bezeichnet. Diese Asymptote ist

a) gewöhnliche Asymptote für $e \neq 0$,
b) Wendeasymptote für $e = 0$;

sie bestimmt somit zwei Gruppen von Kurven, die nach den Vorgängen 115. und 116. in entsprechende weitere Unterabteilungen gespalten werden können.

IV. Fall.

118. Hier können mit Bezug auf gemeinschaftliche Faktoren der höchsten Aggregate folgende drei Sonderfälle unterschieden werden:

A. Die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats ist kein Faktor der nächst niederen Aggregate.

Um den einfachsten Ausdruck der Gleichung dieser Kurven zu erhalten, die zunächst in der allgemeinsten Form

$$(1)\quad hy^3 + ixy^2 + kx^2y + lx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + by + cx + a = 0$$

vorliegen möge, giebt man den Ordinaten wie früher die durch die dreifache Wurzel des höchsten Aggregats bestimmte Asymptotenrichtung mittels

$$x = nu + z \qquad y = mu,$$

dann verschwindet in der transformierten Gleichung, wenn man sie nach fallenden Potenzen von u ordnet, die höchste Potenz u^3, weil eine Wurzel $u = \infty$ wird und wenn man sie nach Aggregaten abnehmender Dimensionen ordnet, das Glied u^2z nebst uz^2, weil $z = 0$ eine dreifache Wurzel des höchsten Aggregats werden mufs. Verschiebt man noch die Z-Axe sich selbst parallel mittels

$$u = u' + q,$$

wo q eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von u sich bestimmt, und dreht man ferner die Z-Axe mittels

$$u' = mv + w \qquad z = nv$$

um eine Winkelgröfse $\frac{m}{n}$, die sich eindeutig aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von xy ergiebt, wenn man zuvor v und w durch die üblichen Koordinatenbezeichnungen x und y ersetzt, dann geht (1) über in die von Newton als Normalform II aufgestellte Gleichung

$$\text{(III)}\qquad y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

wo noch durch Parallelverschiebung der Ordinatenaxe mittels $x = x' + p$ das in x quadratische oder lineare oder konstante Glied eliminiert werden kann, je nachdem p aus dem gleich Null gesetzten Koeffizienten von x'^2 (hier eindeutig) bezw. x' oder dem verschwindenden konstanten Glied bestimmt wird.

Dies ist die Gleichung der fünf divergenten Parabeln, deren Verhalten in dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe, einem Wendepunkt, da das lineare Glied der in y quadratischen Gleichung (III) fehlt, nach dem analytischen Dreieck angegeben wird durch die zweite kubische Parabel

$$y^2 = ax^3.$$

der Wissenschaften und auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie seit 1669 sowie der Royal Society in London seit 1673 (Eloge siehe Mém. Paris 1716).

De Maupertuis, Pierre Louis Moreau — geb. den 17. Juli 1698 in St. Malo, erst Dragoneroffizier in der französischen Armee, in die er 1718 eintrat, dann Privatmann und von 1731 an besoldetes Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, als welches er die 1736 zur Gradmessung nach Lappland ausgesandte Expedition leitete, wurde 1741 von Friedrich dem Grofsen nach Berlin berufen und war Präsident der physikalischen Klasse der Berliner Akademie von 1745 bis 1753, wo er in sein Vaterland zurückkehrte. Er starb am 27. Juli 1759 in Basel.

Newton, Isaak — geb. den 25. Dezember (A. St.) 1642 zu Whoolsthorpe (Dorf im Kirchspiel Colsterworth bei Grandham in Lincolnshire), Sohn eines kleinen Gutsbesitzers. Nachdem er 1660 das Trinity College in Cambridge bezogen und darin alle akademischen Stufen erstiegen hatte, wurde er Professor der Mathematik an demselben, an Stelle von J. Barrow, von 1699—1701, daneben 1695 Aufseher (Warden) der königlichen Münze und von 1699 bis zu seinem Tode in Kensington (London) am 20. März (A. St.) 1726 königlicher Münzmeister (Master and Worker of the Mint) in London mit 1500 £ Gehalt. Er wurde 1701 zum Parlamentsmitglied gewählt, 1705 zum Sir erhoben, war seit 1671 Mitglied der Royal Society und seit 1703 Präsident derselben, seit 1699 auch auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie (Eloge siehe Mém. Paris 1727),

Nicole, François — geb. den 23. Dezember 1683 in Paris, gest. daselbst am 18. Januar 1758. Mitglied (Mécanicien pensionnaire) der Akademie der Wissenschaften zu Paris, bewies u. a. einem Herrn Mathulon aus Lyon die Fehlerhaftigkeit seiner Quadratur des Kreises und bekam dafür den von diesem ausgesetzten Preis von 3000 Livres (Eloge siehe Mém. Paris 1758).

Saurin, Josef — geb. 1659 zu Courtaison (Vaucluse), war reformierter Prediger erst zu Eure im Dauphiné, dann zu Berthier im Kanton Bern, kehrte aber nach Frankreich zurück, ging zum Katholizismus über und erhielt dafür von Louis XIV. eine Pension; seit 1717 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, gest. daselbst am 29. Dezember 1737.

Stirling, James — geb. etwa 1696 zu St. Ninians in der Grafschaft Stirling (Schottland), in Oxford gebildet und wenigstens in späteren Jahren Agent der schottischen Bergbaugesellschaft zu Leadhills, von wo aus er sich 1746 vergeblich um die durch Mac Laurins Tod erledigte Professur in Edinburg bewarb, die Matthew Stewart erhielt; seit 1729 Mitglied der Royal Society in London, gest. den 5. Dezember 1770 in Leadhills, sonst nichts über ihn bekannt.

Taylor, Brook — geb. den 18. August 1685 zu Edmonton in Middlesex, Dr. juris, vermögender Privatmann, unter Keil, Machin u. a. in Cambridge zum Mathematiker gebildet, ohne amtliche Stellung; seit 1712 Mitglied und von 1714 bis 1718 auch Sekretär der Royal Society in London, gest. daselbst am 29. Dezember 1731.

